

16/3/2022

Ασταθή Γραμμικά Συστήματα

$$Ax = b, A = [A : b]$$

Ευσταθές αν "μικρές" μεταβολές στον πίνακα A προκαλούν "μικρές" μεταβολές στο διάνυσμα της λύσης x

Ασταθές αν μη ευσταθές

Έστω $\delta A, \delta b, \delta x$ οι διαταράξεις των A, b, x.

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

Έστω ο μη ιδιάζων πίνακας A με ($\det A \neq 0$) με $\ A^{-1}\ \ \delta A\ < 1$				
τότε ισχύει	$\underbrace{\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }}_{\text{Απόλυτο σχετικό σφάλμα}}$	$< \frac{k}{1 - \ \delta A\ \ A^{-1}\ } \cdot \underbrace{\frac{\ \delta A\ }{\ A\ }}_{\text{Σχετική μεταβολή A}} + \underbrace{\frac{\ \delta b\ }{\ b\ }}_{\text{Σχετική μεταβολή b}}, k = \underbrace{\text{cond}(A)}_{\text{Αριθμός συνθήκης ή δείκτης κατάστασης}} = \ A\ \ A^{-1}\ $		

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \Leftrightarrow 1 \leq \text{cond}(A)$$

Αριθμός συνθήκης και ακρίβεια λύσης

$$\text{cond}(A) := \text{cond}_2(A) \quad (\text{δηλ. } \text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2)$$

$$\text{cond}_p(A), p = 1, 2, \dots, \infty$$

Ιδιότητες του cond(A)
1. $\text{cond}(A) \geq 1$
2. Αν A ορθογώνιος ^(ερμιτιανός) $\Rightarrow \text{cond}_2 A = 1$ (Αν A ορθογώνιος $\Leftrightarrow AA^T$ (ή $A^H A$) = I)
3. $\text{cond}(A^T A) = (\text{cond}(A))^2$
4. $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^T)$
5. $\text{cond}(AB) \leq \text{cond}(A)\text{cond}(B)$
6. $\text{cond}(aA) = \text{cond}(A), a \neq 0$
7. $\text{cond}(A) \geq \frac{ \lambda_1 }{ \lambda_n }$, όπου $ \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n $, με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές
8. $\text{cond}_2 A = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$, όπου $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n$, με $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ ιδιάζουσες τιμές ($A\lambda = \lambda x$)
9. Αν A πραγματικός και συμμετρικός τότε $\text{cond}(A) = \frac{ \lambda_1 }{ \lambda_n }$

Παρατηρήσεις (conditioning σε σχέση με διάφορες <i>norms</i>) : Αν A $n \times n$ πίνακας $\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{\text{cond}_2(A)}{\text{cond}_\infty(A)} \leq n$ –Γενικά αν ένας πίνακας είναι well conditioned ή ill conditioned σχετικά με μια <i>norm</i>, τότε θα είναι το ίδιο σχετικά και με κάποιες άλλες <i>norms</i>.
--

Ill conditioned πίνακες:

π.χ.

1) Πίνακας του Hilbert

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

Για $n=10$ έχουμε

$$\begin{aligned} \text{cond}_2(A) &= 1.0625 \cdot 10^{13} \\ \text{cond}_\infty(A) &= 3.5353 \cdot 10^{13} \\ \text{cond}_1(A) &= 3.5353 \cdot 10^{13} \end{aligned}$$

2) Πίνακας του Pie

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{cases} \alpha, i = j \\ 1, i \neq j \end{cases}$$

είναι ill conditioned για α "πολύ κοντά" στο 1 ή στο $n-1$, π.χ.

για $\alpha=0.9999$ και $n=5 \Rightarrow \text{cond}(A)=5 \cdot 10^4$

3) Πίνακας διδιαγώνιος του Wilkinson (π.χ. $n=20$)

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 20 & & 0 \\ & 19 & 20 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 19 & 20 \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ιδιοτιμές } 1, 2, 3, \dots, 20)$$

Επίδραση του αριθμού συνθήκης στην ακρίβεια της υπολογιζόμενης λύσης

Έστω $\hat{x}$ η υπολογισθείσα λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$.

