ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Φροντιστηριακές Ασκήσεις

Διδάσκων

Επίκ. Καθηγητής Φίλιππος Τζαφέρης

Αθήνα, 2020

Κεφάλαιο 1

Ανάλυση σφάλματος στους υπολογισμούς με αριθμητική κινητής υποδιαστολής (floating point)

1.1 Εισαγωγή

Θεμελιωτής της θεωρίας σφάλματος είναι ο J. Wilkinson με το βιβλίο του Rounding Errors in Algebraic Processes. Ένα προς επίλυση πρόβλημα συνήθως έχει ένα συγκεκριμένο αριθμό τιμών εισόδου (δεδομένα) π.χ. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ και έναν συγκεκριμένο αριθμό τιμών εξόδου (αποτελέσματα) $y_1, y_2, \cdots, y_n$ και κάποιες (συνήθως πολύπλοκες) συναρτήσεις που περιγράφουν πως οι τιμές εξόδου σχετίζονται με τις τιμές εισόδου. Στα επόμενα, για λόγους απλότητας θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση για μιά τιμή εισόδου και μια τιμή εξόδου, δηλαδή $y = f(x)$.

Εκ των προτέρων(Forward) και εκ των Υστέρων(Backward) Ανάλυση Σφάλματος

Έστω $\hat{y}$ μια προσέγγιση της ποσότητας $y = f(x)$ με αριθμητική ακρίβεια ϵ.

- Εκ των Προτέρων(**Forward**) **ανάλυση σφάλματος**: Εύρεση ενός άνω φράγματος για το **Forward** σφάλμα $|\Delta y| = |y - \hat{y}|$.

- Εκ των Υστέρων(**Backward**) **ανάλυση σφάλματος**: Εύρεση ενός άνω φράγματος για το **Backward** σφάλμα Δx τέτοιο ώστε $f(x + \Delta x) = \hat{y}$.

Σύγκριση Forward και Backward Σφάλματος

- Εκ των Προτέρων(**Forward**) **ανάλυση σφάλματος**
  - πιό φυσική
  - συνήθως είναι δύσκολο να υπολογιστεί διότι συνήθως είναι άγνωστη η λύση.
- Εκ των Υστέρων(**Backward**) **ανάλυση σφάλματος**
  - ορίζεται θεωρώντας ότι το $\hat{y}$ είναι η λύση ενός '$\epsilon\gamma\gamma\acute{\upsilon}\varsigma$' προβλήματος με τη διαταραγμένη είσοδο δεδομένων $\hat{x}$.
  - συνήθως είναι δύσκολο να υπολογιστεί διότι συνήθως είναι άγνωστη η λύση.

Πρόβλημα *καλώς - ορισμένο*

- ▷ υπάρχει η λύση του
- ▷ είναι μοναδική
- ▷ εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα

Διαδιδόμενο Σφάλμα

Θεωρούμε μιά προσέγγιση $\tilde{x}$ στην τιμή x(τιμή εισόδου) - θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η προσέγγιση οφείλεται σε λάθη μέτρησης της τιμής. Πρέπει να υπολογίσουμε τη ποσότητα $\tilde{y} := f(\tilde{x})$. Το σχετικό σφάλμα για το $\tilde{y}$ είναι

$$\epsilon_y := \frac{\tilde{y}-y}{y} = \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} \simeq \frac{(\tilde{x}-x)f'(x)}{f(x)} = \frac{xf'(x)}{f(x)} \cdot \frac{\tilde{x}-x}{x} = c_f \cdot \epsilon_x \tag{1.1}$$

όπου $c_f := \dfrac{xf'(x)}{f(x)}$ ορίζεται ως ο αριθμός συνθήκης (*condition number*) της συνάρτησης f στο x. Ο αριθμός συνθήκης δείχνει πόσο ευαίσθητο είναι ένα πρόβλημα σε μικρές μεταβολές στα δεδομένα.

- Αν $|c_f|$ όχι $>>$(πολύ μεγαλύτερο) του 1 τότε το πρόβλημα είναι **καλώς ορισμένο.**
- Αν $|c_f| >> 1$ τότε το πρόβλημα είναι **κακώς ορισμένο.**

Παράδειγμα

Έστω $f(x) = \dfrac{1}{x}$, τότε $c_f = \dfrac{x\cdot(-x^{-2})}{x^{-1}} = -\dfrac{x^2}{x^2} = -1 < 1$, οπότε $|c_f| = 1$ και συνεπώς το πρόβλημα είναι καλώς ορισμένο.

Αριθμοί Μηχανής και Αλγόριθμοι σε Αριθμητική Μηχανής

Έστω x πραγματικός αριθμός με $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, ο οποίος μπορεί να παρασταθεί στον υπολογιστή με τον αριθμό μηχανής $fl(x)$ έτσι ώστε $|\dfrac{fl(x)-x}{x}| \leq \epsilon_M$, όπου ϵ_M είναι η μονάδα μηχανής (*machine unit*). Ένας αλγόριθμος σε αριθμητική μηχανής είναι μια συνάρτηση $\hat{y} = \hat{f}(\hat{x})$ η οποία α) παίρνει σαν είσοδο τον αριθμό μηχανής $\hat{x}$, (β) εκτελεί συγκεκριμένες πράξεις σε αριθμητική μηχανής $(\hat{f})$ και (γ) δίνει ως έξοδο τον αριθμό μηχανής $\hat{y}$. Αντί να υπολογίζεται το $y = f(x)$ υπολογίζεται το $\hat{y} = \hat{f}(\hat{x})$ για $\hat{x} = fl(x)$. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που τίθεται είναι ποιά είναι η καλύτερη ακρίβεια $|\dfrac{\hat{y}-y}{y}|$ που μπορούμε να πετύχουμε· Ένας **ιδανικός αλγόριθμος** υπολογίζει ακριβώς το $\tilde{y} := f(\hat{x})$ και μετά προσεγγίζει το $\tilde{y}$ με τον πλησιέστερο αριθμό μηχανής $\hat{y} := f(\tilde{x})$ ή $\hat{f}(\hat{x}) := fl(f(\hat{x}))\bullet$, έτσι έχουμε

$$\left|\frac{\hat{x}-x}{x}\right| \leq \epsilon_M, \qquad \left|\frac{\tilde{y}-y}{y}\right| \leq |c_f|\epsilon_M$$

και

$$\left|\frac{\hat{y}-y}{y}\right| = \left|\frac{(\hat{y}-\tilde{y})+(\tilde{y}-y)}{y}\right| \leq \left|\frac{\hat{y}-\tilde{y}}{y}\right| + \left|\frac{\tilde{y}-y}{y}\right| = \left|\frac{fl(\tilde{y})-\tilde{y}}{f(x)}\right| + \left|\frac{\tilde{y}-y}{y}\right| \leq \epsilon_M + |c_f|\epsilon_M$$

1.2 Εκ των προτέρων(Forward) Ανάλυση Σφάλματος

Παράδειγμα

Έστω $y = f(x) := 1 - cosx, \quad x = 10^{-5}$ και ότι χρησιμοποιούμε αριθμητική διπλής ακρίβειας. Τότε έχουμε : $c_f = \dfrac{xsinx}{1-cosx}$. Ισχύει $1 - cosx = 2sin^2(\dfrac{x}{2})$. Άρα $c_f = \dfrac{xsinx}{2sin^2(\frac{x}{2})}$. Επομένως

$$|c_f| = |\frac{xsinx}{2sin^2(\frac{x}{2})}| \leq \frac{x^2}{2x^2/4} = 2$$

Συνεπώς η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη και το αναπόφευκτο σφάλμα είναι $|c_f|\epsilon_M + \epsilon_M \simeq \epsilon_M(|c_f| + 1) = 3 \cdot 10^{-16}$, όπου η μονάδα μηχανής είναι $\epsilon_M = 10^{-16}$.

