

μέχρι και την **Τετάρτη 9.4.2025** και ώρα **23:59**

Προσοχή : Η άσκηση είναι **ατομική** (δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).

1η ΑΣΚΗΣΗ

ΑΜΕΣΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. Μέθοδος Παραγοντοποίησης(ή Τριγωνικής Διαχώρισης) LU

- με μερική οδήγηση (χωρίς φυσική αντιμετάθεση)

2. Μέθοδος Παραγοντοποίησης(ή Τριγωνικής Διαχώρισης) Cholesky LL^T

Να υλοποιηθούν σε γλώσσα προγραμματισμού **C** (ή και) σε MatLab οι αλγόριθμοι των ανωτέρω μεθόδων για

- α) την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$ και
- β) τον υπολογισμό του αντιστρόφου A^{-1} του πίνακα A .

Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις να χρησιμοποιήσετε αριθμητική διπλής ακρίβειας (double precision). Τα προγράμματά σας πρέπει να δίνουν στο χρήστη τις ακόλουθες δυνατότητες επιλογής :

- (i) να εισάγει τα απαραίτητα δεδομένα,
- (ii) να δημιουργεί ένα συγκεκριμένο ή τυχαίο πίνακα και
- (iii) να εισάγει ένα πίνακα από αρχείο.

Να υπολογίσετε πειραματικά την υπολογιστική πολυπλοκότητα με τον υπολογισμό του *χρόνου εκτέλεσης (cputime)* του εφαρμοζόμενου αλγορίθμου καθώς και να εκτιμήσετε τον *αριθμό συνθήκης(condition number)* του πίνακα A και το *σφάλμα*

- α) της λύσης x του γραμμικού συστήματος με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

(i) $\frac{\|\delta x\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}$, όπου $\delta x = x - \hat{x}$ το *σφάλμα*

(ii) $\frac{\|r\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$, όπου $r = b - A\hat{x}$ το *υπόλοιπο*

και $\hat{x}$: η υπολογιζόμενη λύση από τον εφαρμοζόμενο αλγόριθμο,

- β) του αντιστρόφου A^{-1} με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

(i) $\|A^{-1} - \hat{A}^{-1}\|_{\infty} / \|A^{-1}\|_{\infty}$, το *απόλυτο σχετικό σφάλμα*

(ii) $\|A\hat{A}^{-1} - I\|_{\infty} / \|A^{-1}\|_{\infty}$, το *απόλυτο σχετικό υπόλοιπο*

και $\hat{A}^{-1}$: ο υπολογιζόμενος αντίστροφος από τον εφαρμοζόμενο αλγόριθμο.

Στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη πινακοποίηση (βλ. παρακάτω πίνακες 1 και 2) των αποτελεσμάτων σας και να σχολιάσετε τα συμπεράσματά σας.

1. Μέθοδος Παραγοντοποίησης LU με μερική οδήγηση

1.α Επίλυση του Γραμμικού Συστήματος $Ax = b$				
Διάσταση Πίνακα A	Απ. σχ. Σφάλμα $\frac{\ \delta x\ _\infty}{\ x\ _\infty}$	Απ. σχ. Υπόλοιπο $\frac{\ r\ _\infty}{\ b\ _\infty}$	Αριθμός Συνθήκης ¹ $cond(A)$	Χρόνος
100				
500				
1000				

1.β Υπολογισμός του αντιστρόφου A^{-1}				
Διάσταση Πίνακα A	Απ. σχ. Σφάλμα $\ A^{-1} - \hat{A}^{-1}\ _\infty / \ A^{-1}\ _\infty$	Απ. σχ. Υπόλοιπο $\ A\hat{A}^{-1} - I\ _\infty / \ A^{-1}\ _\infty$	Αριθμός Συνθήκης	Χρόνος
100				
500				
1000				

2. Μέθοδος Παραγοντοποίησης Cholesky LL^T

2.α Επίλυση του Γραμμικού Συστήματος $Ax = b$				
Διάσταση Πίνακα A	Απ. σχ. Σφάλμα $\frac{\ \delta x\ _\infty}{\ x\ _\infty}$	Απ. σχ. Υπόλοιπο $\frac{\ r\ _\infty}{\ b\ _\infty}$	Αριθμός Συνθήκης $cond(A)$	Χρόνος
100				
500				
1000				

