

ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ ΣΕ ΚΑΝΑΛΙΑ

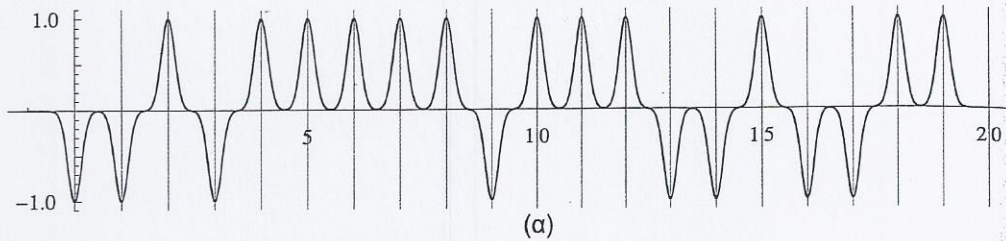
ΜΕ ΔΙΑΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

(ΚΕΦ. 9)

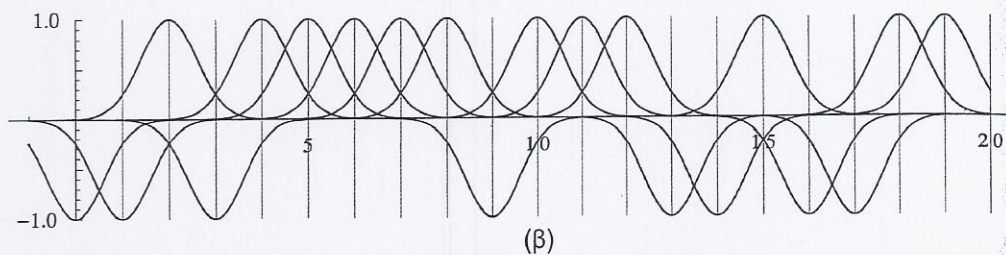
- Μέχρι τώρα το κανάλι επικοινωνίας ήταν ΑΩΓΝ χωρίς περιορισμό των εύρους ζώνης συχ. χωρίς παρεμβολών των γειτονικών συχ.των.
- Τώρα: Bandlimited Channels
- Παρεμβολών των γειτονικών συχ.των (ηχητός & φάση) - κανάλια με διασπορά (dispersive channels)
- $$r(t) = s(t) * h(t) + n(t)$$

$h(t)$: υστερήσιμη απόκριση του καναλιού
 $s(t)$: μεταδιδόμενο συχ.
 $n(t)$: ΑΩΓΝ
- $h(t)$ είναι ένα LPF \rightarrow $s(t)$ αθροίζεται χρονικά πριν από την ηχητική παρεμβολή.

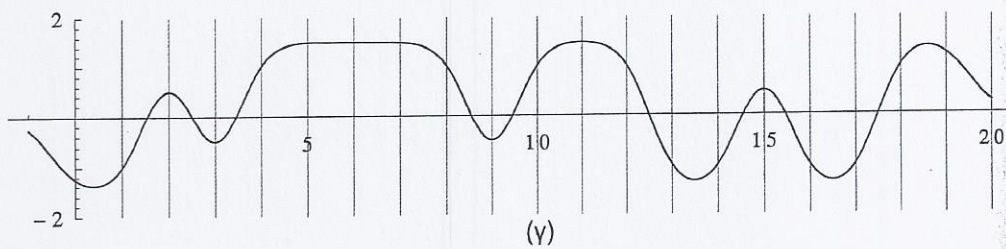
• Intersymbol Interference (ISI) Διασποράση Παρεμβολή



B = 0.2



B = 0.5



Σχήμα 9.1: Ακολουθία συμβόλων BPAM (α) Απουσία ISI (β) Δημιουργία ISI (γ) Υπέρθεση των σημάτων του β

$$g(t) = \exp\left(-\frac{t^2 \log 2}{2B^2}\right)$$

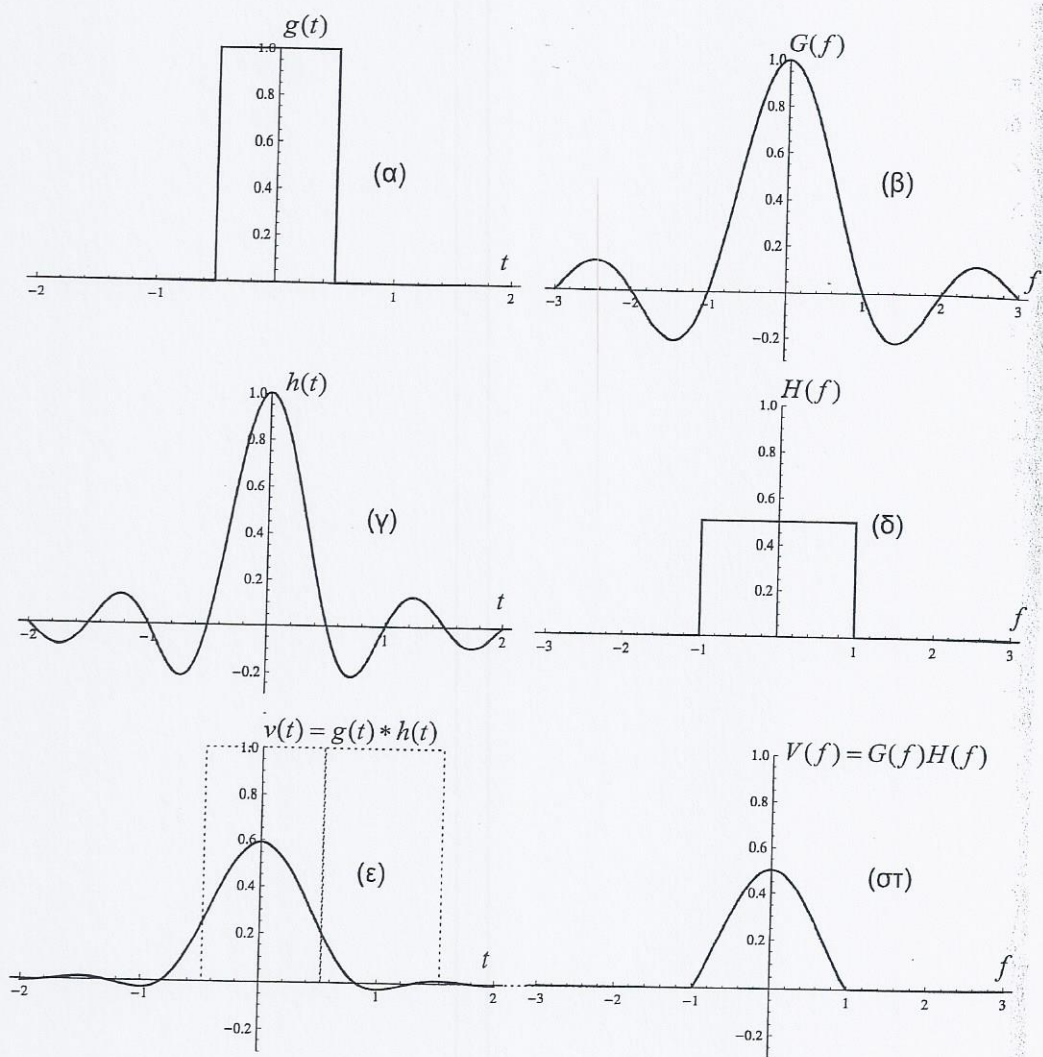
- Gaussian pulse
- B controls the pulse width

