National and Kapodistrian
UNIVERSITY OF ATHENS

Τεχνικές Ανάλυσης και Πρόβλεψης Τηλεπικοινωνιακών Αγορών

Κινητοί Μέσοι & Εξομάλυνση

π

Πρόβλεψη Χρονοσειράς

- Υπάρχουν διάφοροι τύποι κινήτρων και ανάλυσης δεδομένων για χρονολογικές σειρές που είναι κατάλληλες για διαφορετικούς σκοπούς.
- Στο πλαίσιο της στατιστικής, της οικονομετρίας, της ποσοτικής χρηματοδότησης, της σεισμολογίας, της μετεωρολογίας και της γεωφυσικής, ο πρωταρχικός στόχος της ανάλυσης χρονοσειρών είναι η *πρόβλεψη*.

Πρόβλεψη Χρονοσειράς

› Η στρατηγική που ακολουθούμε για την πρόβλεψη μιας χρονοσειράς είναι:

1. Επιλογή μιας μεθόδου πρόβλεψης, η οποία βασίζεται στη διαίσθηση του αναλυτή και στα υπάρχοντα δεδομένα.
2. Τα δεδομένα επιλέγονται σε δύο τμήματα: Το αρχικό ή fitting τμήμα και το δεύτερο τμήμα για το τεστ της πρόβλεψης.
3. Η επιλεγμένη μέθοδος εφαρμόζεται για την προσαρμογή των τιμών (fitting) για το πρώτο τμήμα των δεδομένων.
4. Η τεχνική χρησιμοποιείται για την δοκιμαστική πρόβλεψη και εκτιμώνται τα σφάλματα.
5. Λήψη της απόφασης. Ή χρησιμοποιούμε την τεχνική όπως είναι, ή την τροποποιούμε, ή την αλλάζουμε.

Πρόβλεψη Χρονοσειράς

- Naïve
- Μέθοδοι Μέσου Όρου
  - Απλού Μέσου Όρου
  - Κινητού Μέσου Όρου
  - Διπλού Κινητού Μέσου Όρου
- Εκθετική Εξομάλυνση
  - Απλή εκθετική εξομάλυνση
  - Διπλή εκθετική εξομάλυνση ή μέθοδος Holt
  - Τριπλή εκθετική εξομάλυνση ή μέθοδος Winters

Naive

- Η «απλοϊκή» (Naïve) μέθοδος είναι η πιο απλή μέθοδος πρόβλεψης.
- Αποτελεί σημείο αναφοράς (και benchmark) για όλες τις άλλες μεθόδους πρόβλεψης. Κάθε μέθοδος, για να θεωρηθεί αποτελεσματική, πρέπει να δίνει αποτελέσματα πιο ακριβή από τα αποτελέσματα της Naïve.
- Λέγεται και "no change forecast" καθώς δίνει ως πρόβλεψη την τελευταία γνωστή παρατήρηση.
- Έχει καλές επιδόσεις για πρόβλεψη μιας περιόδου μπροστά, καθώς η αναμενόμενη τιμή της πρόβλεψης δεν διαφέρει σημαντικά από την τελευταία παρατήρηση, που έχουμε στην διάθεση μας.
- Μεταφέρονται οι τυχαίες διακυμάνσεις.

Naive

Η μέθοδος Naïve περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t$$

όπου,

- $\hat{Y}_{t+1}$: η πρόβλεψη για την περίοδο t+1
- Y_t : η παρατήρηση την χρονική περίοδο t

› Στην ουσία η χρονοσειρά της πρόβλεψης αντικαθίσταται από το lag 1 αυτής.

Naive

T	Πωλήσεις
20	600
21	750
22	500
23	400
24	650
25	850

<u>Για 1 περίοδο:</u>

$$\hat{Y}_{24+1} = Y_{24}$$

$$\hat{Y}_{25} = 650$$

$$e_{25} = Y_{25} - \hat{Y}_{25} = 850 - 650 = 200$$

<u>Για 2 περιόδους:</u>

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t + (Y_t - Y_{t-1})$$

$$\hat{Y}_{24+1} = Y_{24} + (Y_{24} - Y_{24-1})$$

$$\hat{Y}_{25} = Y_{24} + (Y_{24} - Y_{23})$$

$$= 650 + (650 - 400)$$

$$= 650 + 250 = 900$$

$$e_{25} = Y_{25} - \hat{Y}_{25} = 850 - 900 = -50$$

Naive

- Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε ποσοστιαία μεταβολή, αντί να προσθέτουμε διαφορές:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t \frac{Y_t}{Y_{t-1}}$$

Naive

- Στην περίπτωση που υπάρχει εποχικότητα στα δεδομένα, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία εξίσωση της μορφής:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3}$$

- Μία εξίσωση αυτής της μορφής δεν λαμβάνει υπόψη της καθόλου τα δεδομένα του τελευταίου έτους.

Naive

› Μπορούμε να συνδυάσουμε εποχικά δεδομένα αλλά και δεδομένα τάσης με την ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3} + \frac{(Y_t - Y_{t-1}) + \ldots + (Y_{t-3} - Y_{t-4})}{4} = Y_{t-3} + \frac{Y_t - Y_{t-4}}{4}$$

Naive

$$\hat{Y}_{24+1} = Y_{24}\frac{Y_{24}}{Y_{24-1}} \qquad \hat{Y}_{25} = Y_{24}\frac{Y_{24}}{Y_{23}} = 650\frac{650}{400} = 1{,}056$$