2.β Υπολογισμός του αντιστρόφου A^{-1}				
Διάσταση Πίνακα A	Απ. σχ. Σφάλμα $\ A^{-1} - \hat{A}^{-1}\ _\infty / \ A^{-1}\ _\infty$	Απ. σχ. Υπόλοιπο $\ A\hat{A}^{-1} - I\ _\infty / \ A^{-1}\ _\infty$	Αριθμός Συνθήκης	Χρόνος
100				
500				
1000				

Υπόδειξη : Για την πειραματική επαλήθευση της ορθότητας των αλγορίθμων σας **1. LU** και **2. LL^T**

α) για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$ θεωρήστε ότι το διάνυσμα x είναι γνωστό (ως προσχεδιασμένη λύση), υπολογίστε το $b = Ax$ και στη συνέχεια επιλύστε το γραμμικό σύστημα. (Για παράδειγμα, αν $x = (1, 1, \dots, 1)^T$, τότε $b_i = (A * x)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$) και

β) για τον υπολογισμό του αντιστρόφου A^{-1} του πίνακα A λάβετε παραδείγματα πινάκων, στα οποία εκ των προτέρων γνωρίζετε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1} .

Ορισμός

^[1] **Αριθμός συνθήκης**(condition number) του A : $cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

(Ενδεικτικές) Εφαρμογές

1. Μέθοδος Παραγοντοποίησης(ή Τριγωνικής Διαχώρισης) LU με μερική οδήγηση (χωρίς φυσική αντιμετάθεση)

α) Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$

Εφαρμογή 1.a.1 : $n = 5$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 11 \\ 18 \\ 26 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 1.a.2 : $n = 8$, $A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & 3 & 10 & -3 & 3 & 3 & -4 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 3 & -12 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -15 & -1 & 1 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 12 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 3 & -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 25 \\ 75 \\ 37 \\ 46 \\ 5 \\ 93 \\ -16 \\ 41 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 1.a.3 : Ο πίνακας A είναι ο 10×10 πίνακας του Hilbert με στοιχεία

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 10$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $x = (1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, -2)^T$, υπολογίστε το $b = Ax$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$.

Εφαρμογή 1.a.4 : Ο πίνακας A είναι $n \times n$, όπου $n = 100, 500, 1000$ με στοιχεία

$$a_{ij} = \begin{cases} n, & \text{αν } i = j \\ \frac{1}{i+j-1}, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $x = (1, 1, \dots, 1, 1)^T$, υπολογίστε το $b = Ax$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$.

Εφαρμογή 1.a.5 : Δημιουργία ενός τυχαίου $n \times n$ πίνακα A , όπου $n = 100, 500, 1000$ με τη βοήθεια της συνάρτησης `rand()`. (Υπόδειξη: Ορίστε στην MatLab τον πίνακα $A = \text{rand}(n, n) + (n-1) * \text{eye}(n)$). Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $x = (1, 1, \dots, 1, 1)^T$, υπολογίστε το $b = Ax$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$.

β) Υπολογισμός του αντιστρόφου A^{-1}

Εφαρμογή 1.6.1: $n = 4$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 1.6.2: Ο A είναι ο $n \times n$ πίνακας του Pει, όπου $n = 100, 500, 1000$, με στοιχεία

$$a_{ij} = \begin{cases} n, & \text{αν } i = j \\ 1, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

και ο αντίστροφός του A^{-1} έχει στοιχεία

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{2n-1}, & \text{αν } i = j \\ -\frac{1}{(n-1)(2n-1)}, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Εφαρμογή 1.6.3: Ο A είναι ο $n \times n$ πίνακας του Hilbert, όπου $n = 10, 50, 100$, με στοιχεία

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

και ο αντίστροφός του A^{-1} έχει στοιχεία

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}(n+i-1)!(n+j-1)!}{(i+j-1)[(i-1)!(j-1)!]^2(n-i)!(n-j)!}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Εφαρμογή 1.6.4: Δημιουργία ενός τυχαίου $n \times n$ πίνακα A , όπου $n = 100, 500, 1000$ με τη βοήθεια της συνάρτησης `rand()` (όπως στην εφαρμογή 1.α.5). Για την πειραματική επαλήθευση υπολογίστε τον αντίστροφο $B = \hat{A}^{-1}$ και στη συνέχεια υπολογίστε τον AB .