Παράδειγμα 9.1

$g(t) = \Pi(t)$

$h(t) = \text{sinc}(2t)$

Find $v(t) = g(t) * h(t) \leftrightarrow V(f) = G(f) \cdot H(f)$



Σχήμα 9.2: Παραμόρφωση του παλμού $g(t)$ μετά τη διέλευση από κανάλι με κρουστική απόκριση $h(t)$

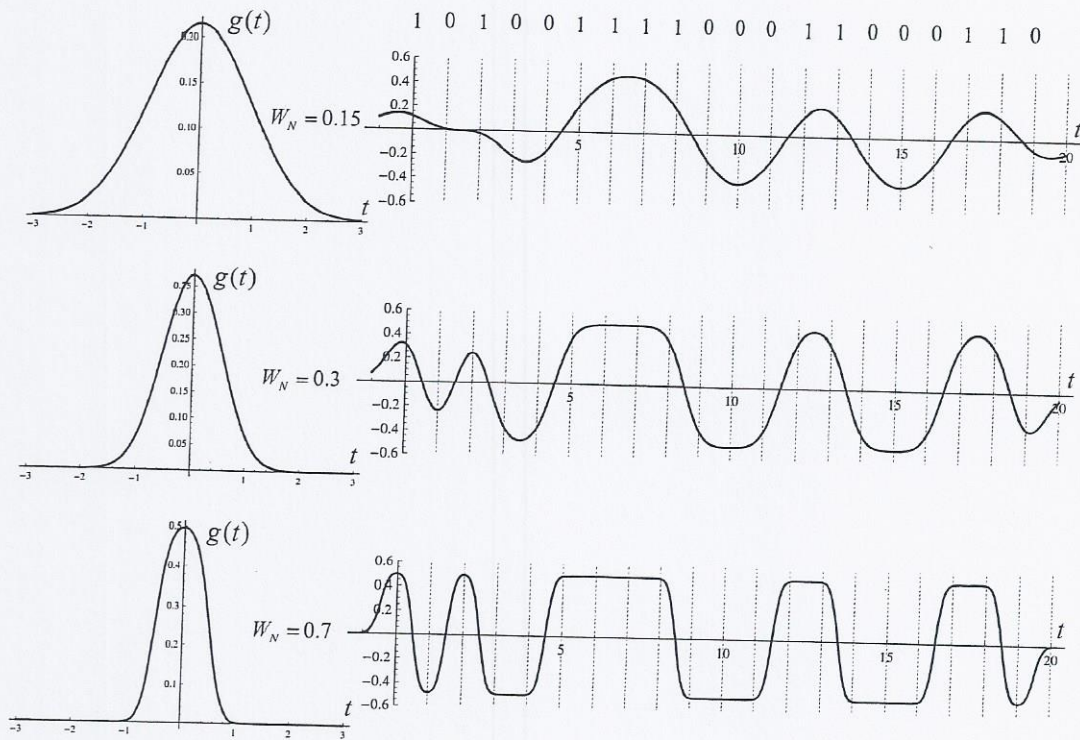
ISI οφείλεται στο να γίνει το σήμα συνεχές μοντελοποιείται ως φίλτρο

Παράδειγμα 9.2

Να σχεδιαστεί η κυματομορφή στο χρόνο μίας ακολουθίας συμβόλων BPAM που δημιουργείται από Gaussian φίλτρο με κρουστική απόκριση.

$$g(t) = \frac{1}{2T_b} \left[Q \left(2\pi W \frac{t - \frac{T_b}{2}}{\sqrt{\log 2}} \right) - Q \left(2\pi W \frac{t + \frac{T_b}{2}}{\sqrt{\log 2}} \right) \right], \quad (9.5)$$

Να θεωρήσετε διάφορες τιμές του κανονικοποιημένου εύρους ζώνης $W_N = WT_b$ με $T_b = 1$.