T	Πωλήσεις
20	600
21	750
22	500
23	400
24	650
25	850

$$e_{25} = Y_{25} - \hat{Y}_{25} = 850 - 1{,}056 = -206$$

$$\hat{Y}_{24+1} = Y_{24-3}$$

$$\hat{Y}_{25} = Y_{21} = 750$$

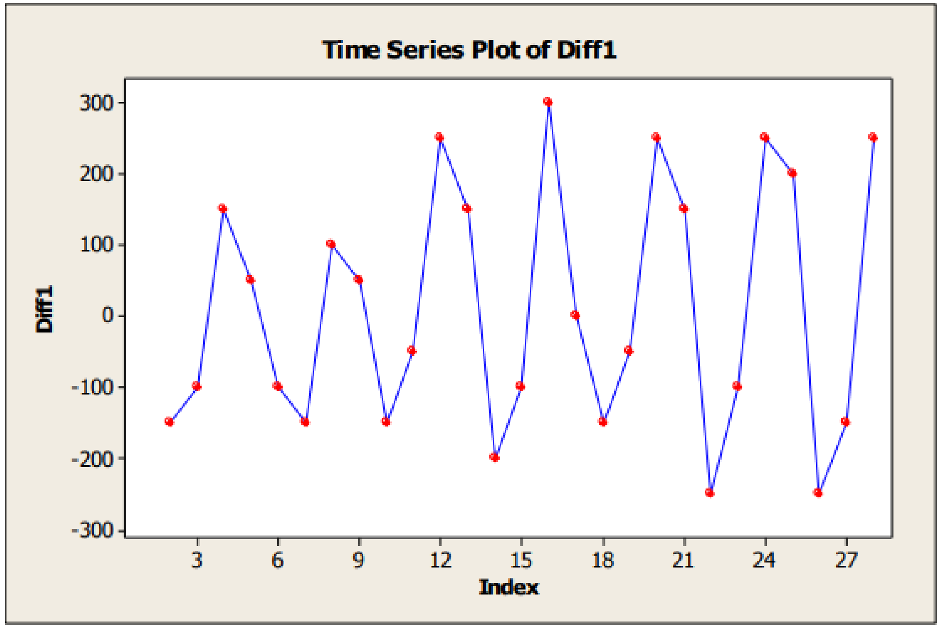
$$e_{25} = Y_{25} - \hat{Y}_{25} = 850 - 750 = 100$$

$$\hat{Y}_{24+1} = Y_{24-3} + \frac{Y_{24} - Y_{24-4}}{4}$$

$$\hat{Y}_{25} = Y_{21} + \frac{Y_{24} - Y_{20}}{4} = 750 + \frac{650 - 600}{4} = 750 + 12.5 = 762.5$$

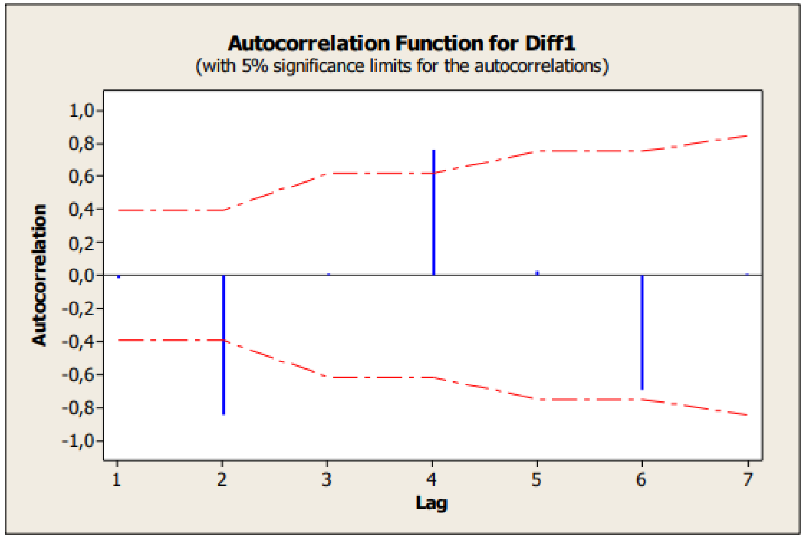
$$e_{25} = Y_{25} - \hat{Y}_{25} = 850 - 762.5 = 87.5$$

Naive



Lag	ACF	T	LBQ
1	-0,016969	-0,09	0,01
2	-0,845803	-4,39	22,41
3	0,005108	0,02	22,42
4	0,760415	2,53	42,10
5	0,024703	0,07	42,12
6	-0,695646	-1,91	60,17
7	0,011209	0,03	60,17

- Η τιμή της LBQ είναι μεγαλύτερη από την οριακή τιμή ισχύος της μηδενικής υπόθεσης, που είναι 14,07. Άρα τα σφάλματα αυτοσυσχετίζονται.



Μέθοδοι Μέσου Όρου

- Η πρόβλεψη χρονοσειρών με τη μέθοδο των μέσων εμπεριέχει τον υπολογισμό του μέσου όρου του δείγματος παρατηρήσεων, καθώς και τη χρησιμοποίηση αυτού του μέσου σαν πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο.

- Ο αριθμός των παρατηρήσεων του δείγματος που συμπεριλαμβάνονται στον υπολογισμό του μέσου προσδιορίζεται στην αρχή της διαδικασίας πρόβλεψης.

Μέθοδος Απλού Μέσου Όρου

- Αλγεβρικά ο μέσος όρος εκφράζεται:

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} Y_i$$

- Ο μέσος όρος προκύπτει από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων εφαρμοσμένη στο άθροισμα τετραγωνικών σφαλμάτων για κάποια σταθερά.

$$SSE = \sum (Y - \hat{Y})^2$$

- Ελαχιστοποιώντας αυτή τη σχέση παίρνουμε ως σημείο ελαχιστοποίησης τον μέσο όρο.

Μέθοδος Απλού Μέσου Όρου

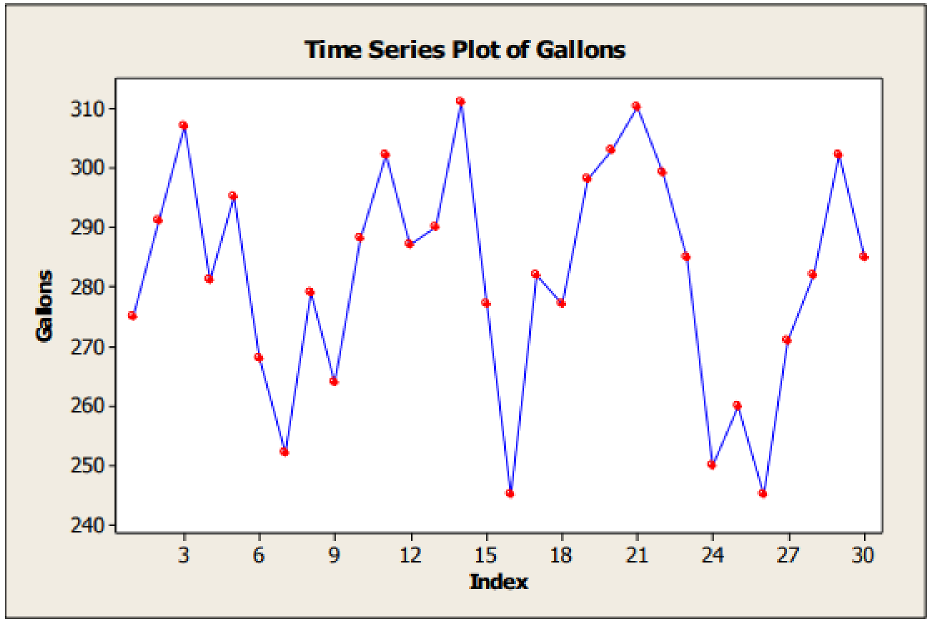
› Για τον προσδιορισμό της επόμενης προβλεπόμενης τιμής χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\hat{Y}_{t+2} = \frac{t\,\hat{Y}_{t+1} + Y_{t+1}}{t+1}$$

Μέθοδος Απλού Μέσου Όρου

- Η μέθοδος πρόβλεψης του απλού μέσου λειτουργεί με καλά αποτελέσματα, όταν οι συνθήκες που παράγουν τις χρονοσειρές έχουν σταθεροποιηθεί και το περιβάλλον παραμένει αμετάβλητο.
- Ο απλός μέσος χρησιμοποιεί όλα τα παρελθόντα δεδομένα, ώστε να γίνει πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο.
- Μπορούμε να δημιουργήσουμε και ένα διάστημα εμπιστοσύνης με κάποιο επίπεδο σημαντικότητας.