1ος Αλγόριθμος

$y_1 := cosx$ και $y := 1 - y_1$ συνεπώς είναι $\hat{x} := fl(x),\ \tilde{y}_1 := cox\hat{x},\ \hat{y}_1 := fl(\tilde{y}_1),\ \tilde{y} := 1 - \hat{y}_1$ και $\hat{y} := fl(\tilde{y})$. Τα απόλυτα σχετικά σφάλματα είναι:

$$\left|\frac{\hat{x} - x}{x}\right| \leq \epsilon_M$$

$$\left|\frac{\tilde{y}_1 - y_1}{y_1}\right| \leq c_1\epsilon_M$$

όπου

$$c_1 = \left|\frac{x(-sinx)}{cosx}\right| = \left|\frac{xsinx}{cosx}\right| \simeq \frac{x^2}{1} = 10^{-10}.$$

αφού $|sinx| \leq |x|$, άρα $c_1 \simeq 10^{-10}$. Είναι

$$\left|\frac{\hat{y}_1 - y_1}{y_1}\right| \leq c_1\epsilon_M + \epsilon_M$$

και

$$\left|\frac{\tilde{y}_1 - y_1}{y_1}\right| \leq c_2(c_1\epsilon_M + \epsilon_M)$$

αφού

$$\left|\frac{\tilde{y}_1 - y_1}{y_1}\right| = \left|\frac{1 - \hat{y}_1 - 1 + y_1}{y_1}\right| = \left|\frac{y_1 - \hat{y}_1}{1 - y_1}\right| = \left|\frac{y_1 - \hat{y}_1}{1 - y_1} \cdot \frac{y_1}{1 - y_1}\right| \leq c_2(c_1\epsilon_M + \epsilon_M)$$

με

$$c_2 = \left|\frac{y_1(-1)}{1 - y_1}\right| = \left|\frac{cosx}{1 - cosx}\right| = \left|\frac{cosx}{2sin^2\frac{x}{2}}\right| \simeq \frac{1}{2 \cdot \dfrac{x^2}{4}} = \frac{2}{x^2} = \frac{2}{10^{-10}} = 2 \cdot 10^{10}$$

Άρα το πρόβλημα είναι κακώς ορισμένο και ο αλγόριθμος είναι αριθμητικά ασταθής. Τελικά έχουμε

$$\left|\frac{\hat{y} - y}{y}\right| \leq c_2(c_1\epsilon_M + \epsilon_M) + \epsilon_M \simeq 2 \cdot \epsilon_M + 2 \cdot 10^{10}\epsilon_M + \epsilon_M \simeq 2\epsilon_M + 2 \cdot 10^{10}\epsilon_M < 4 \cdot 10^{-6}.$$

2ος Αλγόριθμος

$y_1 := \dfrac{x}{2}, \quad y_2 := siny_1$ και $y_3 := y_2^2, \quad y_4 := 2y_3$. Ο πολ/μός επί 2 και η διαίρεση με 2 είναι ακριβείς σε αριθμητική μηχανής, άρα το πρώτο και το τέταρτο βήμα δεν έχουν σφάλμα στρογγύλευσης.

$$c_1 = \frac{y_1 cosy_1}{y_1} = cosy_1 \simeq 1.$$

$$c_2 = \frac{y_2 2y_2}{y_2^2} = 2.$$

και ανάλογα με πριν

$$\left|\frac{\hat{y}-y}{y}\right| \leq c_2(c_1\epsilon_M + \epsilon_M) + \epsilon_M \simeq 2(\epsilon_M + \epsilon_M) + \epsilon_M \simeq 5 \cdot 10^{-16}.$$

Άρα αυτός ο αλγόριθμος είναι αριθμητικά ευσταθής.

1.3 Εκ των Υστέρων(Backward) Ανάλυση Σφάλματος

Έστω $y = f(x)$ ο ακριβής υπολογισμός και $\hat{y} = \hat{f}(\hat{x})$ ο αλγόριθμος σε αριθμητική μηχανής. Αν μπορούσαμε να βρούμε ένα αριθμό x_* κοντά στο $\hat{x}$ τέτοιο ώστε $\hat{y} = f(x_*)$ τότε έχουμε:

$$\left|\frac{\hat{y}-y}{y}\right| = \left|\frac{f(x_*)-f(x)}{f(x)}\right| \simeq \left|\frac{(x-x_*)f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)} \cdot \frac{x-x_*}{x}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|\left|\frac{x-x^*}{x}\right|$$

Άρα

$$\left|\frac{\hat{y}-y}{y}| \leq |c_f\right|\left|\frac{x-x_*}{x_*}\right|.$$

Αν $|\frac{x-x_*}{x_*}| \leq \epsilon$ όπου ϵ <u>δεν</u> είναι πολύ μεγαλύτερο από το ϵ_M, τότε ο αλγόριθμος είναι ευσταθής.

Παράδειγμα

Έστω $y = f(x) = x^2$. Ο απευθείας υπολογισμός δίνει: $\hat{x} = fl(x)$, $\tilde{y} = \hat{x}^2$, $\hat{y} = fl(\tilde{y})$, όπου $\hat{y} = \tilde{y}(1+\epsilon)$ με $|\epsilon| \leq \epsilon_M$. Άρα $\hat{y} = x_*^2$ για $x_* = \sqrt{\tilde{y}}\sqrt{1+\epsilon} = \hat{x}\sqrt{1+\epsilon}$. Αφού $\left|\frac{\hat{x}-x}{x}\right| \leq \epsilon_M$ και $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \frac{\epsilon}{2}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_*-x}{x}\right| = \left|\frac{\hat{x}\sqrt{1+\epsilon}-x}{x}\right| \simeq \left|\frac{\hat{x}(1+\frac{\epsilon}{2})-x}{x}\right| = \left|\frac{(\hat{x}-x)+\frac{\hat{x}}{2}\epsilon}{x}\right| \\ \leq \left|\frac{\hat{x}-x}{x}\right| + \left|\frac{\hat{x}}{x}\cdot\frac{\epsilon}{2}\right| \leq \epsilon_M + \frac{1}{2}\epsilon_M.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\left|\frac{\hat{x}}{x}\right| = \frac{fl(x)}{x} = \frac{x(1+\epsilon_M)}{x} = 1 + \epsilon_M$$

και $(1+\epsilon_M)\cdot\frac{\epsilon}{2} \simeq \epsilon_M \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon_M}{2}$.

Το οποίο δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από το ϵ_M, άρα ο αλγόριθμος είναι αριθμητικά ευσταθής.

Κεφάλαιο 2

Άμεσοι μέθοδοι για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

2.1 Πίνακες

Πίνακας $A = (a_{ij})$ διάστασης $m \times n$ λέγεται μια ορθογώνια διάταξη(διευθέτηση) $m \times n$ στοιχείων σε m γραμμές και n στήλες.

- **Ειδικές μορφές Πινάκων**
  - ▷ Αραιός: λέγεται ένας πίνακας όταν ένα σημαντικό ποσοστό των στοιχείων του (συνήθως $> 80\%$) είναι μηδενικά.
  - ▷ Πυκνός: είναι ένας πίνακας που δεν είναι αραιός.

- **Διαγώνιοι πίνακες**
  - Διαγώνιος : $\mathbf{a_{ij} = 0}$ για $\mathbf{i \neq j}$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d_1} & & & & \\ & \mathbf{d_2} & & \text{\huge 0} & \\ & & \mathbf{d_3} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{d_n} \end{bmatrix}$$

  - Μοναδιαίος : $\mathbf{a_{ii} = 1}$ για $\mathbf{i = j}$ και $\mathbf{a_{ij} = 0}$ για $\mathbf{i \neq j}$

$$\mathbf{I_n} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & & \\ & \mathbf{1} & & \text{\huge 0} & \\ & & \mathbf{1} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

- **Τριγωνικοί πίνακες**
  - Κάτω τριγωνικός : $\mathbf{l_{ij} = 0}$ για $i < j$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \ell_{\mathbf{11}} & & & & \\ \ell_{\mathbf{21}} & \ell_{\mathbf{22}} & & \text{\huge 0} & \\ \ell_{\mathbf{31}} & \ell_{\mathbf{32}} & \ell_{\mathbf{33}} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \ell_{\mathbf{n1}} & \ell_{\mathbf{n2}} & \ell_{\mathbf{n3}} & \dots & \ell_{\mathbf{nn}} \end{bmatrix}$$

– Άνω τριγωνικός : $\mathbf{u_{ij} = 0}$ για $i > j$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u_{11}} & \mathbf{u_{12}} & \mathbf{u_{13}} & \cdots & \mathbf{u_{1n}} \\ & \mathbf{u_{22}} & \mathbf{u_{23}} & \cdots & \mathbf{u_{2n}} \\ & & \mathbf{u_{33}} & \cdots & \mathbf{u_{3n}} \\ & & & & \\ & \Large 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{u_{nn}} \end{bmatrix}$$

- **Πίνακες δέσμης ή ταινιωτοί**

  Πίνακας δέσμης λέγεται ένας $n \times n$ πίνακας όταν $\mathbf{a_{ij} = 0}$ για κάθε $\mathbf{i, j}$ με $\mathbf{i - j > p}$ ή $\mathbf{j - i > q}$, όπου $1 \leq p, q \leq n - 1$. Η ποσότητα $\mathbf{w = p + q + 1}$ λέγεται *πλάτος (ή εύρος)* της δέσμης.