Σχήμα 9.3: BPAM με Gaussian παλμούς

ISI Analysis

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

M-ary PAM

T: symbol duration

$g_T(t)$: Tx filter impulse response. (IR)

At the receiver

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n v(t - nT) + n(t)$$

$$v(t) = g_T(t) * h(t)$$

$h(t)$: Channel IR

$n(t)$: AWGN, $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$

Aft. the MF

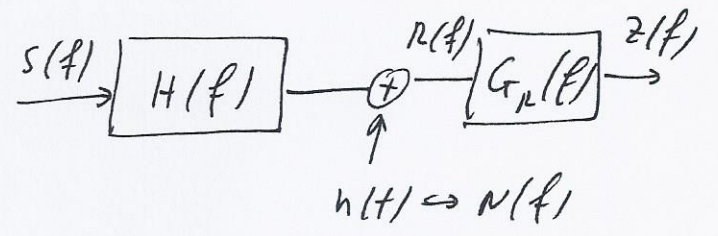
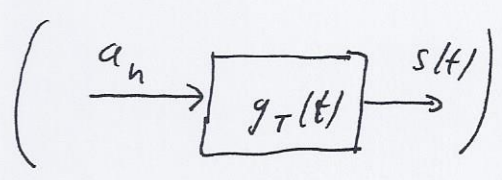
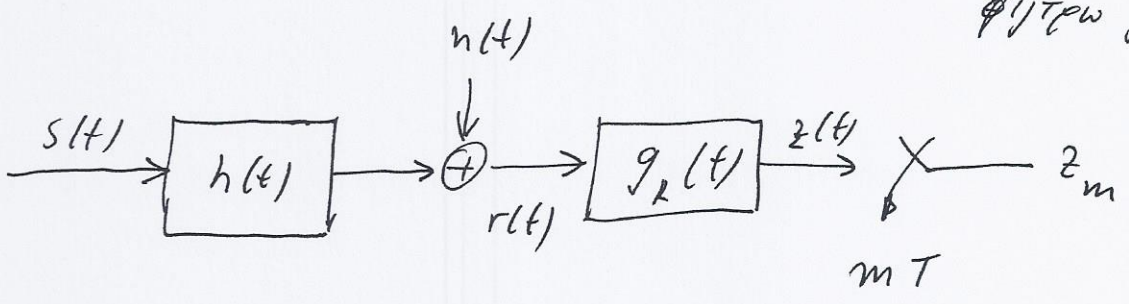
$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT) + n(t)$$

$$x(t) = v(t) * g_R(t)$$

$n(t)$: AGN

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} E_g$$

E_g : energy of filter $g_R(t)$



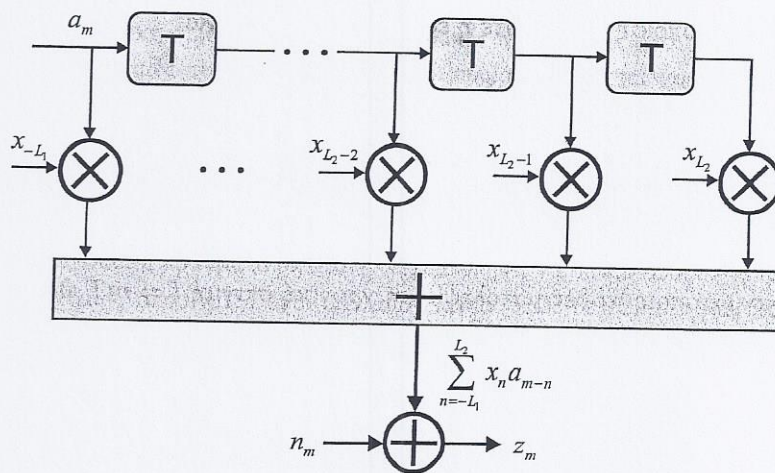
$$z_m = a_m x_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} a_n x_{m-n} + n_m = a_m x_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} a_{m-n} x_n + n_m$$

$$x_{m-n} = x(mT - nT); \quad n_m \text{ is a Gaussian RV}$$

$$x_0 = x(0)$$

- Επιθυμητο Συμβολο $\rightarrow a_m x_0$
- ISI $\rightarrow \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} a_{m-n} x_n$
- Αν $x_n = 0$ για $n < -L_1$ & $n > L_2$

$$z_m \approx \sum_{n=-L_1}^{L_2} a_{m-n} x_n (+ n_m)$$



- Finite IR
 - (X) : Taps

Σχήμα 9.4: Ισοδύναμο φίλτρο καναλιού διακριτού χρόνου

- Αν M -PAM (με $M > 2$) \Rightarrow η σχεδίαση του φίλτρου μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μία μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων (finite state machine) (+ AWGN)
- Μνήμη μήκους $L_1 + L_2$ στο ονομαστικό διάνυσμα σύμβολων.
- Trellis Diagram $M^{L_1 + L_2}$ states (similar to CPAM).
- Η ίδια άραξη ισχύει για τωνοσφαιρική M -PAM

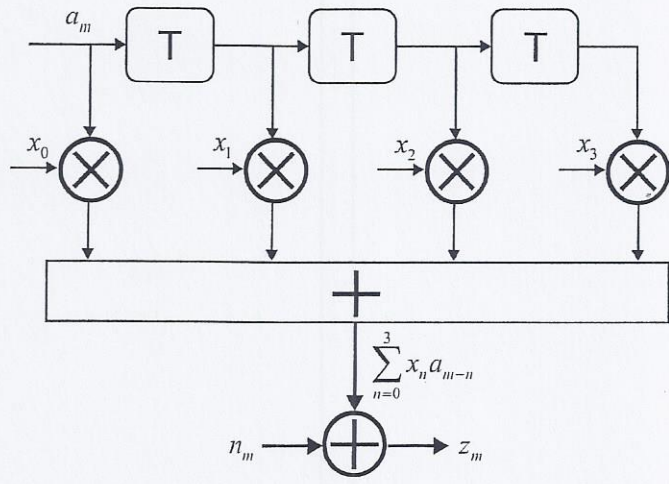
$$s(t) = \left[\sum_n a_n g_T(t - nT) \right] \cos(2\pi f_c t)$$

$$r(t) = \left[\sum_n a_n v(t - nT) \right] \cos(2\pi f_c t) + n(t)$$

- Αντιμετώπιση ISI
 - Nyquist pulses (filter) with \emptyset ISI
 - Equalization (ισοστάθμιση)