Μέθοδος Απλού Μέσου Όρου



$$\hat{Y}_{28+1}=\frac{1}{28}\sum_{i=1}^{28}Y_i \qquad \hat{Y}_{29}=\frac{7874}{28}=281.2$$

$$e_{29}=Y_{29}-\hat{Y}_{29}=302-281.2=20.8$$

$$\hat{Y}_{28+2}=\hat{Y}_{30}=\frac{28\,\hat{Y}_{28+1}+Y_{28+1}}{28+1}=281.9$$

$$e_{30}=Y_{30}-\hat{Y}_{30}=285-281.9=3.1$$

Μέθοδος Κινητού Μέσου

- Στον απλό μέσο χρησιμοποιούμε όλα τα δεδομένα. Στην περίπτωση, που θέλουμε να συγκεντρωθούμε περισσότερο στα πρόσφατα γεγονότα, τότε χρησιμοποιούμε τον κινητό μέσο.
- Η ονομασία κινητός μέσος όρος χρησιμοποιείται για να περιγράψει την διαδικασία, κατά την οποία καθώς μια νέα παρατήρηση γίνεται διαθέσιμη, ένας νέος μέσος όρος μπορεί να υπολογιστεί, στον οποίο παραλείπεται η πιο παλιά παρατήρηση, προκειμένου να συμπεριληφθεί η πιο πρόσφατη.
- Ο αριθμός των δεδομένων, που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό του μέσου όρου, παραμένει σταθερός.

Μέθοδος Κινητού Μέσου

› Ως κινητός μέσος τάξης k είναι η μέση τιμή των k διαδοχικών παρατηρήσεων και υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\hat{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-k+1}}{k}$$

όπου,

- $\hat{Y}_{t+1}$ = η πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο
- Y_t = η πραγματική τιμή
- k = ο αριθμός των παραγόντων του κινητού μέσου

Μέθοδος Κινητού Μέσου

- Η σχέση αυτή προκύπτει ελαχιστοποιώντας το άθροισμα τετραγωνικών σφαλμάτων:

$$SSE = \sum_{i=t-k+1}^{t} (Y - \hat{Y})^2$$

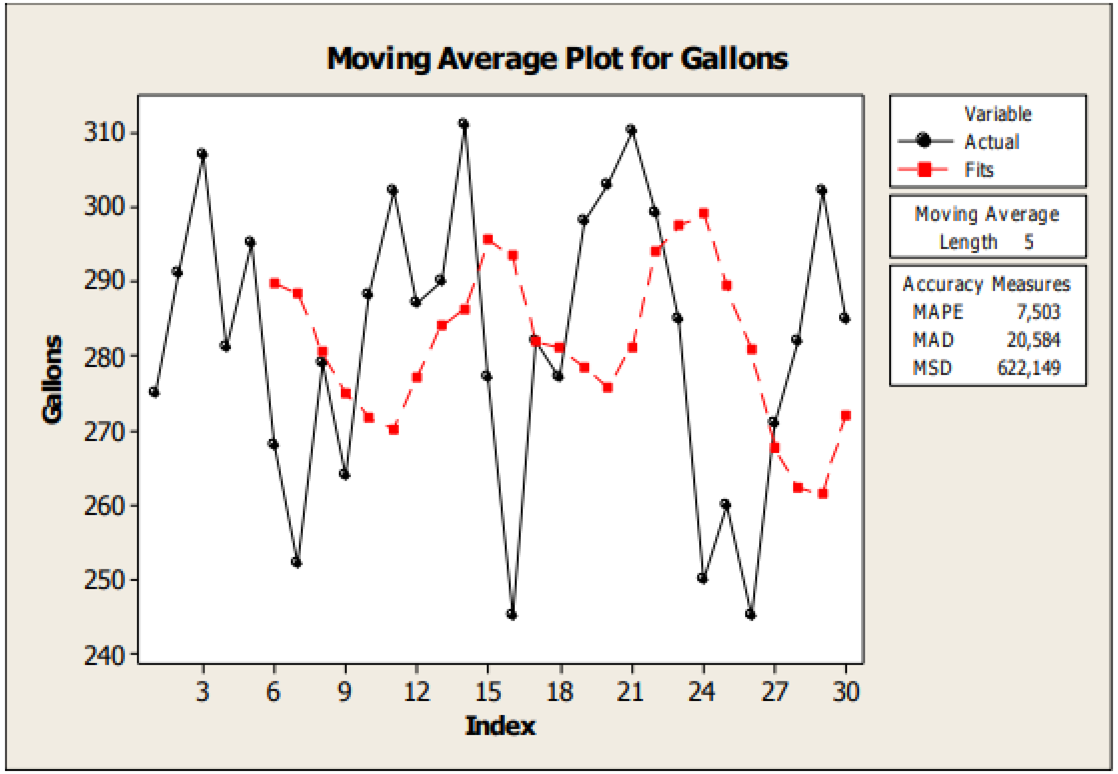
- για έναν δεδομένο αριθμό k όρων. Ο αριθμός k μπορεί να ορισθεί, έτσι ώστε το MSE να γίνει ελάχιστο, κάνοντας διάφορες δοκιμές.

Μέθοδος Κινητού Μέσου

- Τη μέθοδο αυτή τη χρησιμοποιούμε, όταν έχουμε τάση, δίνοντας καλύτερα αποτελέσματα από τον απλό μέσο όρο, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι είναι και η πλέον κατάλληλη μέθοδος για πρόβλεψη με τάση, γιατί δεν λαμβάνει υπόψη του την επίδραση του κάθε όρου ξεχωριστά αλλά θεωρεί την βαρύτητα του κάθε όρου στη σχέση σταθερή.