  – Τριδιαγώνιος λέγεται ένας πίνακας αν $\mathbf{p = q = 1}$, οπότε είναι της μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & & & & \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & & \Large 0 & \\ & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & \mathbf{a_{34}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \Large 0 & & \mathbf{a_{n-1,n-2}} & \mathbf{a_{n-1,n-1}} & \mathbf{a_{n-1,n}} \\ & & & & \mathbf{a_{n,n-1}} & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

  ή πιο απλά

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{d_1} & \mathbf{c_1} & & & & \\ \mathbf{a_2} & \mathbf{d_2} & \mathbf{c_2} & & \Large 0 & \\ & \mathbf{a_3} & \mathbf{d_3} & \mathbf{c_3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \Large 0 & & \mathbf{a_{n-1}} & \mathbf{d_{n-1}} & \mathbf{c_{n-1}} \\ & & & & \mathbf{a_n} & \mathbf{d_n} \end{bmatrix}$$

  – Πενταδιαγώνιος λέγεται ένας πίνακας αν $\mathbf{p = q = 2}$, οπότε είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d_1} & \mathbf{e_1} & \mathbf{f_1} & & & & & & \\ \mathbf{b_2} & \mathbf{d_2} & \mathbf{e_2} & \mathbf{f_2} & & & & & \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{b_3} & \mathbf{d_3} & \mathbf{e_3} & \mathbf{f_3} & & \Large 0 & & \\ & \mathbf{a_4} & \mathbf{b_4} & \mathbf{d_4} & \mathbf{e_4} & \mathbf{f_4} & & & \\ & & \mathbf{a_5} & \mathbf{b_5} & \mathbf{d_5} & \mathbf{e_5} & \mathbf{f_5} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \Large 0 & & \mathbf{a_{n-2}} & \mathbf{b_{n-2}} & \mathbf{d_{n-2}} & \mathbf{e_{n-2}} & \mathbf{f_{n-2}} \\ & & & & & \mathbf{a_{n-1}} & \mathbf{b_{n-1}} & \mathbf{d_{n-1}} & \mathbf{e_{n-1}} \\ & & & & & & \mathbf{a_n} & \mathbf{b_n} & \mathbf{d_n} \end{bmatrix}$$

– Άλλες ειδικές μορφές

 * **ειδική μορφή πενταδιαγώνιου**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d_1} & \mathbf{e_1} & \mathbf{f_1} & & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{d_2} & \mathbf{e_2} & \mathbf{f_2} & & & & & & \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{0} & \mathbf{d_3} & \mathbf{e_3} & \mathbf{f_3} & & \Large 0 & & & \\ & \mathbf{a_4} & \mathbf{0} & \mathbf{d_4} & \mathbf{e_4} & \mathbf{f_4} & & & & \\ & & \mathbf{a_5} & \mathbf{0} & \mathbf{d_5} & \mathbf{e_5} & \mathbf{f_5} & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \Large 0 & & \mathbf{a_{n-2}} & \mathbf{0} & \mathbf{d_{n-2}} & \mathbf{e_{n-2}} & \mathbf{f_{n-2}} \\ & & & & & \mathbf{a_{n-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{d_{n-1}} & \mathbf{e_{n-1}} \\ & & & & & & \mathbf{a_n} & \mathbf{0} & \mathbf{d_n} \end{bmatrix}$$

 * **μορφή W**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & & & & & & & & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & & & \Large 0 & & & \mathbf{a_{2,n-1}} & \mathbf{a_{2,n}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} & \mathbf{a_{33}} & & & & \mathbf{a_{3,n-2}} & \mathbf{a_{3,n-1}} & \mathbf{a_{3,n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{\ell 1}} & \mathbf{a_{\ell 2}} & \mathbf{a_{\ell 3}} & \cdots & \mathbf{a_{\ell\ell}} & \cdots & \mathbf{a_{\ell,n-2}} & \mathbf{a_{\ell,n-1}} & \mathbf{a_{\ell,n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{n-2,1}} & \mathbf{a_{n-2,2}} & \mathbf{a_{n-2,3}} & & & & \mathbf{a_{n-2,n-2}} & \mathbf{a_{n-2,n-1}} & \mathbf{a_{n-2,n}} \\ \mathbf{a_{n-1,1}} & \mathbf{a_{n-1,2}} & & & \Large 0 & & & \mathbf{a_{n-1,n-1}} & \mathbf{a_{n-1,n}} \\ \mathbf{a_{n1}} & & & & & & & & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

 * **μορφή Z**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & \mathbf{a_{1n}} \\ & \mathbf{a_{22}} & \mathbf{a_{23}} & \cdots & a_{2,n-2} & \mathbf{a_{2,n-1}} & \\ & & \mathbf{a_{33}} & \cdots & \mathbf{a_{3,n-2}} & & \\ & \Large 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \Large 0 & \\ & & \mathbf{a_{n-2,3}} & \cdots & \mathbf{a_{n-2,n-2}} & & \\ & \mathbf{a_{n-1,2}} & \mathbf{a_{n-1,3}} & \cdots & \mathbf{a_{n-1,n-2}} & \mathbf{a_{n-1,n-1}} & \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \mathbf{a_{n3}} & \cdots & \mathbf{a_{n,n-2}} & \mathbf{a_{n,n-1}} & \mathbf{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

- **Βασικοί ορισμοί Πινάκων**

 – *Ορισμός 1*: Έστω $\mathbf{A}$ ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πραγματικός πίνακας. Αν υπάρχει ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{B}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I_n}$, τότε ο $\mathbf{A}$ λέγεται **αντιστρέψιμος** ή **μη ιδιάζων** πίνακας και ο $\mathbf{B}$ είναι αντίστροφος του $\mathbf{A}$. Συμβολ. $\mathbf{B} = \mathbf{A^{-1}}$.

 – *Ορισμός 2*: Ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πραγματικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται **συμμετρικός** όταν ισχύει $\mathbf{A^T} = \mathbf{A}$.

 – *Ορισμός 3*: Ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πραγματικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται **ορθογώνιος** όταν ισχύει $\mathbf{A^T} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I_n}$. Τότε είναι $\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A^T}$.

 – *Ορισμός 4*: Ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ μιγαδικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται **μοναδιακός (Unitary)** όταν ισχύει $\mathbf{A^H A} = \mathbf{A A^H} = \mathbf{I}$, όπου $\mathbf{A^H} = \bar{\mathbf{A}}^{\mathbf{T}}$ είναι ο συζυγής ανάστροφος του $\mathbf{A}$.

 – *Ορισμός 5*: Ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ μιγαδικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται **Hermitian** όταν ισχύει $\mathbf{A^H} = \mathbf{A}$.

 – *Ορισμός 6*: Ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ μιγαδικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται **κανονικός (normal)** όταν ισχύει $\mathbf{A^H} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A^H}$.