Παράδειγμα 9.3

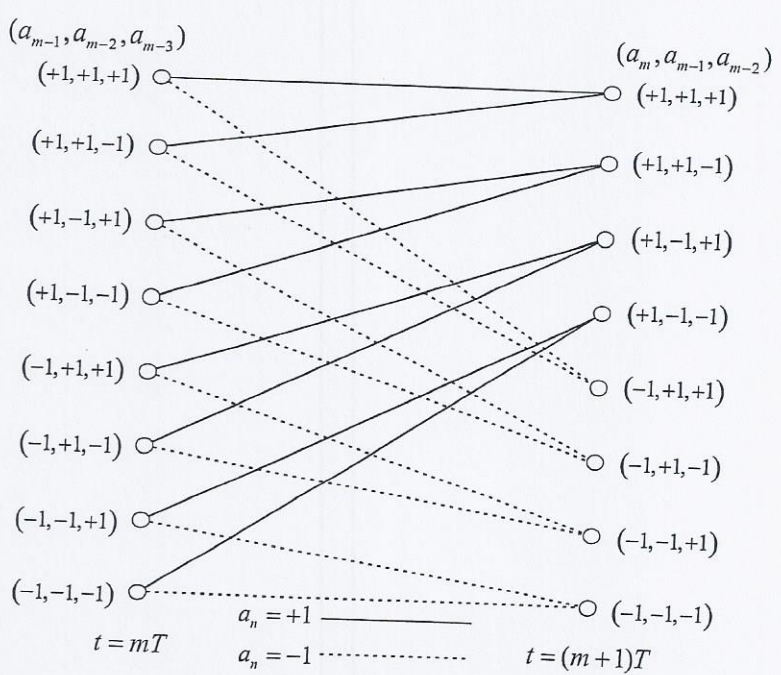
Να σχεδιαστεί η μηχανή πεπερασμένων καταστάσεων και το διάγραμμα Trellis, ενός συστήματος στο οποίο εισάγεται ISI, όταν το φίλτρο διακριτού χρόνου που αναπαριστά την απόκριση του καναλιού αποτελείται από τέσσερα taps και τα σύμβολα λαμβάνουν τις τιμές ± 1 .



Σχήμα 9.5: Ισοδύναμο φίλτρο καναλιού με τέσσερα taps

Λύση

$L_1 = 0, L_2 = L \rightarrow 4 \text{ taps} \Rightarrow L = 3 \rightarrow$
 Διαγράμμα Trellis $M^L = 2^3 = 8 \text{ states}$.



Σχήμα 9.6: Διάγραμμα καταστάσεων Trellis

Παράδειγμα 9.4

Οι τιμές δειγματοληψίας και οι αντίστοιχες πιθανότητες λήψης ενός συστήματος BPAM δίνονται ως

$$z_m = \begin{cases} a_m + q + n_m \rightarrow \frac{1}{4} \\ a_m - q + n_m \rightarrow \frac{1}{4} \\ a_m + n_m \rightarrow \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (9.14)$$

όπου η παράμετρος q εκφράζει την εισαγόμενη ISI, n_m είναι Gaussian τυχαία μεταβλητή με διακύμανση $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} = 1$ και $a_m = \pm A$ ανάλογα αν έχει σταλεί το bit 1 ή το 0.

Αν το A μπορεί να πάρει μία από τις τιμές 1, 2, 3 και 4 ποια τιμή θα επιλέγατε για το A , ώστε αν το ποσοστό της ISI είναι 10% του μεταδιδόμενου συμβόλου η μέση πιθανότητα σφάλματος να μην υπερβαίνει την τιμή 1.7×10^{-3} ;

Απάντηση

Όταν δεν υπάρχει ISI, δηλαδή $z_m = a_m + n_m$ τότε η πιθανότητα σφάλματος θα είναι

$$P_{e1} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q(A). \quad (9.15)$$

Όταν $z_m = a_m + q + n_m$ τότε

$$P_{e2} = Q\left(\frac{A+q}{\sigma}\right) = Q(A+q), \quad (9.16)$$

ενώ όταν $z_m = a_m - q + n_m$

$$P_{e3} = Q\left(\frac{A-q}{\sigma}\right) = Q(A-q). \quad (9.17)$$

Έτσι η μέση πιθανότητα σφάλματος θα είναι

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2}P_{e1} + \frac{1}{4}P_{e2} + \frac{1}{4}P_{e3} \\ &= \frac{1}{2}Q(A) + \frac{1}{4}Q(A+q) + \frac{1}{4}Q(A-q). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Επειδή το ποσοστό της ISI είναι 10% του μεταδιδόμενου συμβόλου θα ισχύει $\frac{q}{A} = 0.1$ οπότε

$$P_e = \frac{1}{2}Q(A) + \frac{1}{4}Q(1.1A) + \frac{1}{4}Q(0.9A). \quad (9.19)$$

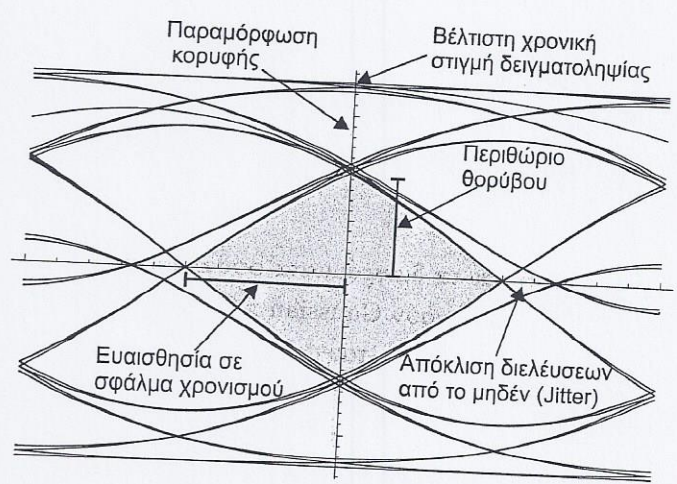
Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι $P_e \leq 1.7 \times 10^{-3}$ οπότε

$$\frac{1}{2}Q(A) + \frac{1}{4}Q(1.1A) + \frac{1}{4}Q(0.9A) \leq 1.7 \times 10^{-3}. \quad (9.20)$$

Χρησιμοποιώντας του πίνακες του Παραρτήματος A για τη συνάρτηση $Q(x)$ βρίσκεται ότι η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται μόνο για $A = 3$ και $A = 4$. Επιλέγεται η μικρότερη τιμή ($A = 3$) προκειμένου να κρατηθεί όσο το δυνατό χαμηλότερα η ενέργεια συμβόλου.