- Μπορούμε να δημιουργήσουμε και ένα διάστημα εμπιστοσύνης με κάποιο επίπεδο σημαντικότητας.

Μέθοδος Κινητού Μέσου



Μέθοδος Διπλού Κινητού Μέσου

- Για να προβλέψουμε νέους όρους σε χρονοσειρές, που διαθέτουν γραμμική τάση, χρησιμοποιούμε το διπλό κινητό μέσο.
- Επειδή με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων κάθε φορά που εμφανίζονται νέες τιμές στις χρονοσειρές χρειάζεται να επανεκτιμήσουμε τις παραμέτρους του γραμμικού μοντέλου για να προχωρήσουμε σε νέες προβλέψεις, δεν είναι αναγκαίο να πάρουμε όλες τις προηγούμενες τιμές του μακρινού παρελθόντος, γιατί δεν έχουν κάποια σχέση με το παρόν.
- Προσπαθούμε να εκτιμήσουμε (προσαρμόσουμε) τη καμπύλη με ευθύγραμμα τμήματα.

Μέθοδος Διπλού Κινητού Μέσου

- Στην περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων αλλά όχι για όλες τις τιμές αλλά για κάποιες k τιμές:

$$SSE = \sum_{i=t-k+1}^{t} (Y - \hat{Y})^2 = \sum_{i=t-k+1}^{t} (Y - bt - a).$$

- Οπότε η εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων δεν οδηγεί σε μία μέση ευθεία αλλά σε ευθύγραμμα τμήματα. Η περιγραφή γίνεται με την ακόλουθη συλλογιστική και τις ακόλουθες σχέσεις.

Μέθοδος Διπλού Κινητού Μέσου

- Στην αρχή παίρνουμε τον πρώτο κινητό μέσο και μετά το κινητό μέσο των πρώτων κινητών μέσων πάντα με τον ίδιο αριθμό όρων.
- Οι τιμές του πρώτου κινητού μέσου είναι μικρότερες από τις πραγματικές τιμές, ενώ οι τιμές του διπλού κινητού μέσου είναι μικρότερες και από αυτές του πρώτου κινητού μέσου.
- Στο τέλος με τη βοήθεια μιας ευθείας κάνουμε την πρόβλεψη για p περιόδους μπροστά.

Μέθοδος Διπλού Κινητού Μέσου

$$M_t = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-k+1}}{k}$$

$$M_t' = \frac{M_t + M_{t-1} + \ldots + M_{t-k+1}}{k}$$

$$\hat{Y}_{t+p} = a_t + b_t\, p, \text{ με:}$$

$$a_t = M_t + (M_t - M_t') = 2M_t - M_t' \text{ και}$$

$$b_t = \frac{2}{k-1}(M_t - M_t')$$

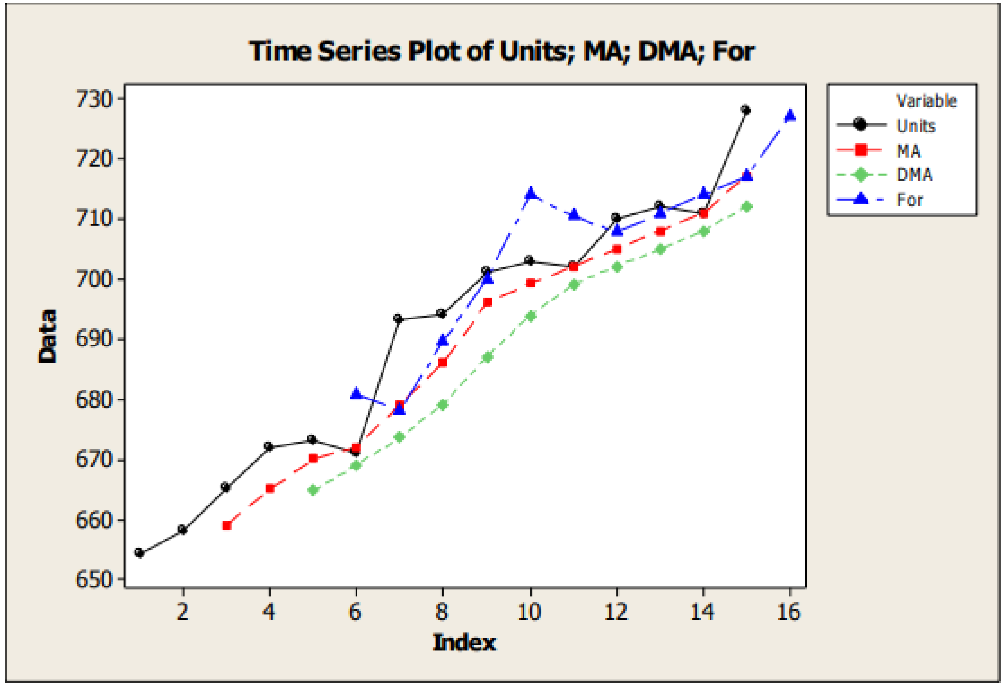
όπου,

- M_t = ο πρώτος κινητός μέσος
- M_t' = ο διπλός κινητός μέσος
- a_t = ο πρώτος κινητός μέσος συν την διαφορά του με το διπλό
- b_t = η κλίση της ευθείας πρόβλεψης από σημείο σε σημείο. Η κλίση δεν είναι σταθερή παντού.

Μέθοδος Διπλού Κινητού Μέσου

- Η μέθοδος του διπλού κινητού μέσου μπορεί να χρησιμοποιηθεί με $p > 1$ για τη διενέργεια προβλέψεων για περισσότερες από μια μελλοντικές περιόδους.
- Για $p = 1$ δίνει την πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο.
- Η χρήση της προϋποθέτει την ύπαρξη μεγάλου αριθμού παρατηρήσεων, ιδιαίτερα μάλιστα, όταν η τιμή του k είναι σχετικά μεγάλη.
- Όπως και στη μέθοδο του απλού κινητού μέσου μπορούμε να επιλέξουμε εκείνη την τιμή του k, που ελαχιστοποιεί την τιμή του κριτηρίου MSE, ή κάποιου άλλου κριτηρίου στα δεδομένα της χρονοσειράς.
- Μπορούμε να δημιουργήσουμε και εδώ ένα διάστημα εμπιστοσύνης με κάποιο επίπεδο σημαντικότητας.