–Αν η ακριβής λύση x είναι γνωστή τότε υπολογίζουμε:

το απόλυτο σχετικό σφάλμα $\frac{\|x - \hat{x}\|}{\|x\|}$

–Αν η ακριβής λύση x δεν είναι γνωστή τότε υπολογίζουμε το υπόλοιπο $r=b-A\hat{x}$

και παρατηρούμε πόσο μικρό είναι το σχετικό υπόλοιπο $\frac{\|r\|}{\|b\|}$

Παρατήρηση: Η λύση x που προκύπτει από τη μέθοδο GE γενικά παράγει μικρό υπόλοιπο.

Όμως ένα μικρό σχετικό υπόλοιπο δεν εγγυάται την ακρίβεια της λύσης.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1.0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ακριβής λύση}$$

Έστω $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, τότε $r = b - A\hat{x} = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{bmatrix}$, "μικρό"

Θεώρημα: $\frac{\|\hat{x} - x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$ Το σχετικό σφάλμα της λύσης $\hat{x}$

εξαρτάται όχι μόνο από το σχετικό υπόλοιπο αλλά και από τον αριθμό συνθήκης $\text{cond}(A)$.

Στο παράδειγμα $\text{cond}(A) = 4.0002 \cdot 10^4$, "μεγάλο"

Μέγεθος του αριθμού συνθήκης ώστε ο πίνακας A να είναι ill conditioned:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right) \quad \text{ισοδύναμο με τον ορισμό που δόθηκε πριν}$$

$$\varphi(k) = \frac{k}{1-k}, \varphi'(k) \geq 0, \text{ άρα } \varphi(k) \uparrow$$

Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 10^{-d} \text{ και } \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \ll 1$$

$$\text{Τότε } \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 2\text{cond}(A) \cdot 10^{-d} \Leftrightarrow \text{cond}(A) \leq \frac{1}{2} \frac{10^{-t}}{10^{-d}}$$

Άρα αν τα δεδομένα έχουν ένα σχετικό σφάλμα 10^{-d} και το σχετικό σφάλμα λύσης

για να εγγυάται τη λύση πρέπει να είναι $\leq 10^{-t}$, τότε το $\text{cond}(A)$ είναι $\leq \frac{1}{2} 10^{d-t}$

π.χ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{σχετικό σφάλμα δεδομένων} = 10^{-5} \\ \text{Απαιτούμενη ακρίβεια} = 10^{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{cond}(A) \leq \frac{1}{2} 10^{5-3} = 50$$

$$\text{Αν απαιτούμενη ακρίβεια} = 10^{-2} \Rightarrow \text{cond}(A) \leq \frac{1}{2} 10^{5-2} = 500$$

Εκτίμηση της ακρίβειας λύσης από τον αριθμό συνθήκης:

Αν τα δεδομένα είναι προσεγγιστικά ακριβή και αν $\text{cond}(A) = 10^s$ τότε με ακρίβεια t σημαντικών ψηφίων η υπολογιζόμενη λύση $\hat{x}$ θα έχει ακρίβεια περίπου $t - s$ σημαντικά ψηφία

Conditioning και οδήγηση

Συμπτώματα για ill conditioning:

1. Ένα "μικρό" οδηγό στοιχείο
2. Μια μεγάλη υπολογισθείσα λύση
3. Ένα μεγάλο διάνυσμα υπόλοιπο r

Υπάρχουν πίνακες που δεν παρουσιάζουν κανένα από τα παραπάνω συμπτώματα, αλλά είναι ill conditioned. (π.χ. Wilkinson)

Επαναληπτικές μέθοδοι

$$Ax = b \rightarrow x = Gx + k$$

$$Ax = b \Leftrightarrow (\text{ ή } x = A^{-1}b)$$

$$R^{-1}Ax = R^{-1}b$$

$$x = x + \tau R^{-1}(b - Ax) \rightarrow x^{(m+1)} = x^{(m)} + \tau R^{-1}(b - Ax^{(m)}) \rightarrow$$

Στατική επιταχυντική επαναληπτική μέθοδος 1ου βαθμού

$$x^{(m+1)} = \underbrace{(I - \tau R^{-1}A)}_{G_\tau} x^{(m)} + \underbrace{\tau R^{-1}b}_{k_\tau}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Στατική αν το τ είναι σταθερό σε κάθε επανάληψη.

Αν $\tau = \tau(m)$ η μέθοδος είναι μη στατική

Συνθήκη σύγκλισης: $\rho(G) < 1$

Ο πίνακας R ονομάζεται preconditioned (πίνακας προρύθμισης)