– *Ορισμός 7*: Ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ μιγαδικός πίνακας $\mathbf{A}$ λέγεται **θετικά ορισμένος (positive definite)** όταν ισχύει $\mathbf{x^H A x > 0}$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

- **Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων**

$$\mathbf{Ax = b}$$

όπου ο $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακας $\mathbf{A}$ είναι **μη ιδιάζων** (ή **αντιστρέψιμος**) και $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ διανύσματα διάστασης $\mathbf{n} \times \mathbf{1}$.

  – Άμεσοι (ή απευθείας) μέθοδοι
  – Επαναληπτικές μέθοδοι

- **Άμεσοι μέθοδοι**

Με απαλοιφή	Με παραγοντοποίηση
1. Gauss(GE)	**1**. LU
2. Gauss-Jordan(GJ)	**2**. WZ
3. Huard(HU)	

Μεταθετικοί Πίνακες

Ορισμός: Έστω $\mathbf{A}$ ένας $n \times n$ πίνακας και π μία μετάθεση των στοιχείων του συνόλου $W = \{1, 2, \cdots, n\}$ που δίνεται ως εξής

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$$

τότε ορίζεται ο **μεταθετικός** πίνακας

$$P_\pi = \begin{bmatrix} e_{\pi_1} \\ e_{\pi_2} \\ \vdots \\ e_{\pi_n} \end{bmatrix}$$

όπου e_j συμβολίζει το n-διάστατο βασικό διάνυσμα-γραμμή (του οποίου όλες οι συντεταγμένες είναι 0, εκτός από την j που είναι 1).

Παράδειγμα

Έστω $n = 3$ και η μετάθεση π του $W = \{1,\ 2,\ 3\}$ που δίνεται ως εξής

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi_1 = 3 & \pi_2 = 1 & \pi_3 = 2 \end{pmatrix}$$

τότε σχηματίζεται ο μεταθετικός πίνακας P_π ως ακολούθως:

$$P_\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

τότε έχουμε

$$P_\pi \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \cdot \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

και

$$A \cdot P_\pi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{bmatrix}$$

Παρατήρηση: Άν ένας πίνακας A πολλαπλασιάζεται από αριστερά με ένα μεταθετικό πίνακα P_π τότε αντιμεταθέτει τις γραμμές του, ενώ αν πολλαπλασιάζεται από δεξιά αντιμεταθέτει τις στήλες του.

2.2 Μέθοδος Απαλοιφής του Gauss με μερική οδήγηση

Άσκηση 1

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$A \cdot x = b$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τον επαύξημένο πίνακα του συστήματος :

$$A^{(1)} = [A : b]$$

A) **Τριγωνοποίηση**

Βήμα $\boxed{\mathbf{r = 1}}$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 : & 30 \\ 2 & 4 & -2 : & 4 \\ 6 & 18 & -12 : & 12 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε το μέγιστο κατα απόλυτο τιμή στοιχείο της πρώτης στήλης:

$$|a_{31}| = max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = max\{|3|, |2|, |6|\} = |6|.$$

Εναλλάσουμε τις γραμμές 1 και $i_1 = 3$. Άρα

$$I_{1,i_1} = I_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$I_{1,3}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 : & 12 \\ 2 & 4 & -2 : & 4 \\ 3 & 17 & 10 : & 30 \end{bmatrix}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$m_{21} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}, \quad \text{και} \quad m_{31} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

άρα

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{(2)} = M^{(1)}I_{1,3}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 : & 12 \\ 2 & 4 & -2 : & 4 \\ 3 & 17 & 10 : & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 : & 12 \\ 0 & -2 & 2 : & 0 \\ 0 & 8 & 16 : & 24 \end{bmatrix}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=2}}$

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{rrrr} 6 & 18 & -12: & 12 \\ 0 & -2 & 2: & 0 \\ 0 & 8 & 16: & 24 \end{array}\right]$$

$$|a_{32}| = max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} = max\{|-2|, |8|\} = |8|.$$

Εναλλάσουμε τις γραμμές 2 και $i_2 = 3$. Άρα

$$I_{2,i_2} = I_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$I_{2,3}A^{(2)} = \left[\begin{array}{rrrr} 6 & 18 & -12: & 12 \\ 0 & 8 & 16: & 24 \\ 0 & -2 & 2: & 0 \end{array}\right]$$

Επίσης έχουμε ότι

$$m_{32} = -\frac{-2}{8} = \frac{1}{4}$$

άρα

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{(3)} = M^{(2)}I_{2,3}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{rrrr} 6 & 18 & -12: & 12 \\ 0 & 8 & 16: & 24 \\ 0 & -2 & 2: & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrrr} 6 & 18 & -12: & 12 \\ 0 & 8 & 16: & 24 \\ 0 & 0 & 6: & 6 \end{array}\right]$$

B) **Επίλυση άνω τριγωνικού συστήματος**

$$A^{(3)}x = b^{(3)}$$

και ο επαυξημένος πίνακας $A^{(3)}$ είναι ο ακόλουθος:

$$A^{(3)} = \left[\begin{array}{rrrr} 6 & 18 & -12: & 12 \\ 0 & 8 & 16: & 24 \\ 0 & 0 & 6: & 6 \end{array}\right]$$

οπότε με προς τα πίσω αντικατάσταση προκύπτει:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6/6 = 1 \\ x_2 &= (24 - 16x_3)/8 = (24 - 16)/8 = 1 \\ x_1 &= (12 - 18x_2 + 12x_3)/6 = (12 - 18 + 12)/6 = 1 \end{aligned}$$

2.3 Μέθοδος Απαλοιφής Gauss – Jordan με μερική οδήγηση

Άσκηση 2

Δίνεται το ίδιο γραμμικό σύστημα με την Άσκηση 1

$$A \cdot x = b$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 30 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε τον επαύξημένο πίνακα του συστήματος:

$$A^{(1)} = [A : b]$$

A) **Διαγωνοποίηση**

Βήμα $\boxed{\mathbf{r = 1}}$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 : & 30 \\ 2 & 4 & -2 : & 4 \\ 6 & 18 & -12 : & 12 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε το μέγιστο κατά απόλυτο τιμή στοιχείο της πρώτης στήλης:

$$|a_{31}| = max\{|a_{11}|, |a_{21}|, |a_{31}|\} = max\{|3|, |2|, |6|\} = |6|.$$

Εναλλάσουμε τις γραμμές 1 και $i_1 = 3$. Άρα

$$I_{1,i_1} = I_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$I_{1,3}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 : & 12 \\ 2 & 4 & -2 : & 4 \\ 3 & 17 & 10 : & 30 \end{bmatrix}$$

Ακόμη έχουμε ότι

$$\begin{cases} \mu_{11} = \dfrac{1}{a_{11}^{(1)}} = \dfrac{1}{6} \\ \mu_{21} = -\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3} \\ \mu_{31} = -\dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} - \dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

άρα

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{(2)} = M^{(1)}I_{1,3}A^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 : & 12 \\ 2 & 4 & -2 : & 4 \\ 3 & 17 & 10 : & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 : & 2 \\ 0 & -2 & 2 : & 0 \\ 0 & 8 & 16 : & 24 \end{bmatrix}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=2}}$

$$|a_{32}| = max\{|a_{22}|, |a_{32}|\} = max\{|-2|, |8|\} = |8|.$$

Εναλλάσουμε τις γραμμές 2 και $i_2 = 3$. Άρα

$$I_{2,i_2} = I_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$I_{2,3}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2: & 2 \\ 0 & 8 & 16: & 24 \\ 0 & -2 & 2: & 0 \end{bmatrix}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{cases} \mu_{12} = -\dfrac{a_{12}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -\dfrac{3}{8} \\ \mu_{22} = \dfrac{1}{a_{22}^{(2)}} = \dfrac{1}{8} \\ \mu_{32} = -\dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

