
Πιθανοτικοί Αλγόριθμοι
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τελικό Διαγώνισμα
Παράδοση: Δευτέρα 3 Ιουλίου, 2006

Το διαγώνισμα αυτό είναι **μόνο** για αυτούς που συμμετείχαν στις παραδόσεις του μαθήματος. Αν για παράδειγμα, δεν έχετε παραδώσει την πρώτη άσκηση δεν μπορείτε να δώσετε αυτό το διαγώνισμα.

Παράδοση στη γραμματεία Θεωρητικής Πληροφορικής, μέχρι **2μμ**, χειρόγραφη ή τυπωμένη. Ηλεκτρονική παράδοση επιτρέπεται μόνο για σημαντικούς λόγους, αλλά σε αυτή την περίπτωση να φροντίσετε να παραδώσετε αργότερα και ένα τυπωμένο αντίγραφο.

Λύστε όλες τις ασκήσεις. Οι απαντήσεις να είναι σύντομες και περιεκτικές.

Άσκηση 1. Ο αργυροτσικνιάς του Νέστου είναι είδος που κινδυνεύει με εξαφάνιση. Είσατε μέλος μιας ομάδας επιστημόνων που προσπαθεί να προσδιορίσει τον αριθμό των πουλιών. Για το σκοπό αυτό, επαναλαμβάνετε το εξής πείραμα: πιάνετε ένα αργυροτσικνιά, τον σημαδεύετε (αν δεν είναι ήδη σημαδεμένος), και μετά τον αφήνετε ελεύθερο. Αν ξαναπιάσετε το ίδιο πουλί μπορείτε να διαπιστώσετε αν έχει σημαδευτεί ήδη ή όχι.

1. Κάποια φορά θα πιάσετε κάποιον αργυροτσικνιά που είναι ήδη σημαδεμένος. Έστω ότι η πρώτη φορά που συμβαίνει αυτό είναι όταν πιάσετε το m -στό πουλί. Ποιός είναι (περίπου) ο αναμενόμενος αριθμός των πουλιών; Η απάντησή σας μπορεί να είναι είτε σε Θ συμβολισμό, είτε καλύτερα της μορφής 'περίπου $10m^7$ '.
2. Περιγράψτε μια διαδικασία που για δεδομένα ϵ και δ , υπολογίζει τον αριθμό των πουλιών με λάθος $\pm\epsilon$ και πιθανότητα $1 - \delta$ (όπως στον ορισμό του FPRAS).

Άσκηση 2. Θεωρείστε ένα Boolean δένδρο του οποίου κάθε κόμβος εκτός των φύλλων έχει 3 παιδιά. Όλα τα φύλλα βρίσκονται στο ίδιο βάθος k και υπάρχουν $n = 3^k$ φύλλα. Κάθε εσωτερικός κόμβος είναι μια majority gate και υπολογίζει την τιμή που πλειοψηφεί στα 3 παιδιά του. Η είσοδος είναι οι λογικές τιμές στα φύλλα του δένδρου και η έξοδος είναι η τιμή της ρίζας του δένδρου.

Θεωρείστε τον εξής αναδρομικό αλγόριθμο για να υπολογίσουμε την έξοδο χωρίς ίσως να χρειαστεί να διαβάσουμε όλες τις τιμές της εισόδου: Υπολόγισε (αναδρομικά) τις τιμές δυό τυχαίων παιδιών της ρίζας. Αν συμφωνούν οι τιμές, επέστρεψε την κοινή τιμή. Διαφορετικά υπολόγισε το τρίτο παιδί και επέστρεψε την τιμή του. Δείξτε πως ο αναμενόμενος αριθμός φύλλων που διαβάζει ο αλγόριθμος είναι το πολύ $n^{0.9}$.

Άσκηση 3. Έστω ότι έχουμε τυχαία και ανεξάρτητα τυχαία bits (με πιθανότητα $1/2 - 1/2$). Δείξτε πως μπορούμε να παράγουμε αποτελεσματικά, δηλαδή

σχετικά γρήγορα και χρησιμοποιώντας λίγα τυχαία bits, ένα τυχαίο συνεκτικό labeled γράφο με n κόμβους. Δηλαδή ένα τυχαίο στοιχείο του σύνολου $\{G : G \text{ είναι συνεκτικός και έχει σύνολο κόμβων } V = \{1, 2, \dots, n\}\}$. Αναλύστε το χρόνο και τον αριθμό των τυχαίων bits που χρησιμοποιεί ο αλγόριθμός σας.

Άσκηση 4. Θεωρείστε τον τυχαίο περίπατο στο δισδιάστατο πλέγμα $n \times n$, δηλαδή στο γράφο με κόμβους (x, y) , $x, y \in \{1, 2, \dots, n\}$ και ακμές που ενώνουν το (x, y) με το $(x+1, y)$ ή το $(x, y+1)$. Ο τυχαίος περίπατος είναι ο γνωστός περίπατος που με πιθανότητα $1/2$ παραμένει στον ίδιο κόμβο και με την υπόλοιπη πιθανότητα πηγαίνει σε ένα τυχαίο (ισοπίθανο) γειτονικό κόμβο.

Ο τυχαίος αυτός περίπατος είναι το δισδιάστατο ανάλογο του περιπάτου στη γραμμή $\{1, 2, \dots, n\}$. Θεωρείστε γνωστό ότι για τον μονοδιάστατο περίπατο απαιτούνται $O(n^2)$ βήματα για να επισκεφτεί όλους τους κόμβους.

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τον μονοδιάστατο περίπατο, δείξτε ότι ανεξάρτητα από την αρχική θέση, ο περίπατος θα επισκεφτεί κάποιο κόμβο στην περιφέρεια του πλέγματος σε $O(n^2)$ βήματα.

Επίσης βρείτε ένα καλό πάνω φράγμα του αναμενόμενου χρόνου που χρειάζεται ώστε να επισκεφτεί όλους τους κόμβους τουλάχιστον μια φορά (cover time).

Καλή επιτυχία!