Eye-Diagrams / Διαγράμματα Οφθαλμού

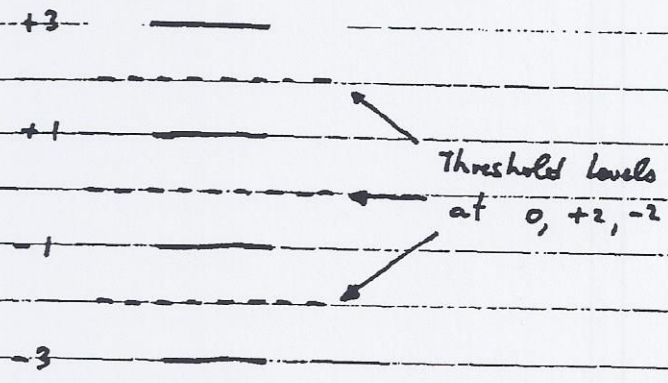
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελεγχθεί η ποιότητα των επιδόσεων ενός ψηφιακού τηλεπικοινωνιακού συστήματος.
- Superposition of all pulses on the ~~the~~ screen of an oscilloscope.



Σχήμα 9.7: Διάγραμμα οφθαλμού

Example

Assume $d=1, b_0=1$



4-PAM

Problems: (ISI & Noise)
(or "useful" phenomena!?)

NYQUIST CRITERION FOR ZERO ISI

There are 3 Nyquist criteria

The first deals with pulse shapes (essentially filters) which result in zero ISI at the sampling instant

$$\text{If } \{h(t) = 0 \text{ for } t = nT \text{ (} n \neq 0)\} \Leftrightarrow \{h_n = 0 \text{ for } n \neq 0\}$$

$$\Leftrightarrow \{h_n = h(nT) = \delta_n\} \Rightarrow y_n = b_n + \check{u}_n \text{ (i.e., no ISI)}$$

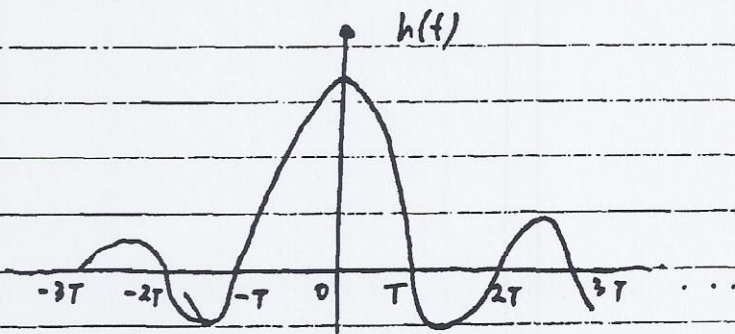
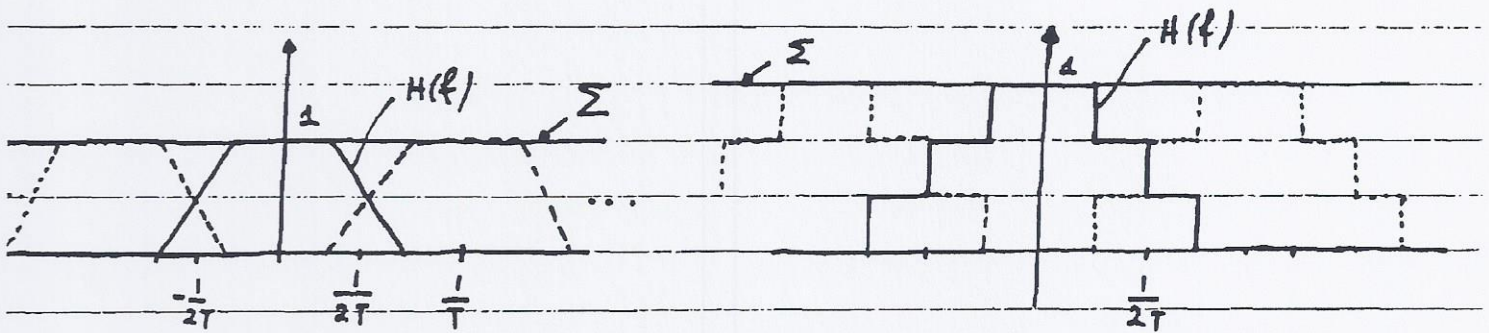
$$\circ \text{ For no ISI } \Rightarrow \sum_k h(kT) \delta(t - kT) = \delta(t)$$