άρα

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A^{(3)} = M^{(2)}I_{2,3}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2: & 2 \\ 0 & 8 & 16: & 24 \\ 0 & -2 & 2: & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8: & -7 \\ 0 & 1 & 2: & 3 \\ 0 & 0 & 6: & 6 \end{bmatrix}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=3}}$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8: & -7 \\ 0 & 1 & 2: & 3 \\ 0 & 0 & 6: & 6 \end{bmatrix}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{cases} \mu_{13} = -\dfrac{a_{13}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \dfrac{4}{3} \\ \mu_{23} = -\dfrac{a_{23}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = -\dfrac{1}{3} \\ \mu_{33} = -\dfrac{1}{a_{33}^{(3)}} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Επομένως

$$M^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$A^{(4)} = M^{(3)}A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8: & -7 \\ 0 & 1 & 2: & 3 \\ 0 & 0 & 6: & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0: & 1 \\ 0 & 1 & 0: & 1 \\ 0 & 0 & 1: & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

2.4 Μέθοδος Τριγωνικής Διαχώρισης LU (I)κατά γραμμές και (II) κατά στήλες

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

και έστω ότι διαχωρίζεται στους παρακάτω τριγωνικούς πίνακες L και U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

(I) Υπολογισμός των στοιχείων κατά γραμμές

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=1}}$ Πολ/σμός 1ης γραμμής του L με 1η, 2η, 3η στήλη του U:

$$u_{11} = a_{11} = 2, \quad u_{12} = a_{12} = 3, \quad u_{13} = a_{13} = 4$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=2}}$ Πολ/σμός 2ης γραμμής του L με 1η, 2η, 3η στήλη του U, οπότε προκύπτει το ακόλουθο κάτω τριγωνικό γρ. σύστημα:

$$\begin{cases} l_{21}u_{11} & = a_{21} \quad \Rightarrow \quad l_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} & = a_{22} \quad \Rightarrow \quad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = (6 - 3 \cdot 3) = -3 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} & = a_{23} \quad \Rightarrow \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \Rightarrow u_{23} = -5 \end{cases}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=3}}$. Πολ/σμός 3ης γραμμής του L με 1η, 2η, 3η στήλη του U, οπότε προκύπτει το ακόλουθο κάτω τριγωνικό γρ. σύστημα:

$$\begin{cases} l_{31}u_{11} & = a_{31} \quad \Rightarrow \quad l_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & = a_{32} \quad \Rightarrow \quad l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = (9 - 12)/-3 = 1 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & = a_{33} \quad \Rightarrow \quad u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \quad \Rightarrow \quad u_{33} = -1 \end{cases}$$

(II) Υπολογισμός των στοιχείων κατά στήλες

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=1}}$ Πολ/σμός 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με τη 1η στήλη του U:

$$\begin{cases} u_{11} & = a_{11} \quad \Rightarrow u_{11} = 2 \\ l_{21} & = \dfrac{a_{21}}{u_{11}} \quad \Rightarrow l_{21} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ l_{31} & = \dfrac{a_{31}}{u_{11}} \quad \Rightarrow l_{31} = \dfrac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=2}}$ Πολ/σμός 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με τη 2η στήλη του U:

$$\begin{cases} u_{12} & = a_{12} \quad \Rightarrow u_{12} = 3 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} & = a_{22} \quad \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 6 - 9 = -3 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & = a_{32} \quad \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22} = (9 - 4 \cdot 3)/(-3) = 1 \end{cases}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=3}}$ Πολ/σμός 1ης, 2ης, 3ης γραμμής του L με τη 3η στήλη του U:

$$\begin{cases} u_{13} & = a_{13} \quad \Rightarrow u_{13} = 4 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} & = a_{23} \quad \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 7 - 12 = -5 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} & = a_{33} \quad \Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 10 - 4 \cdot 4 - 1 \cdot (-5) = -1 \end{cases}$$

Άρα τελικά οι τριγωνικοί πίνακες που προκύπτουν είναι οι ακόλουθοι:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.5 Μέθοδος Τριγωνικής Διαχώρισης LU με μερική οδήγηση

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Να εφαρμόσετε τον αλγόριθμο της Τριγωνικής Διαχώρισης **LU**(μορφή Doolittle) με μερική οδήγηση.

Τριγωνική Διαχώριση

Εύρεση των πινάκων L και U τέτοιων ώστε

$$P \cdot A = L \cdot U$$

ή

$$P \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r = 1}}$

$$p = 1 \qquad s_1 = a_{11} = 2$$

$$p = 2 \qquad s_2 = a_{21} = 3$$

$$p = 3 \qquad s_3 = a_{31} = 1$$

Έστω

$$A^{(1)} = [A \vdots \mathbf{s}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

επιλογή οδηγού γραμμής

$$|s_2| = \max\{|s_1|, |s_2|, |s_3| = \max\{|2|, |3|, |1|\} = |3|$$

άρα $i_1 = 2$, οπότε εναλλάσεται η 1η με τη 2η γραμμή, δηλαδή

$$I_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$A^{(1)} = I_{12} A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός της 1ης γραμμής του U και της 1ης στήλης του L

$$u_{11} = s_1 = 3, \quad u_{12} = a_{12} = 1, \quad u_{13} = a_{13} = 2$$

$$l_{21} = s_2/u_{11} = 2/3, \quad l_{31} = s_3/u_{11} = 1/3$$

Άρα τελικά

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{c|cc} u_{11}=3 & u_{12}=1 & u_{13}=2 & \vdots & s_1=3 \\ \hline l_{21}=2/3 & a_{22}=1 & a_{23}=1 & \vdots & s_2 \\ l_{31}=1/3 & a_{32}=2 & a_{33}=1 & \vdots & s_3 \end{array}\right]$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=2}}$

$$p=2 \qquad s_2 = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - 2/3 \cdot 1 = 1/3$$

$$p=3 \qquad s_3 = a_{32} - l_{31}u_{12} = 2 - 1/3 \cdot 1 = 5/3$$

Άρα

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{c|cc} u_{11}=3 & u_{12}=1 & u_{13}=2 & \vdots & s_1=3 \\ \hline l_{21}=2/3 & a_{22}=1 & a_{23}=1 & \vdots & s_2=1/3 \\ l_{31}=1/3 & a_{32}=2 & a_{33}=1 & \vdots & s_3=5/3 \end{array}\right]$$

επιλογή οδηγού γραμμής

$$|s_3| = \max\{|s_2|, |s_3|\} = \max\{|1/3|, |5/3|\} = 5/3$$

άρα $i_2 = 3$ οπότε εναλλάσεται η 2η με την 3η γραμμή, δηλαδή

$$I_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$A^{(2)} = I_{23}A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 1/3 & 2 & 1 & \vdots & 5/3 \\ 2/3 & 1 & 1 & \vdots & 1/3 \end{bmatrix}$$

Υπολογισμός της 2ης γραμμής του U και της 2ης στήλης του L

$$u_{22} = s_2 = 5/3, \qquad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - 1/3 \cdot 2 = 1/3$$
$$l_{32} = s_3/u_{22} = 1/5$$

Άρα τελικά

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{cc|c} u_{11}=3 & u_{12}=1 & u_{13}=2 & \vdots & s_1=3 \\ l_{21}=1/3 & u_{22}=5/3 & u_{23}=1/3 & \vdots & s_2=5/3 \\ \cline{2-3} l_{31}=2/3 & l_{32}=1/5 & a_{33}=1 & \vdots & s_3 \end{array}\right]$$

Βήμα $\boxed{\mathbf{r=3}}$

$p=3 \qquad s_3 = a_{33} - l_{31} * u_{13} - l_{32} * u_{23} = 1 - 2/3 \cdot 2 - 1/5 \cdot 1/3 = -2/5$

Υπολογισμός της 3ης γραμμής του U

$$u_{33} = s_3 = -2/5$$

Άρα τελικά

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} u_{11}=3 & u_{12}=1 & u_{13}=2 & \vdots & s_1=3 \\ l_{21}=1/3 & u_{22}=5/3 & u_{23}=1/3 & \vdots & s_2=5/3 \\ l_{31}=2/3 & l_{32}=1/5 & \underline{u_{33}=-2/5} & \vdots & s_3=-2/5 \end{bmatrix}$$