Μέθοδος Διπλού Κινητού Μέσου



$$M_{15} = \frac{728 + 711 + 712}{3} = 717,$$

$$M'_{15} = \frac{717 + 711 + 708}{3} = 712,$$

$$a_{15} = 717 + (717 - 712) = 722,$$

$$b_{15} = \frac{2}{3-1}(717 - 712) = 5,$$

$$\hat{Y}_{15+1} = 722 + 5(1) = 727,$$

$$\hat{Y}_{15+4} = 722 + 5(4) = 742.$$

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Ενώ η μέθοδος του κινητού μέσου όρου λαμβάνει υπόψη της μόνο τις τελευταίες παρατηρήσεις, η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης (exponential smoothing) παίρνει υπόψη της όλες τις τιμές με διαφορετικό όμως βάρος.

- Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για πρόβλεψη στο άμεσο μέλλον και κυρίως σε προβλήματα αποθεματικών.

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Η εξίσωση της απλής εκθετικής εξομάλυνσης (simple exponential smoothing) είναι:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)\hat{Y}_t,$$

όπου t είναι η τρέχουσα περίοδος, τα $\hat{Y}_{t+1}$ και $\hat{Y}_t$, είναι τιμές πρόβλεψης για την επόμενη και την τρέχουσα περίοδο και Y_t είναι η τιμή που παρατηρήθηκε την τρέχουσα περίοδο. Το α ονομάζεται σταθερά εξομάλυνσης και παίρνει τιμές από 0 έως 1.

- Αφού η παραπάνω εξίσωση περιλαμβάνει μόνο μία σταθερά, το μοντέλο αυτό είναι μοντέλο εκθετικής εξομάλυνσης μιας παραμέτρου.

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Η εξίσωση αυτή παράγεται αν ορίσουμε και ελαχιστοποιήσουμε την ακόλουθη σχέση:

$$SSE = \sum_{1}^{t} b^{t}\left(Y_t - \hat{Y}_t\right),\ \mu\varepsilon\ 0<b<1$$

και μετά θέσουμε 1-b = a και b' = 0 για t πάρα πολύ μεγάλο.

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Η εκθετική εξομάλυνση μιας παραμέτρου είναι πολύ απλή μέθοδος, αφού μόνο μια τιμή, η πρόβλεψη της τελευταίας περιόδου, είναι αυτή που πρέπει να διασωθεί.
- Στην ουσία, ολόκληρη η χρονοσειρά εμπεριέχεται σ' αυτή την πρόβλεψη.

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Εάν εκφράσουμε το $\hat{Y}_t$, σε όρους της προηγηθείσας παρατήρησης Y_{t-1} και των τιμών της πρόβλεψης $\hat{Y}_{t-1}$, τότε το ισοδύναμο για την πρόβλεψη της επόμενης περιόδου γίνεται:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)[\alpha Y_{t-1} + (1-\alpha)\hat{Y}_{t-1}]$$

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha) Y_{t-1} + (1-\alpha)^2 \hat{Y}_{t-1}$$

- Η νέα αυτή εξίσωση είναι μοντέλο δευτεροβάθμιας εκθετικής εξομάλυνσης μιας παραμέτρου.

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Μπορούμε να συνεχίσουμε, έτσι για έναν αριθμό προηγούμενων περιόδων, πράγμα που δείχνει, ότι όλες οι προηγηθείσες τιμές του Y αντανακλώνται στην τρέχουσα πρόβλεψη. Έτσι, το όνομα αυτής της διαδικασίας προέρχεται από τις διαδοχικές σταθμίσεις α, α(1-α), $α(1-α)^2$, $α(1-α)^3$,…, οι οποίες μειώνονται εκθετικά.

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + \alpha(1-\alpha) Y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 Y_{t-3} + \dots$$

- Το άθροισμα $S=α+α(1−α)+α(1−α)^2+α(1−α)^3+…=1$ και αυτό υποδηλώνει ότι η πρόβλεψη είναι σταθμισμένος μέσος όρος.

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Οι πιο πρόσφατες περίοδοι στη χρονοσειρά λαμβάνουν μεγαλύτερη στάθμιση στον υπολογισμό της πρόβλεψης. Πρακτικά, οι αρκετά παλιές τιμές της Y εξαιρούνται.
- Η διαδικασία πρόβλεψης μπορεί να τροποποιηθεί οποιαδήποτε στιγμή με τη μεταβολή της τιμής της α.
- Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση ως εξής:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha\left(Y_t - \hat{Y}_t\right) = \hat{Y}_t + \alpha e_t$$

- Δηλαδή η πρόβλεψη στο t+1 είναι η πρόβλεψη στο t συν έναν παράγοντα επί της διαφοράς της πραγματικής τιμής μείον την τιμή της πρόβλεψης στο t, όπου το αe_t το σφάλμα πρόβλεψης για την περίοδο t.

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Η πρόβλεψη που δίνεται από την εκθετική εξομάλυνση, είναι η παλαιά πρόβλεψη συν μια προσαρμογή για το σφάλμα, που έγινε στην τελευταία πρόβλεψη.
- Όταν το α βρίσκεται πλησίον του 1, η νέα πρόβλεψη περιέχει μια ουσιώδη προσαρμογή για το σφάλμα της προηγούμενης πρόβλεψης.
- Αντίθετα, εάν το α βρίσκεται πολύ κοντά στο 0, η νέα πρόβλεψη θα περιέχει μικρή μόνο προσαρμογή για το σφάλμα.

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Ένας τρόπος υπολογισμού του α είναι να ελαχιστοποιήσουμε το MSE, το οποίο εξαρτάται από το α.
- Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει και με επαναληπτική μέθοδο.
- Ως αρχική τιμή παίρνουμε:

$$\hat{Y}_1 = Y_1 \quad \text{ή} \quad \hat{Y}_1 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Y_i$$

Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Για τα έτη 2000 – 2006 μια εταιρία προσαρμόζει τις τιμές και προβλέπει με την μέθοδο της εκθετικής εξομάλυνσης, χρησιμοποιώντας τις σταθερές εξομάλυνσης 0.1 και 0.6.
- Η εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς υπολογίζεται καθορίζοντας το $Y_1=500$.
- Από τη χρονική περίοδο 2 η πρόβλεψη για την περίοδο 3 με α = 0.1 είναι:

$$\hat{Y}_{2+1}=\alpha Y_2+(1-\alpha)\hat{Y}_2, \quad \hat{Y}_3=0.1(350)+.9(500)=485$$