Nyquist
First
Criterion
(SOS)²

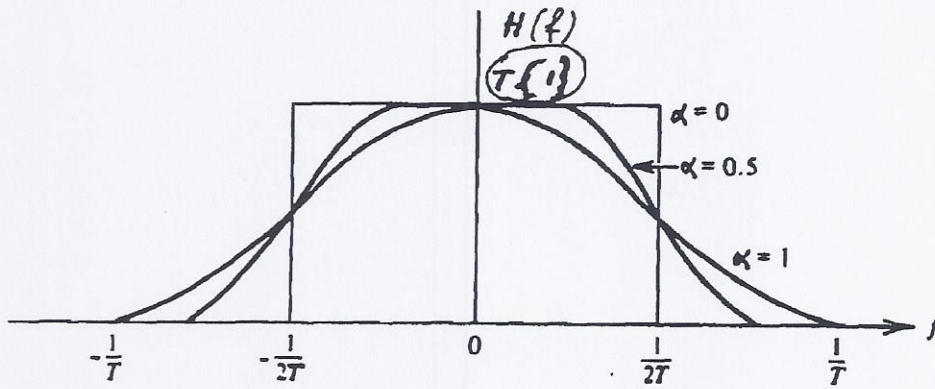
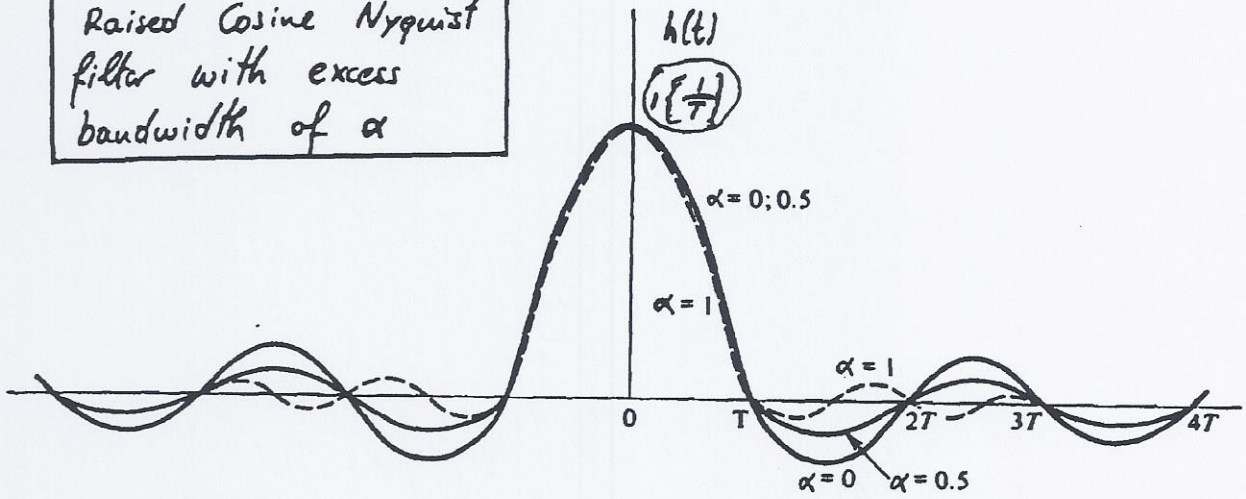
$h(t) \sum_k \delta(t - kT) = \delta(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{T} \sum_m H(f - \frac{m}{T}) = 1$
<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"> Time Domain Frequency Domain </div>

Comments

- ① Impulse response includes Tx-filter, channel and Rx-filter.
(For the Nyquist it does not matter how they are split)
- ② In the time domain, we force the overall impulse response $h(t)$ to be zero at all sampling instances (except of course $t=0$).
- ③ In the frequency domain, this is equivalent of having an even symmetry around the Nyquist frequency $f_N = \frac{1}{2T}$



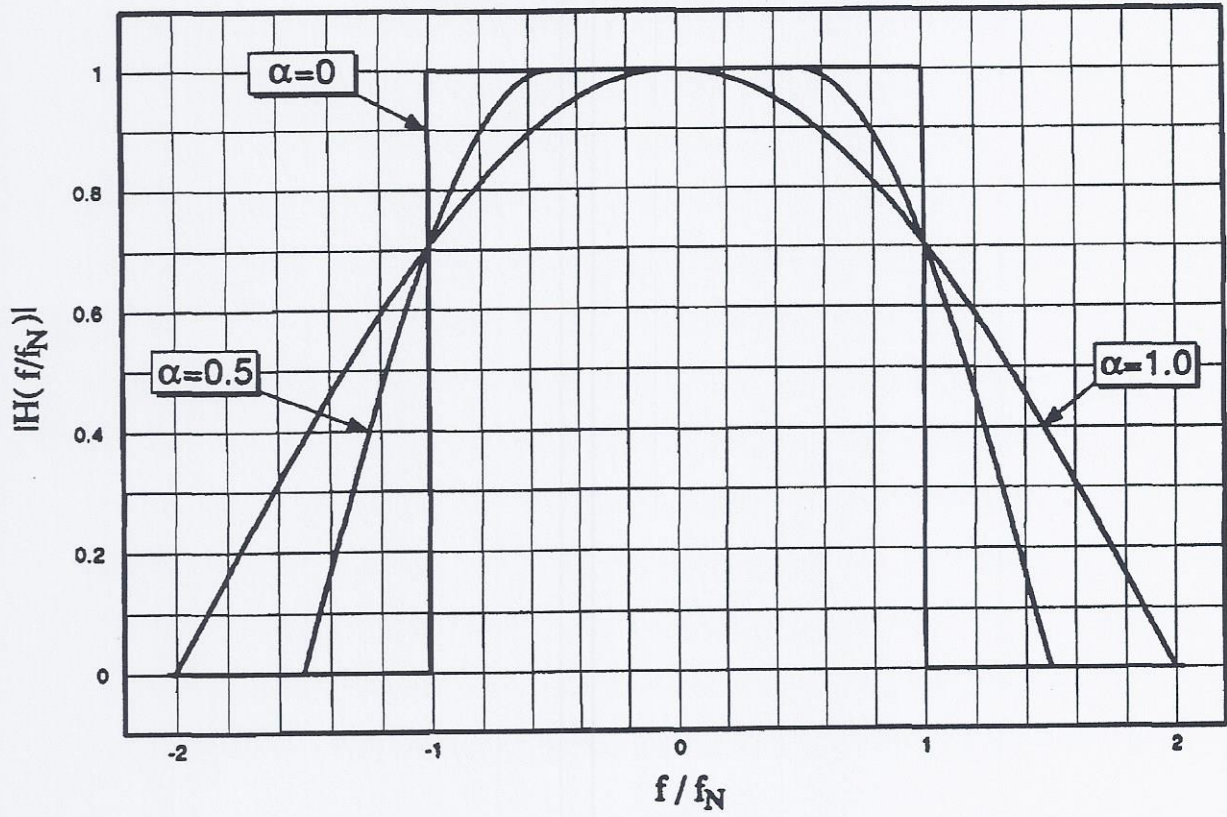
Raised Cosine Nyquist filter with excess bandwidth of α



