Θέματα Τηλεπικοινωνιών

Θέμα 1

Δίνεται ένα ραδιοκανάλι AWGN περιορισμένου εύρους ζώνης $W = 4KHz$ με $S/N_o = 53dB - Hz$. Αν πρόκειται να μεταβιβάσουμε πληροφορία με ρυθμό $R_b = 9,6Kbps$ και πιθανότητα σφάλματος bit, $P_e = 10^{-5}$, να επιλέξετε το σχήμα διαμόρφωσης που θα χρησιμοποιηθεί. Τι θα κάνουμε σε περίπτωση που δεν υπάρχει σχήμα διαμόρφωσης που να ικανοποιεί τα κριτήρια λειτουργίας;

Λύση

Για οποιοδήποτε ψηφιακό σύστημα μετάδοσης ισχύει:

$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N_o}} = \frac{\mathrm{E_b \cdot R_b}}{\mathrm{N_o}}$ με N_o τη πυκνότητα ισχύος θορύβου σε $\left[\mathrm{W}/_{\mathrm{Hz}}\right]$ ⇒

$$\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N_o}}\right)_{\mathrm{dB-Hz}} = \left(\frac{\mathrm{E_b}}{\mathrm{N_o}}\right)_{\mathrm{dB}} + (10\log \mathrm{R_b})_{\mathrm{dB-bps}} \qquad (1)$$

Συνεπώς για το δεδομένο ρυθμό R_b, η διαθέσιμη ισχύς, δηλαδή ο λόγος E_b/N_o προκύπτει από την (1): $\left(\frac{\mathrm{E_b}}{\mathrm{N_o}}\right)_{\mathrm{dB}} = \left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N_o}}\right)_{\mathrm{dB-Hz}} - (10\log \mathrm{R_b})_{\mathrm{dB-Hz}}$ ⇒

$$\left.\frac{\mathrm{E_b}}{\mathrm{N_o}}\right|_{\mathrm{dB}} = 53 - 10\log 9600 \Rightarrow \frac{\mathrm{E_b}}{\mathrm{N_o}} = 13{,}2\mathrm{dB}\ (\approx 21)$$

Αφού $\mathrm{R_b} > W$ πρέπει να επιλεχθεί ένα σχήμα διαμόρφωσης μιαδικό που να έχει μεγάλη φασματική απόδοση. Από το σχήμα, όπου φαίνονται οι επιδόσεις των ψηφιακών διαμορφώσεων συμπεραίνουμε ότι το πλέον κατάλληλο είναι ένα σχήμα διαμόρφωσης PSK (ASK – QAM απορρίπτονται αφού έχουμε ραδιοκανάλι που έχει μεγάλη επίδραση στο πλάτος του σήματος). Συνεπώς, επιλέγεται διαμόρφωση MPSK με το μικρότερο M ώστε να μην ξεπερνιέται η διαθέσιμη ισχύς.

$$\mathrm{R_s} = \frac{\mathrm{R_b}}{\log_2 \mathrm{M}} = \mathrm{W} = 4\mathrm{KHz} \Rightarrow \mathrm{M} = 8 \quad \left(\frac{\mathrm{E_b}}{\mathrm{N_o}} < 13{,}2dB\right)$$

Η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι:

$\mathrm{P_{es}}(\mathrm{M} = 8) = 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2\mathrm{E_s}}{\mathrm{N_O}}}\sin\left(\frac{\Pi}{\mathrm{M}}\right)\right)$ (1) με P_{es} τη πιθανότητα σφάλματος συμβόλου και E_s την ενέργεια ανά σύμβολο

Επιπλέον, $\frac{\mathrm{E_s}}{\mathrm{N_o}} = \log_2 \mathrm{M} \frac{\mathrm{E_b}}{\mathrm{N_o}}$ (2)

Από (1), (2) $\mathrm{P_{es}} = 22 \cdot 10^{-5}$. Η πιθανότητα σφάλματος ανά bit θα είναι $\mathrm{P_e} = \frac{\mathrm{P_{es}}}{\log_2 \mathrm{M}} \approx 7{,}5 \cdot 10^{-6}$

<u>Θέμα 2</u>

Θεωρήστε ότι έχουμε τα ίδια δεδομένα όπως στο πρόβλημα , αλλά με $\boldsymbol{W = 45KHz}$ και $\boldsymbol{S/N_o = 48dB - Hz}$. Ποιό σχήμα διαμόρφωσης θα επιλέγατε;

<u>Λύση</u>

Αφού $W > R_b$, το σύστημα μας μάλλον έχει πρόβλημα ισχύος. Πράγματι από το δεδομένο $\mathrm{S}/\mathrm{N_o}$ και τη σχέση (1) του προηγούμενου προβλήματος, υπολογίζουμε ότι: $\frac{E_b}{N_o} = 48(dB - Hz) - (10 \log 9600)|_{dB-bps} \Rightarrow \frac{E_b}{N_o} = 8{,}2dB$ (6,6)

Από τα διαγράμματα (παρουσίαση VI, σελίδα 4) βλέπουμε ότι το δεδομένο $\mathrm{E_b}/\mathrm{N_o}$ είναι μικρό για να πετύχουμε $\mathrm{P_e} = 10^{-5}$ χρησιμοποιώντας είτε απλό PSK είτε FSK. Συνεπώς για να κάνουμε οικονομία στην ισχύ, επιλέγουμε σχήμα MFSK . Πρέπει $\mathrm{W} = 45\mathrm{KHz} < M \frac{\mathrm{R_b}}{\log_2 \mathrm{M}}$ (βλέπε notes) ⇒