Το σφάλμα πρόβλεψης είναι:

$$e_3=Y_3-\hat{Y}_3=250-485=-235$$

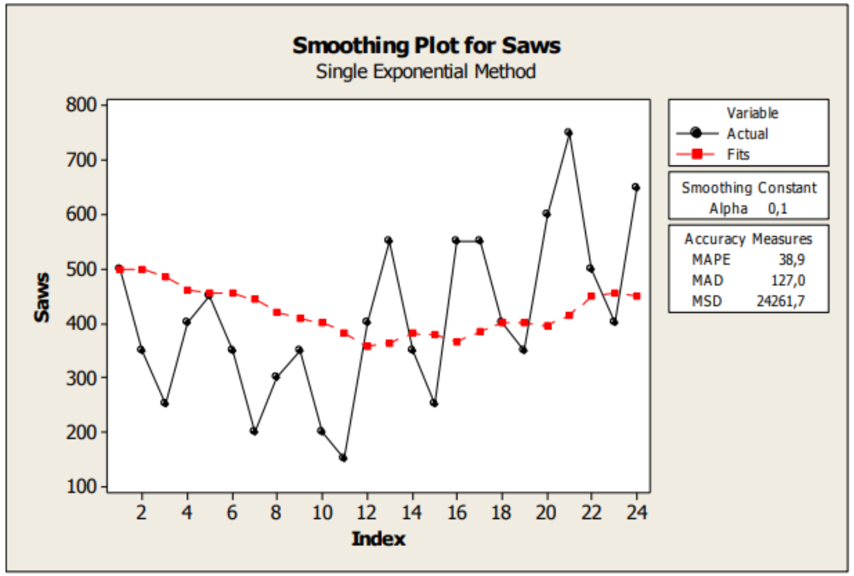
Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Η πρόβλεψη για την τέταρτη περίοδο είναι:

$$\hat{Y}_{3+1} = \alpha Y_3 + (1-\alpha)\hat{Y}_3, \quad \hat{Y}_4 = 0.1(250) + 0.9(485) = 461.5$$

Για α = 0.1 έχουμε: MSE = 24,262, MAPE = 38.9%

Για α = 0.6 έχουμε: MSE = 22,248, MAPE = 36.5%



Απλή Εκθετική Εξομάλυνση

- Το Minitab έχει τη δυνατότητα να υπολογίσει την παράμετρο α αυτόματα, έτσι ώστε το MSE να είναι ελάχιστο.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)

- Ονομάζεται επίσης μέθοδος Holt και χρησιμοποιείται, όταν υπάρχει τάση στις παρατηρήσεις της χρονοσειράς.
- Η μέθοδος Holt έχει δύο παραμέτρους εξομάλυνσης:
  - Την παράμετρο α για την εξομάλυνση του επιπέδου των τιμών της χρονοσειράς και
  - Την παράμετρο β για την εξομάλυνση της τάσης,

σε αντίθεση με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης που έχει μόνο μία.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)

- Η εφαρμογή της μεθόδου βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία:

Εξομάλυνση του επιπέδου των τιμών

Εξομάλυνση της τάσης

Πρόβλεψη

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)

- Η εξομάλυνση του επιπέδου των τιμών (current Level) της χρονοσειράς γίνεται με την ακόλουθη σχέση:

$$L_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}),$$

όπου α είναι η σταθερά για την εξομάλυνση για $0 \le \alpha \le 1$, L_t οι εξομαλυνθείσες τιμές της χρονοσειράς, που προκύπτουν από την εξομάλυνση, για t=2, 3, …, n, ενώ για t=1 ορίζεται ως αρχική συνθήκη $L_1 = Y_1$.

- Η σχέση αυτή είναι όμοια με τη σχέση της απλής εκθετικής εξομάλυνσης εκτός από τον παράγοντα T_{t-1}, ο οποίος εισήχθη προκειμένου να ενσωματώσουμε τη τάση στη περίπτωση που υπάρχει. Χωρίς τον παράγοντα αυτό η σχέση είναι ίδια με τη σχέση της απλής εκθετικής εξομάλυνσης.
- Το Level είναι η εξομαλυνθείσα τιμή των δεδομένων στο τέλος μιας περιόδου.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)

- Η εξομάλυνση της τάσης (Trend estimate) γίνεται ως εξής:

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}$$

όπου β, για $0 \le \beta \le 1$, είναι η σταθερά για την εξομάλυνση της τάσης, T_t οι εξομαλυνθείσες τιμές της τάσης, για t=2, 3, …, n, ενώ για t=1 ορίζεται ως αρχική συνθήκη η $T_1=0$.

- Η παρούσα τάση σταθμίζεται με δύο παράγοντες:
  - Ο πρώτος προέρχεται από τη διαδοχική διαφορά των εξομαλυνθέντων τιμών της χρονοσειράς ενώ
  - Ο δεύτερος από την εξομαλυνθείσα τιμή τάσης της προηγούμενης περιόδου.
- Το Trend λοιπόν είναι η εξομαλυνθείσα τιμή της αύξησης, ή της μείωσης των δεδομένων στο τέλος μιας περιόδου.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)

- Η πρόβλεψη, για την p μελλοντική περίοδο υπολογίζεται ως:

$$\hat{Y}_{t+p} = L_t + pT_t$$

όπου p = 1, 2, 3, ….

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)

- Οι τιμές των παραμέτρων α και β για μια συγκεκριμένη χρονοσειρά είναι αυτές, που ελαχιστοποιούν την τιμή του κριτηρίου MSE, ή κάποιου άλλου κριτηρίου στα δεδομένα της χρονοσειράς.
- Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν αν πάρουμε την αναμενόμενη τιμή της εξομαλυνθείσας τιμής στην απλή εκθετική εξομάλυνση και μετά ορίσουμε δεύτερη εξομάλυνση στην αναμενόμενη τιμή της πρώτης εξομάλυνσης.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)

- Έχουμε $\alpha = 0.3$ και $\beta = 0.1$. Η εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς είναι:

$$L_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

$$L_2 = 0.3 Y_2 + (1-0.3)(L_{2-1} + T_{2-1})$$

$$L_2 = 0.3(350) + 0.7(500+0) = 455$$

- Η εξομάλυνση της τάσης είναι:

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta) T_{t-1}$$

$$T_2 = 0.1(L_2 - L_{2-1}) + (1-0.1) T_{2-1}$$

$$T_2 = 0.1(455 - 500) + 0.9(0) = -4.5$$

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)

› Η πρόβλεψη για μία μελλοντική περίοδο είναι:

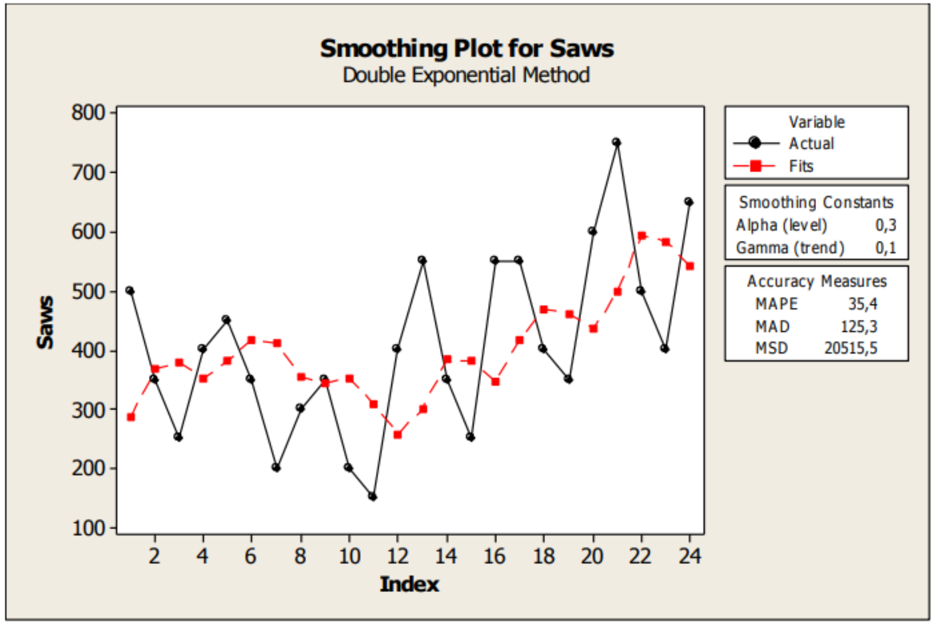
$$\hat{Y}_{t+p} = L_t + pT_t$$

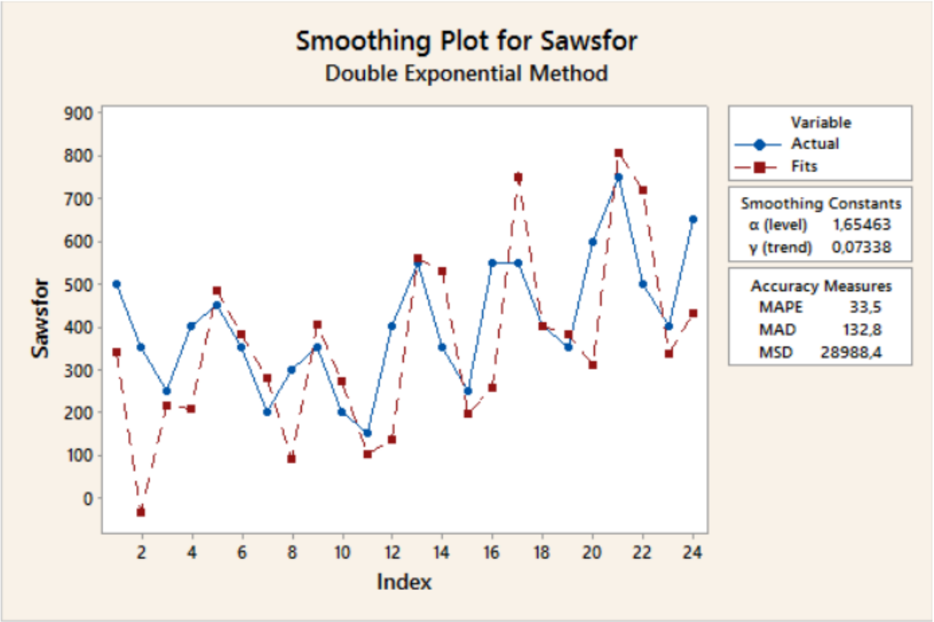
$$\hat{Y}_3 = L_2 + pT_2 = 455 + 1(-4.5) = 450.5$$

› Το σφάλμα πρόβλεψης είναι:

$$e_3 = Y_3 - \hat{Y}_3 = 250 - 450.5 = -200.5$$

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση (Διπλή)





Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

- Ο Winters ανέπτυξε μια μέθοδο για την προσαρμογή της εποχικής ή περιοδικής κίνησης μέσα στο πλαίσιο της γραμμικής εκθετικής εξομάλυνσης με ή χωρίς τάση.
- Η διαδικασία του Winters μπορεί να εφαρμοστεί για προβλέψεις με βάση μια χρονοσειρά, που εμφανίζει και τάση και εποχικό πρότυπο.
- Η επέκταση συνίσταται στην ύπαρξη επιπλέον εξίσωσης για τον υπολογισμό της εποχικής συνιστώσας της χρονοσειράς.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

› Για την ανάπτυξη της μεθόδου αυτής θεωρούμε το Multiplicative Model για την αναπαράσταση των δεδομένων μέσω των συνιστωσών.

$$Y = L \times S$$

› Μέσα στο L "κρύβεται" η τάση, η κυκλικότητα και η τυχαιότητα.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

› Προκειμένου να κάνουμε πρόβλεψη με αυτό το μοντέλο χρειαζόμαστε τέσσερις εξισώσεις:

1. Η εκθετικά εξομαλυνθείσα σειρά είναι η εξής:

$$L_t = \alpha \frac{Y_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

2. Η εκτίμηση της εποχικότητας είναι η εξής:

$$S_t = \gamma \frac{Y_t}{L_t} + (1-\gamma) S_{t-s}$$

όπου S είναι ο παράγοντας προσαρμογής της εποχικότητας και το s είναι το μήκος της εποχικότητας.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

3. Η εκτίμηση της τάσης παραμένει η ίδια:

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}$$

4. Η πρόβλεψη για p περιόδους γίνεται ως εξής:

$$\hat{Y}_{t+p} = (L_t + pT_t)S_{t-s+p}$$

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

- Με την πρώτη εξίσωση γίνονται επίκαιρες οι εξομαλυνθείσες τιμές της σειράς.
- Το L δεν εμπεριέχει την εποχικότητα.
- Στην εξίσωση αυτή το Y_t διαιρείται δια του S_{t-s} που προσαρμόζει τις αρχικές παρατηρήσεις Y_t για εποχικότητα και αναιρεί τις επιδράσεις της εποχικότητας, όσο καλύτερα αυτές μπορεί να μετρηθούν από τη χρονολογική σειρά.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

- Η δεύτερη εξίσωση δίνει την εκτίμηση της εποχικής συνιστώσας, Y_t/L_t πολλαπλασιασμένη επί τη σταθερά γ συν την παλαιά εποχική εκτίμηση, S_{t-s} πολλαπλασιασμένη επί (1–γ).
- Επομένως, η επικαιροποίηση των εποχικών εκτιμήσεων είναι από μόνη της μια διαδικασία εκθετικής εξομάλυνσης.
- Επίσης, ο Y_t διαιρείται με L_t, προκειμένου να εκφραστεί η τιμή ως δείκτης παρά ως απόλυτο μέγεθος. Αυτό επιτρέπει την εύρεση του μέσου όρου των νέων εποχικών εκτιμήσεων με βάση τον εποχικό δείκτη της προηγούμενης περιόδου.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