οπότε είναι

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix}$$

και ισχύει

$$LU = P_2 P_1 A.$$

Πράγματι

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς ισχύει

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb$$

όπου

$$b = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b' = Pb = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Αφού $PA = LU$ έχουμε ισοδύναμα ότι $LUx = Pb (= b')$ ή ισοδύναμα

$$\mathbf{1}.\ Ly = b' \qquad \text{και} \qquad \mathbf{2}.\ Ux = y.$$

1. *Επίλυση του κάτω τριγωνικού συστήματος* $Ly = b^{'}$
(με προς τα εμπρός αντικατάσταση)

$$\begin{array}{lll} y_1 = b_1 & = 12 & \\ y_2 = b_2 - l_{12}y_1 & = 3 - 1/3 \cdot 12 & = -1 \\ y_3 = b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 & = 7 - 2/3 \cdot 12 - 1/5 \cdot (-1) & = -4/5 \end{array}$$

ή

$$y = \begin{bmatrix} 12 \\ -1 \\ -4/5 \end{bmatrix}$$

2. *Επίλυση του άνω τριγωνικού γραμμικού συστήματος* $Ux = y$
(με προς τα πίσω αντικατάσταση)

$$\begin{array}{lll} x_3 = y_3/u_{33} & = 2 & \\ x_2 = (y_2 - u_{23}x_3)/u_{22} & = (-1 - 1/3 \cdot 2)/5/3 & = -1 \\ x_1 = (y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3)/u_{11} & = (12 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2)/3 & = 3 \end{array}$$

ή

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Κεφάλαιο 3

Επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση γραμμικών συστημάτων

3.1 Στατικές και μη-στατικές επαναληπτικές μέθοδοι για την επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b}$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbf{R^{n\times n}}$, είναι μη ιδιάζων πίνακας, $\mathbf{u},\ \mathbf{b} \in \mathbf{R^n}$.

Οι επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται όταν ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι :

- **Μεγάλης τάξης ($\sim \mathbf{10^3} - \mathbf{10^6}$)**
- **Αραιός**
- **Συγκεκριμένης δομής**

Βασικές Επαναληπτικές Μέθοδοι

$$\mathbf{Au} = \mathbf{b} \qquad \longrightarrow \qquad \mathbf{u} = \mathbf{Gu} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r^{(m)}} = \mathbf{b} - \mathbf{Au^{(m)}} \quad \text{υπόλοιπο}$$

$$\mathbf{u^{(m+1)}} = \mathbf{u^{(m)}} + \tau\mathbf{R^{-1}}\mathbf{r^{(m)}}$$

όπου ο $\mathbf{R}$ λέγεται ***πίνακας προρύθμισης (preconditioning)***

$$\mathbf{u^{(m+1)}} = \underbrace{(\mathbf{I} - \tau\mathbf{R^{-1}A})}_{\mathbf{G}_\tau}\mathbf{u^{(m)}} + \underbrace{\tau\mathbf{R^{-1}b}}_{\mathbf{k}_\tau}$$

$$\mathbf{u^{(m+1)}} = \underbrace{\mathbf{G}_\tau(\mathbf{R})}_{\text{επαναλ. πίνακας}} \mathbf{u^{(m+1)}} + \mathbf{k}_\tau$$

Επιταχυντικές Επαναληπτικές μέθοδοι 1ου βαθμού

- **Στατική** επαναληπτική μέθοδος **Richardson**

$$\mathbf{u^{(m+1)}} = \mathbf{u^{(m)}} + \tau \mathbf{R^{-1}} \mathbf{r^{(m)}} \,, \qquad \mathbf{m = 0, 1, 2, \cdots}$$

- **Μη-Στατική** επαναληπτική μέθοδος **Richardson**

$$\mathbf{u^{(m+1)}} = \mathbf{u^{(m)}} + \tau_{\mathbf{m}} \mathbf{R^{-1}} \mathbf{r^{(m)}} \,, \qquad \mathbf{m = 0, 1, 2, \cdots}$$

Ο επαναληπτικός πίνακας στην $\mathbf{m}$ επανάληψη είναι ο

$$\mathbf{G}(\tau_{\mathbf{m}}) = \mathbf{I} - \tau_{\mathbf{m}} \mathbf{R^{-1}A}$$

Παρατηρήσεις

- Αν $\tau_{\mathbf{m}} = \tau \;\Rightarrow$ **στατική** ε.μ.
- Αν $\mathbf{R = I} \;\Rightarrow$ μη-προβλέψιμη(non-predictioned) ε.μ.
- Αν $\tau = \mathbf{1}, \quad \mathbf{R = D} \;\Rightarrow$ ε.μ **Jacobi**
- Αν $\tau = \mathbf{1}, \quad \mathbf{R = D - C_L} \;\Rightarrow$ ε.μ **Gauss-Seidel**

Αλγόριθμος ε.μ. Richardson

Συμβ.:

$$\mathbf{r^{(m)}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x^{(m)}} \quad \text{υπόλοιπο}$$

$$\mathbf{z^{(m)}} = \mathbf{R^{-1}} \mathbf{r^{(m)}} \quad \text{υπόλοιπο με προρύθμιση (preconditioned residual)}$$

Για την υλοποίηση της μεθόδου **Richardson** εφαρμόζεται ο ακόλουθος αλγόριθμος:

Για $\mathbf{m = 0, 1, 2, \cdots}$

1. Επίλυση του γρ. συστήματος $\qquad \mathbf{R}\,\mathbf{z^{(m)}} = \mathbf{r^{(m)}}$
2. Υπολογισμός της παραμέτρου επιτάχυνσης $\qquad \tau_{\mathbf{m}}$
3. Ενημέρωση της λύσης $\qquad \mathbf{u^{m+1)}} = \mathbf{u^{m)}} + \tau_{\mathbf{m}} \mathbf{z^{(m)}}$
4. Ενημέρωση του υπολοίπου $\qquad \mathbf{r^{m+1)}} = \mathbf{r^{m)}} - \tau_{\mathbf{m}} \mathbf{A}\mathbf{z^{(m)}}$

Μελέτη σύγλισης της ε.μ. Richardson

Θεώρημα 1 : Αν $\mathbf{R}$ είναι $\mathbf{n \times n}$ **μη ιδιάζων** πίνακας τότε

$$\text{η } \textbf{στατική ε.μ Richardson συγκλίνει} \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathbf{2Re}(\lambda_{\mathbf{i}})}{\tau |\lambda_{\mathbf{i}}|^{\mathbf{2}}} > \mathbf{1}, \quad \mathbf{i = 1, 2, \cdots, n}$$

όπου $\lambda_{\mathbf{i}} \in \mathbf{R}$ είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{R^{-1}A}$.

Θεώρημα 2 : Αν $\mathbf{R}$ είναι $\mathbf{n \times n}$ **μη ιδιάζων** πίνακας και ο $\mathbf{R^{-1}A}$ έχει **θετικές πραγματικές** ιδιοτιμές $\lambda_{\mathbf{1}} \geq \lambda_{\mathbf{2}} \geq \cdots \geq \lambda_{\mathbf{n}}$ τότε

$$\text{η } \textbf{στατική ε.μ Richardson συγκλίνει} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{0} < \tau < \mathbf{2}/\lambda_{\mathbf{1}}.$$

Επίσης η φασματική ακτίνα $\mathbf{S}(\mathbf{G}_\tau)$ ελαχιστοποιείται για

$$\tau_{\mathbf{o}} = \frac{\mathbf{2}}{\lambda_{\mathbf{1}} + \lambda_{\mathbf{n}}}$$

και η αντίστοιχη τιμή της δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{S}(\mathbf{G}_{\tau_{\mathbf{o}}}) = \frac{\lambda_{\mathbf{1}} - \lambda_{\mathbf{n}}}{\lambda_{\mathbf{1}} + \lambda_{\mathbf{n}}}$$

3.2 Ασκήσεις

Άσκηση 1

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{u} = \mathbf{k}$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & & & & \\ 0 & a & 0 & b & & \text{\Large 0} & \\ b & 0 & a & 0 & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & 0 & a & 0 & b \\ & \text{\Large 0} & & b & 0 & a & 0 \\ & & & & b & 0 & a \end{bmatrix}$$

όπου $A \in (R)^{n\times n},\ a \neq 0,\ \mathbf{u} = (u_i) \in R^n$ και $\mathbf{k} = (k_i) \in R^n$. Έστω $A = D - C_L - C_U$, όπου $D = diag(A)$, $-C_L, -C_U$ αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικά μέρη του A αντίστοιχα.