$\mathrm{M} = 16$ (για $\mathrm{M} = 32$ υπερβαίνουμε το διαθέσιμο εύρος ζώνης). Σημειώνω ότι για MFSK η πιθανότητα σφάλματος συμβόλου είναι:

$$\mathrm{P_{es}}(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M} - 1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{E_s}}{2\mathrm{N_o}}}$$

Με $\frac{\mathrm{E_s}}{\mathrm{N_o}} = \log_2 \mathrm{M} \frac{\mathrm{E_b}}{\mathrm{N_o}} \Rightarrow \frac{\mathrm{E_s}}{\mathrm{N_o}} = (4 \cdot 6{,}5) = 26.$

Η πιθανότητα σφάλματος ανά bit θα είναι:

$\mathrm{P_e} = \frac{2^{\mathrm{m}-1}}{2^{\mathrm{m}}-1} \mathrm{P_{es}} \Rightarrow \mathrm{P_e} \approx 7{,}5 \cdot 10^{-6}$, όπως προκύπτει και από το διάγραμμα.

Θέμα 3

Έστω ότι ισχύουν τα δεδομένα του προβλήματος 1. ($W = 4KHz$, $S/N_o = 53dB - Hz$, $R_b = 9600bps$ με τη διαφορά ότι θέλουμε $P_e = 10^{-9}$). Τι τύπο διαμόρφωσης θα χρησιμοποιήσουμε;

Λύση

Από το σχήμα της διαφάνειας 5 της παρουσίασης VI, βλέπουμε ότι απαιτείται μεγαλύτερος λόγος E_b/N_o για να μειωθεί το P_e (μάλιστα αυξημένος κατά 30% περίπου). Συνεπώς έχουμε πρόβλημα και στο εύρος ζώνης αλλά και στη διαθέσιμη ισχύ, η οποία όπως υπολογίσαμε στο πρόβλημα 1 είναι

$\frac{E_b}{N_o} = 13{,}2\text{dB}$ για 8PSK σύστημα το οποίο και ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας ως προς το εύρος ζώνης αλλά δίνει $P_e = 10^{-5}$. Για να πιάσουμε $P_e = 10^{-9}$, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κωδικοποίηση καναλιού η οποία ισοδυναμεί με αύξηση της ισχύος με αντιστάθμισμα μια αύξηση στο χρησιμοποιούμενο εύρος ζώνης. Υπενθυμίζω ότι: κώδικας (n, m) με m bits πληροφορίας → n bit κωδική λέξη. Ο ρυθμός κώδικα R_C θα είναι ίσος με: $R_C = \frac{n}{m} R_b$ και $R_S = \frac{R_C}{\log_2 M}$

Το κέρδος κωδικοποίησης CG θα είναι ίσο με: $CG = \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_{\text{uncoded}} - \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_{\text{coded}}$

Ισχύει για τους κώδικες που χρησιμοποιούμε συνήθως (block, συνελικτικούς):

$CG = d_{min} \cdot R_{ce}$, $R_{ce} = \frac{m}{n} = \frac{1}{R_c}$

$\frac{d_{min}-1}{2} = t$ λάθη που διορθώνει ο κώδικας και $[d_{min} - 1]$ λάθη που ανιχνεύει ο κώδικας. Στο πρόβλημα μας πρέπει να διαλέξουμε τον βέλτιστο κώδικα ώστε να μην υπερβούμε το διαθέσιμο W και ταυτόχρονα να πετύχουμε το απαραίτητο CG ώστε να έχουμε το επιθυμητό P_e. Έστω ότι υπάρχει κώδικας (k, m) που διορθώνει t σφάλματα. Τότε: για $k \geq 3$ οι κώδικες που προκύπτουν έχουν $n = 2^k - 1$, $m = 2^k - t(k-1)$. Με τη βοήθεια ενός φύλλου XL μπορούμε να βρούμε ότι ο συνδυασμός (n, k) για τον οποίο: $\frac{n}{m} \approx 1{,}25 = \frac{4000}{3200}$

n	m	t	CG
31	26	1	2,0
63	57 51	1 2	2,2 3,1
127	120 113 106	1 2 3	2,2 3,3 3,9

Επιλέγουμε τον κώδικα (63, 51) γιατί μας δίνει αρκετά μεγάλο CG και είναι σχετικά απλός. Επειδή $P_e = \frac{P_{es}}{\log_2 M} = \frac{2Q\left[\sqrt{\frac{2E_S}{N_o}}\sin\frac{\Pi}{M}\right]}{\log_2 M} = 10^{-9}$ με M=8 $\Rightarrow$ $\left(\frac{E_s}{N_o}\right)_{uncoded} = 120{,}7 \Rightarrow \left(\frac{E_b}{N_o}\right)_{uncoded} = \frac{120{,}7}{\log_2 8} = 40{,}2 \Rightarrow$

$\left({E_b}/{N_o}\right)_{uncoded} = 16dB$. Εμείς διαθέτουμε 13,2dB, άρα η επιλογή του κώδικα (63, 51) είναι βέλτιστη αφού θα δίνει $P_e < 10^{-9}$.

$$\left[\text{Ισχύει γενικά: } \frac{S}{N_o} = \frac{E_b}{N_o}R_b = \frac{E_c}{N_o}R_c = \frac{E_s}{N_o}R_s\right]$$