- Η τρίτη εξίσωση εκφράζει τη σύγχρονη τιμή της συνιστώσας της τάσης, που επιτυγχάνεται με τη συνηθισμένη διαδικασία εκθετικής εξομάλυνσης.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

- Τέλος, μετά από αυτή την εξίσωση λαμβάνουμε την εξίσωση για τις μελλοντικές περιόδους.
- Η διαφορά είναι ότι αυτή η εκτίμηση για τη μελλοντική περίοδο, t+p, πολλαπλασιάζεται επί S_{t-s+p}. Αυτός είναι ο τελικός διαθέσιμος εποχικός δείκτης και αποτελεί την προσαρμογή της πρόβλεψης για εποχικότητα.
- Οι αρχικές τιμές είναι $S_1 = 1.0$, $T_1 = 0$, $L_1 = Y_1$.
- Οι παράμετροι α,β,γ ορίζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε το MSE να γίνει ελάχιστο, κάτι που σ' αυτή την περίπτωση είναι πολύ χρονοβόρο.

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

α = 0,4

β = 0,1

γ = 0,3

Level estimate:

$$L_t = \alpha \frac{Y_t}{S_{t-s}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1})$$

$$L_{24} = 0.4 \frac{Y_{24}}{S_{24-4}} + (1-0.4)(L_{24-1} + T_{24-1})$$

$$L_{24} = 0.4 \frac{650}{1.39628} + (1-0.4)(501.286 + 9.148) = 492.469$$

Trend estimate:

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}$$

$$T_{24} = 0.1(L_{24} - L_{24-1}) + (1-0.1)T_{24-1}$$

$$T_{24} = 0.1(492.469 - 501.286) + 0.9(9.148) = 7.352$$

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)

$\alpha = 0,4$

$\beta = 0,1$

$\gamma = 0,3$

Seasonality estimate: $S_t = \gamma \frac{Y_t}{L_t} + (1-\gamma) S_{t-s}$

$$S_{24} = 0.3 \frac{Y_{24}}{L_{24}} + (1-0.3) S_{24-4}$$

$$S_{24} = 0.3 \frac{650}{492.469} + 0.7(1.39628) = 1.3734$$

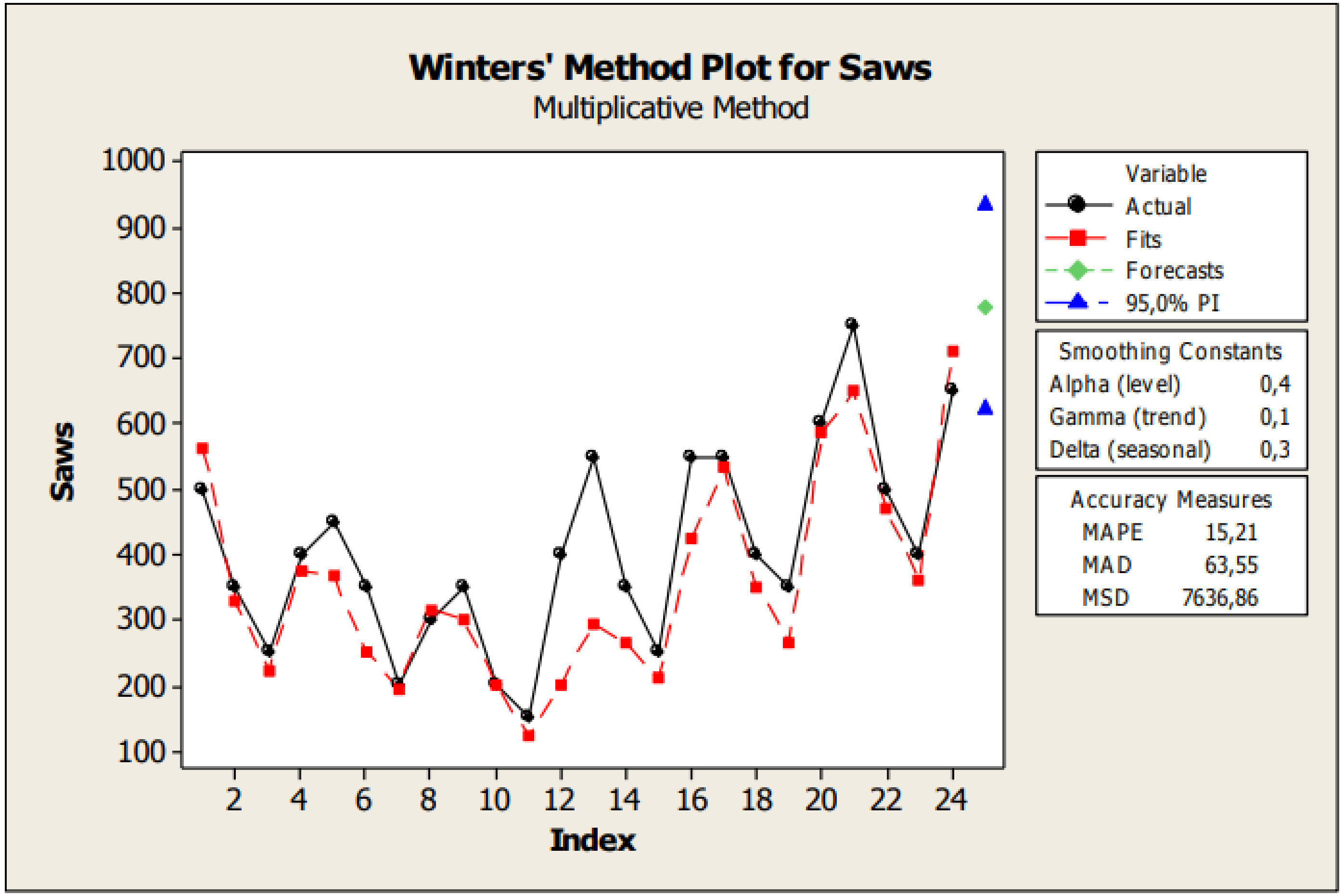
Forecast:

$$\hat{Y}_{t+p} = (L_t + pT_t) S_{t-s+p}$$

$$\hat{Y}_{24+1} = (L_{24} + 1\mathrm{T}_{24}) S_{24-4+1}$$

$$\hat{Y}_{25} = (492.469 + 7.352) 1.5569 = 778.17$$

Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση και στην Εποχικότητα (Τριπλή)



Ερωτήσεις???