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της ε. μ.:

$$\mathbf{u}^{m+1} = [I - \tau(D - C_L)^{-1}A]\mathbf{u}^{(m)} + \tau(D - C_L)^{-1}\mathbf{k}, \quad m = 0, 1, 2\cdots, \quad \tau \in R.$$

β) Να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{u}^{(2)}$ της παραπάνω επαναληπτικής μεθόδου για τη συγκεκριμένη περίπτωση όπου: $n = 5$, $a = 2$, $b = -1$, $\mathbf{k} = (1, 1, 0, 1, 1)$, $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{k}$ και $\tau = 1$.

Λύση

α) Πολλαπλασιάζουμε από αριστερά και τα δύο μέλη του επαναληπτικού τύπου με τον πίνακα $D - C_L$, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
(D - C_L)\mathbf{u}^{(m+1)} &= (D - C_L)\mathbf{u}^{(m)} - \tau A\mathbf{u}^{(m)} + \tau\mathbf{k} \Rightarrow \\
D\mathbf{u}^{(m+1)} &= C_L\mathbf{u}^{(m+1)} + D\mathbf{u}^{(m)} - C_L\mathbf{u}^{(m)} - \tau(D - C_L - C_U)\mathbf{u}^{(m)} + \tau\mathbf{k} \Rightarrow \\
D\mathbf{u}^{(m+1)} &= C_L\mathbf{u}^{(m+1)} + (1-\tau)D\mathbf{u}^{(m)} + (\tau - 1)C_L\mathbf{u}^{(m)} + \tau C_U\mathbf{u}^{(m)} + \tau\mathbf{k} \Rightarrow \\
\mathbf{u}^{(m+1)} &= D^{(-1)}C_L\mathbf{u}^{(m+1)} + (1-\tau)\mathbf{u}^{(m)} + (\tau - 1)D^{(-1)}C_L\mathbf{u}^{(m)} \\
&+ \tau D^{(-1)}C_U\mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1}\mathbf{k} \Rightarrow \\
\mathbf{u}^{(m+1)} &= L\mathbf{u}^{(m+1)} + (1-\tau)\mathbf{u}^{(m)} + (\tau - 1)L\mathbf{u}^{(m)} + \tau U\mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1}\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της επαναληπτικής μεθόδου είναι

$$u_i^{(m+1)} = (-b/a)u_{i-2}^{(m+1)} + (1-\tau)u_i^{(m)} + (\tau - 1)(-b/a)u_{i-2}^{(m)} - \tau(-b/a)u_{i+2}^{(m)} + \tau k_i/a$$

$i = 1, 2, \cdots, n$ και $m = 0, 1, 2, \cdots$.

β) Για $n = 5,\ \ a = 2,\ \ b = -1,\ \ \mathbf{k} = (1, 1, 0, 1, 1),\ \ \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{k}$ και $\tau = 1$ οι εξισώσεις (1) γίνονται:

$$u_i^{(m+1)} = 1/2u_{i-2}^{(m+1)} + 1/2u_{i+2}^{(m)} + k_i/2 \quad i = 1, \cdots, 5 \quad \text{και} \quad m = 0, 1, 2, \cdots . \qquad (3.1)$$

Για $\mathbf{m = 0}$

$$\begin{aligned}
u_1^{(1)} &= 1/2u_3^{(0)} + k_1/2 = 1/2 \\
u_2^{(1)} &= 1/2u_4^{(0)} + k_2/2 = 1 \\
u_3^{(1)} &= 1/2u_1^{(1)} + 1/2u_5^{(0)} + k_3/2 = 3/4 \\
u_4^{(1)} &= 1/2u_2^{(1)} + k_4/2 = 1 \\
u_5^{(1)} &= 1/2u_3^{(1)} + k_5/2 = 7/8
\end{aligned}$$

Για $\mathbf{m = 1}$

$$\begin{aligned}
u_1^{(2)} &= 1/2u_3^{(1)} + k_1/2 = 7/8 \\
u_2^{(2)} &= 1/2u_4^{(1)} + k_2/2 = 1 \\
u_3^{(2)} &= 1/2u_1^{(2)} + 1/2u_5^{(1)} + k_3/2 = 7/8 \\
u_4^{(2)} &= 1/2u_2^{(2)} + k_4/2 = 1 \\
u_5^{(2)} &= 1/2u_3^{(2)} + k_5/2 = 15/16
\end{aligned}$$

Άσκηση 2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{u} = \mathbf{k}$ όπου $A \in R^{n\times n},\ a \neq 0,\ \ \mathbf{u} = (u_i) \in R^n$ και $\mathbf{k} = (k_i) \in R^n$. Έστω $A = D - C_L - C_U$, όπου $D = diag(A)$ και $-C_L, -C_U$ τα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικά μέρη του A αντίστοιχα.

α) Να δοθούν οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της επαναληπτικής μεθόδου:

$$\mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau[(D - \omega_1 C_L)D^{-1}(D - \omega_2 C_U)]^{-1}(\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

όπου $\omega_1, \omega_2, \tau \in R,\ \ \tau \neq 0$.

β) Το ίδιο όπως το (α) αν ο πίνακας A είναι της μορφής:

$$A = \begin{bmatrix}
d & e & f & & & & \\
b & d & e & f & & & 0 \\
a & b & d & e & f & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & a & b & d & e & f \\
& 0 & & a & b & d & e \\
& & & & a & b & d
\end{bmatrix}$$

γ) Να υπολογιστεί η προσεγγιστική τιμή $\mathbf{u}^{(1)}$ της παραπάνω επαναληπτικής μεθόδου για τη συγκεκριμένη περίπτωση όπου: $n = 3, \quad a = b = e = f = -1/4, \quad d = 1, \quad \mathbf{k} = (1/2, 1/2, 1/2), \quad \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{k}$ και $\tau = \omega_1 = 1, \omega_2 = 2$.

Λύση

Οι πίνακες L και U στη βασική διάσπαση $A = D(I - L - U)$ είναι οι ακόλουθοι:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & & & & \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & & & \text{\huge 0} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ -\frac{a_{n-2,1}}{a_{n-2,n-2}} & -\frac{a_{n-2,2}}{a_{n-2,n-2}} & \cdots & -\frac{a_{n-2,n-3}}{a_{n-2,n-2}} & 0 & & \\ -\frac{a_{n-1,1}}{a_{n-1,n-1}} & -\frac{a_{n-1,2}}{a_{n-1,n-1}} & \cdots & -\frac{a_{n-1,n-3}}{a_{n-1,n-1}} & -\frac{a_{n-1,n-2}}{a_{n-1,n-1}} & 0 & \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,2}}{a_{n,n}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-3}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n}} & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & -\frac{a_{14}}{a_{11}} & -\frac{a_{15}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & -\frac{a_{24}}{a_{22}} & -\frac{a_{25}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ & & 0 & -\frac{a_{34}}{a_{33}} & -\frac{a_{35}}{a_{33}} & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & -\frac{a_{n-2,n-1}}{a_{n-2,n-2}} & -\frac{a_{n-2,n}}{a_{n-2,n-2}} \\ & & \text{\huge 0} & & & 0 & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (D - \omega_1 C_L)D^{-1}(D - \omega_2 C_U) &= \\ D(I - \omega_1 D^{-1} C_L)D^{-1}D(I - \omega_2 D^{-1} C_U) &= \\ D(I - \omega_1 L)(I - \omega_2 U) & \end{aligned}$$

Επίσης ισχύει

$$[D(I - \omega_1 L)(I - \omega_2 U)]^{-1} = (I - \omega_2 U)^{-1}(I - \omega_1 L)^{-1} D^{-1}.$$

Άρα η επαναληπτική μέθοδος γίνεται

$$\begin{gathered} \mathbf{u}^{(m+1)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau(I - \omega_2 U)^{-1}(I - \omega_1 L)^{-1} D^{-1}(\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}) \Rightarrow \\ \mathbf{u}^{(m+1)} - \omega_2 U \mathbf{u}^{(m+1)} + \omega_2 U \mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau(I - \omega_1 L)^{-1} D^{-1}(\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}) \end{gathered}$$