2. Μέθοδος Παραγοντοποίησης(ή Τριγωνικής Διαχώρισης) Cholesky LL^T

α) Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$

Εφαρμογή 2.α.1: $n = 4$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 2.α.2: $n = 5$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$,

όπου ο A είναι ο 5×5 πίνακας του Moler.

Εφαρμογή 2.a.3 : $n = 5$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 35 \\ 70 \\ 126 \end{bmatrix}$,

όπου ο $\mathbf{A}$ είναι ο 5×5 πίνακας του Pascal.

Εφαρμογή 2.a.4 : $n = 8$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 36 \\ 120 \\ 330 \\ 792 \\ 1716 \\ 3432 \\ 6435 \end{bmatrix}$,

όπου ο $\mathbf{A}$ είναι ο 8×8 πίνακας του Pascal.

Εφαρμογή 2.a.5 : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας του Pascal, όπου $n = 100, 500, 1000$, με στοιχεία

$$a_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1, 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Εφαρμογή 2.a.6 : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι $n \times n$, όπου $n = 100, 500, 1000$ με στοιχεία

$$a_{ij} = \begin{cases} n, & \text{αν } i = j \\ \frac{1}{i+j-1}, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1, 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Εφαρμογή 2.a.7 : Δημιουργία ενός τυχαίου συμμετρικού και θετικά ορισμένου $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$, όπου $n = 100, 500, 1000$ με τη βοήθεια της συνάρτησης `rand()`. (Υπόδειξη: Ορίστε στην MatLab τον πίνακα $\mathbf{A} = \text{gallery}('moler', n, \text{rand})$). Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1, 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

β) Υπολογισμός του αντιστρόφου $\mathbf{A}^{-1}$

Εφαρμογές : 1.6.1, 1.6.2, 1.6.3, 2.a.4, 2.a.5, 2.a.6, 2.a.7.

Οδηγίες για την παράδοση της 1ης ΑΣΚΗΣΗΣ

Σημείωση : Όλες οι υλοποιήσεις των ασκήσεων να γίνουν σε C (ή C++) (ή και) σε MatLab.

Προσοχή : Η άσκηση είναι **ατομική** (δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του και να παρουσιάσει στην παρούσα εργασία την προσωπική του προσπάθεια).

Καταληκτική ημερομηνία υποβολής:

Ο κάθε φοιτητής θα πρέπει εμπρόθεσμα να υποβάλει ηλεκτρονικά την **1η ΑΣΚΗΣΗ** στην e_class του μαθήματος μέχρι και την **Τετάρτη 9.4.2025 και ώρα 23:59**.

Η **1η ΑΣΚΗΣΗ** πρέπει να περιλαμβάνει:

1. ένα αρχείο για τη κάθε μέθοδο με όνομα **ask1_method.i**, (όπου method το όνομα της μεθόδου και όπου *i* η ένδειξη του αντιστοίχου ερωτήματος, δηλ. 1.α, 1.β, 2.α, 2.β, (π.χ. ask1_LU_1_β), που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο κώδικα για κάθε ερώτημα και
2. ένα μόνο αρχείο κειμένου(για όλα τα ερωτήματα) με όνομα **ask1_Αποτελέσματα_xxxxxxx** (.tex σε latex ή .docx σε word ή σε χειρόγραφο ή και σε pdf) για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, των σχολίων και των συμπερασμάτων σας.

Για την υποβολή στην **e_class** πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο με winzip) με όνομα **ASK1_Ονοματεπώνυμο_ xxxxxxx.zip**, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχονται τα αρχεία με τον **πηγαίο(source) κώδικα** (και όχι εκτελέσιμα αρχεία) και το **αρχείο κειμένου** με την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Προσοχή: Είναι απαραίτητο στην αρχή του κάθε αρχείου (**κώδικα** και **κειμένου**) να αναγράφετε το ονοματεπώνυμό σας και τον ΑΜ.