Αν τώρα θέσουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(m+1/2)} = \mathbf{u}^{(m)} + \tau(I - \omega_1 L)^{-1} D^{-1}(\mathbf{k} - A\mathbf{u}^{(m)}) &\Rightarrow \\ (I - \omega_1 L)\mathbf{u}^{(m+1/2)} = (I - \omega_1 L)\mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1}(k - A\mathbf{u}^{(m)}) &\Rightarrow \\ \mathbf{u}^{(m+1/2)} = \omega_1 L \mathbf{u}^{(m+1/2)} + (1 - \tau)\mathbf{u}^{(m)} + (\tau - \omega_1) L \mathbf{u}^{(m)} + \tau U \mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1}\mathbf{k} & \end{aligned}$$

Άρα οδηγούμαστε στο ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα δύο επιπέδων

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(m+1/2)} = \omega_1 L \mathbf{u}^{(m+1/2)} + (1 - \tau)\mathbf{u}^{(m)} + (\tau - \omega_1) L \mathbf{u}^{(m)} + \tau U \mathbf{u}^{(m)} + \tau D^{-1} k \\ \mathbf{u}^{(m+1)} = \omega_2 U \mathbf{u}^{(m+1)} - \omega_2 U \mathbf{u}^{(m)} + \mathbf{u}^{(m+1/2)}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Σε μορφή συντεταγμένων οι παραπάνω εξισώσεις γράφονται:

$$u_i^{(m+1/2)} = \omega_1 \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m+1/2)} \right) + (1-\tau) u_i^{(m)} + (\tau - \omega_1) \left(-\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m)} \right)$$
$$+\tau \left(-\sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m)} \right) + \tau \frac{k_i}{a_{ii}}, \quad i = 1(1)n$$

και

$$u_i^{(m+1)} = \omega_2 \left(-\sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m+1)} \right) - \omega_2 \left(-\sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} u_j^{(m)} \right) + u_i^{(m+1/2)}, \quad i = n(-1)1,$$
$$m = 0, 1, 2, \cdots$$

β) Για την ειδική δομή του πίνακα A οι πίνακες L και U είναι οι ακόλουθοι:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & \\ -b/d & 0 & 0 & 0 & & & \Large 0 \\ -a/d & -b/d & 0 & 0 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a/d & -b/d & 0 & 0 & 0 \\ & \Large 0 & & -a/d & -b/d & 0 & 0 \\ & & & & -a/d & -b/d & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -e/d & -f/d & & & & \\ 0 & 0 & -e/d & -f/d & & & \Large 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e/d & -f/d & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 0 & -e/d & -f/d \\ & \Large 0 & & 0 & 0 & 0 & -e/d \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις υπό μορφή συντεταγμένων της επαναληπτικής μεθόδου είναι

Για $\mathbf{m = 0, 1, 2, \cdots}$

για $\mathbf{i = 1, 2, \cdots, n}$

$$u_i^{(m+1/2)} = \omega_1 (-\frac{a}{d} u_{i-2}^{(m+1/2)} - \frac{b}{d} u_{i-1}^{(m+1/2)}) + (1-\tau) u_i^{(m)} + (\tau - \omega_1) \left(-\frac{a}{d} u_{i-2}^{(m)} - \frac{b}{d} u_{i-1}^{(m)} \right)$$
$$+\tau \left(-\frac{e}{d} u_{i+1}^{(m)} - \frac{f}{d} u_{i+2}^{(m)} \right) + \tau \frac{k_i}{d}$$

για $\mathbf{i = n, n-1, \cdots, 1}$

$$u_i^{(m+1)} = \omega_2 \left(-\frac{e}{d} u_{i+1}^{(m+1)} - \frac{f}{d} u_{i+2}^{(m+1)} \right) - \omega_2 \left(-\frac{e}{d} u_{i+1}^{(m)} - \frac{f}{d} u_{i+2}^{(m)} \right) + u_i^{(m+1/2)}$$

Εφαρμογή: Για $\mathbf{m=0}$

<u>*Επίπεδο 1/2*</u> (προς τα εμπρός)

$\mathbf{i=1}$

$$u_1^{(1/2)} = (1-\tau)u_1^{(0)} + \tau(-\frac{e}{d}u_2^{(0)} - \frac{f}{d}u_3^{(0)}) + \tau\frac{k_1}{d},$$

$\mathbf{i=2}$

$$u_2^{(1/2)} = \omega_1(-\frac{b}{d}u_1^{(1/2)}) + (1-\tau)u_2^{(0)} + (\tau-\omega_1)(-\frac{b}{d})u_1^{(0)})$$
$$+\tau(-\frac{e}{d}u_3^{(0)} - \frac{f}{d}u_4^{(0)}) + \tau\frac{k_2}{d},$$

$\mathbf{i=3,4,\cdots,n-2}$

$$u_i^{(1/2)} = \omega_1(-\frac{a}{d}u_{i-2}^{(1/2)} - \frac{b}{d}u_{i-1}^{(1/2)}) + (1-\tau)u_i^{(0)} + (\tau-\omega_1)(-\frac{a}{d}u_{i-2}^{(0)} - \frac{b}{d}u_{i-1}^{(0)})$$
$$+\tau(-\frac{e}{d}u_{i+1}^{(0)} - \frac{f}{d}u_{i+2}^{(0)}) + \tau\frac{k_i}{d}$$

$\mathbf{i=n-1}$

$$u_{n-1}^{(1/2)} = \omega_1(-\frac{a}{d}u_{n-3}^{(1/2)} - \frac{b}{d}u_{n-2}^{(1/2)}) + (1-\tau)u_{n-1}^{(0)} + (\tau-\omega_1)(-\frac{a}{d}u_{n-3}^{(0)} - \frac{b}{d}u_{n-2}^{(0)}) + \tau\frac{k_{n-1}}{d}$$

$\mathbf{i=n}$

$$u_n^{(1/2)} = \omega_1(-\frac{a}{d}u_{n-2}^{(1/2)} - \frac{b}{d}u_{n-1}^{(1/2)}) + (1-\tau)u_n^{(0)} + (\tau-\omega_1)(-\frac{a}{d}u_{n-2}^{(0)} - \frac{b}{d}u_{n-1}^{(0)}) + \tau\frac{k_n}{d}$$

<u>*Επίπεδο 1*</u> (προς τα πίσω)

$\mathbf{i=n}$

$$u_n^{(1)} = u_n^{(1/2)}$$

$\mathbf{i=n-1}$

$$u_{n-1}^{(1)} = \omega_2(-\frac{e}{d}u_n^{(1)} + \frac{e}{d}u_n^{(0)}) + u_{n-1}^{(1/2)}$$

$\mathbf{i=n-2,n-3,\cdots,4,3}$

$$u_i^{(1)} = \omega_2(-\frac{e}{d}u_{i+1}^{(1)} - \frac{f}{d}u_{i+2}^{(1)}) - \omega_2(-\frac{e}{d}u_{i+1}^{(0)} - \frac{f}{d}u_{i+2}^{(0)}) + u_i^{(1/2)}$$

$\mathbf{i=2}$

$$u_1^{(1)} = \omega_2(-\frac{e}{d}u_3^{(1)} - \frac{f}{d}u_4^{(1)}) - \omega_2(-\frac{e}{d}u_3^{(0)} - \frac{f}{d}u_4^{(0)}) + u_2^{(1/2)}$$

$\mathbf{i=1}$

$$u_1^{(1)} = \omega_2(-\frac{e}{d}u_2^{(1)} - \frac{f}{d}u_3^{(1)}) - \omega_2(-\frac{e}{d}u_2^{(0)} - \frac{f}{d}u_3^{(0)}) + u_1^{(1/2)}$$

γ) Υπολογισμός του διανύσματος προσεγγιστικής λύσης $\mathbf{u}^{(1)}$ με αντικατάσταση στους ανωτέρω τύπους του **β)**.