$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 \leq f < \frac{1-\alpha}{2T} \\ \cos^2 \left[\frac{\pi T}{2\alpha} \left(f - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right] & \text{for } \frac{1-\alpha}{2T} \leq f < \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{for } f \geq \frac{1+\alpha}{T} \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos\left(\frac{\alpha \pi t}{T}\right)}{1 - \frac{4\alpha^2 t^2}{T^2}}$$

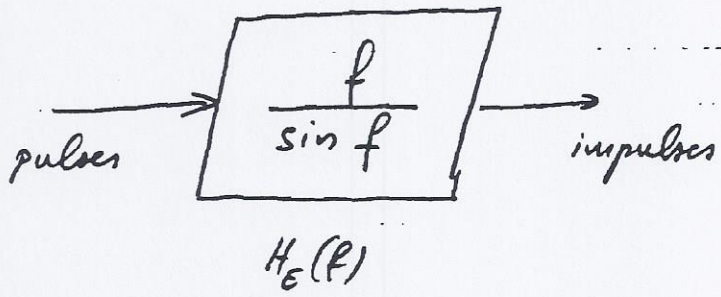
Root of raised-cosine transfer function



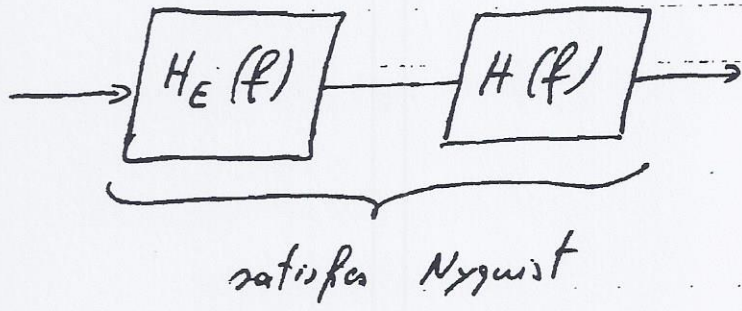
Important Note

The Nyquist filters (or equivalently impulse responses) have been derived assuming impulse transmission.

If we have pulse, which is the case for most practical applications, then we need a filter which transforms the pulses \rightarrow impulses

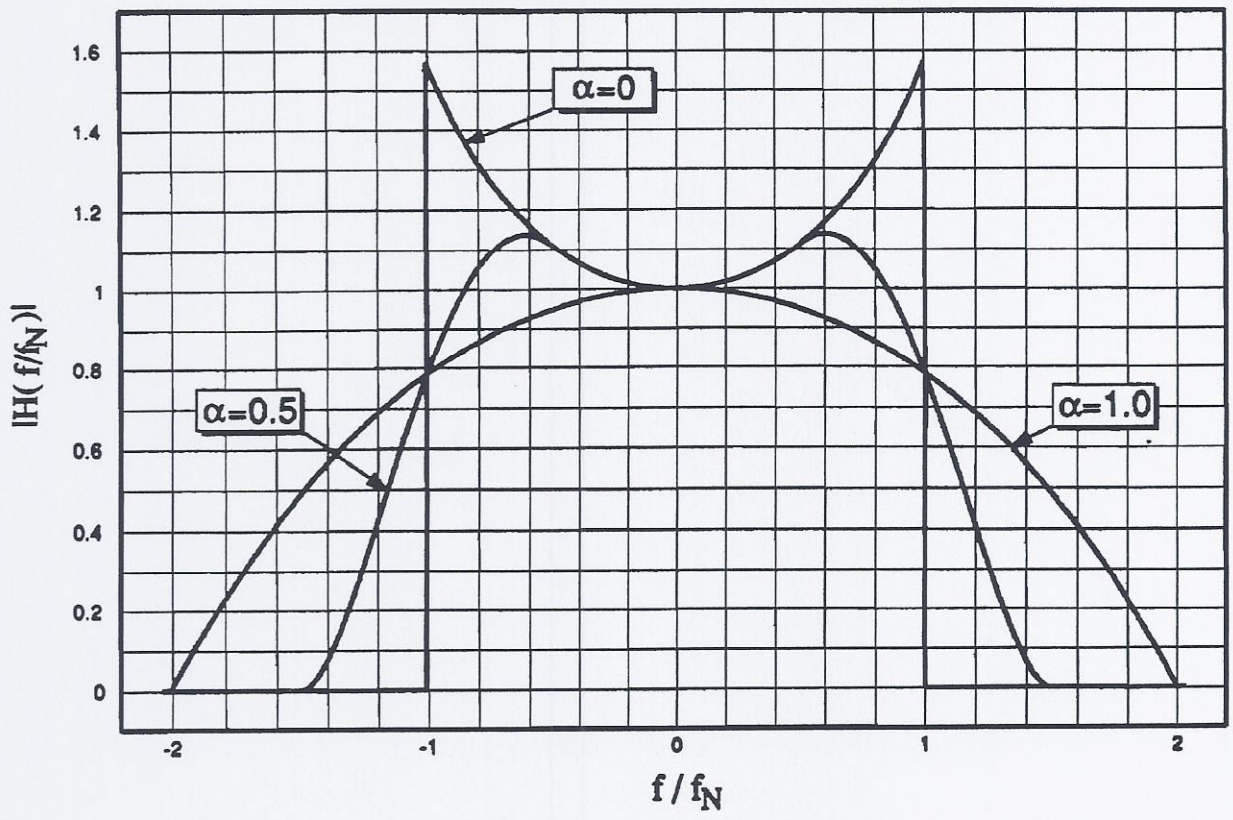


∴ For pulse transmission:

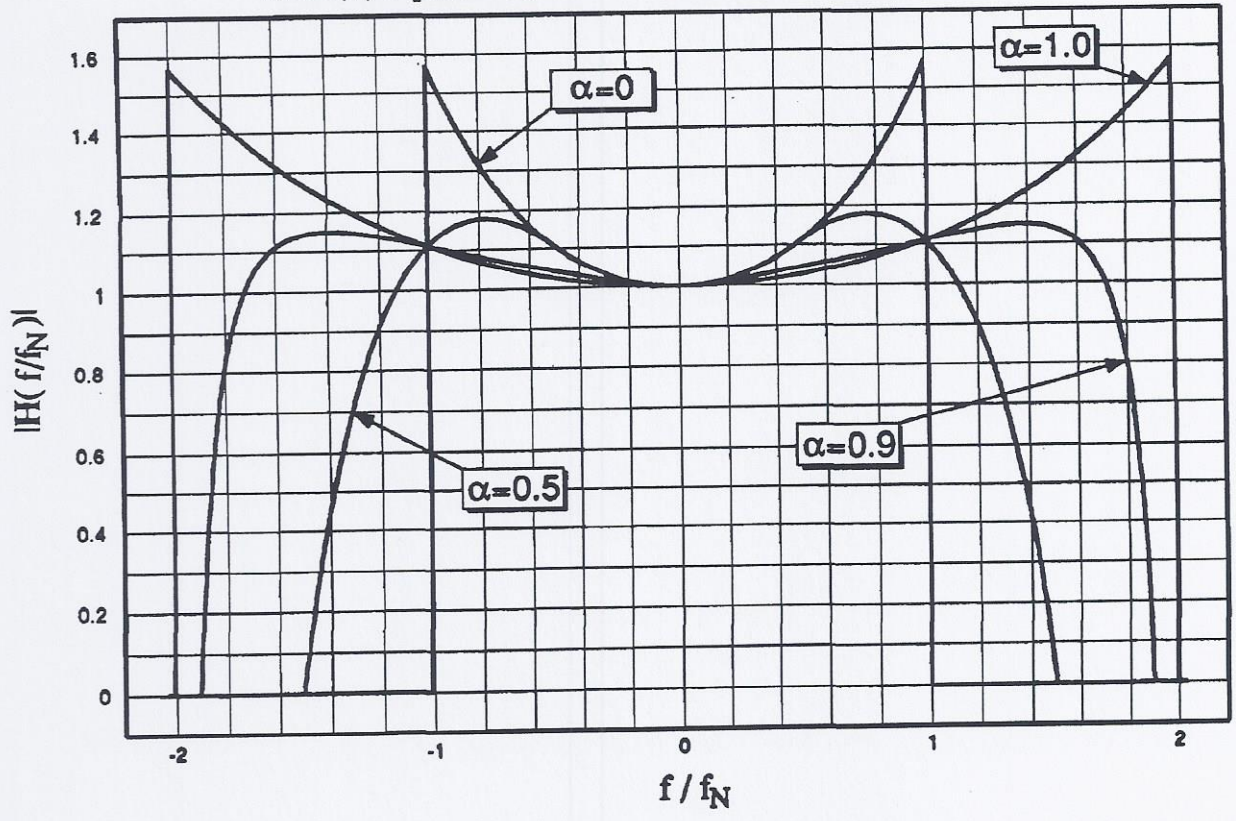


Also linear phase \Rightarrow constant group delay.

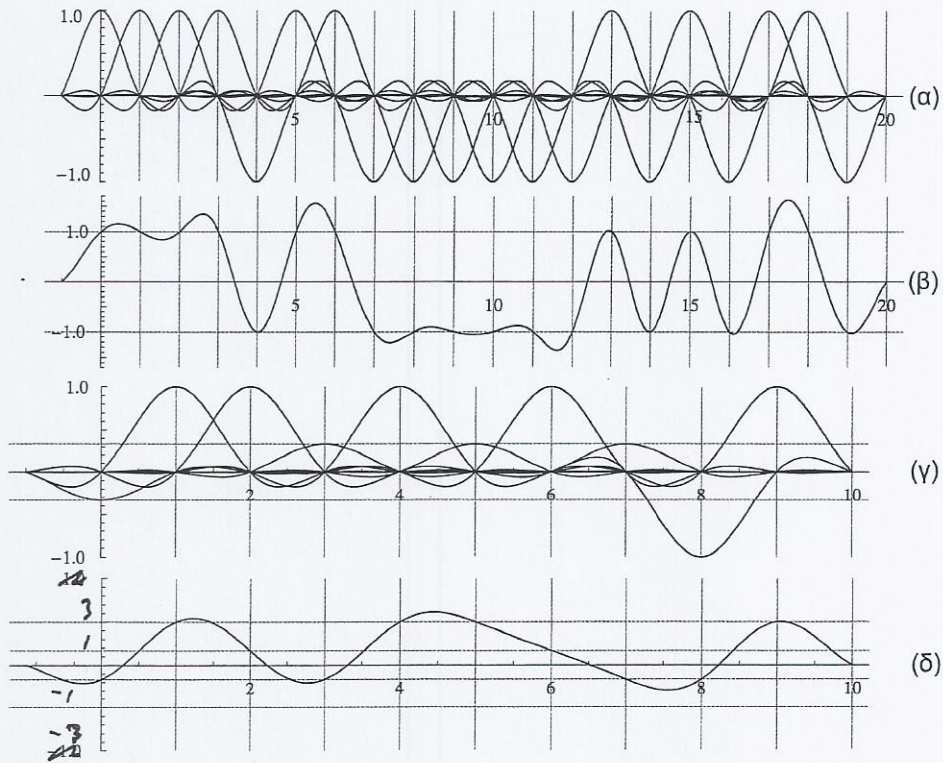
$x/\sin(x)$ equalized, raised-cosine transfer function



$x/\sin(x)$ equalized, root of raised-cosine transfer function



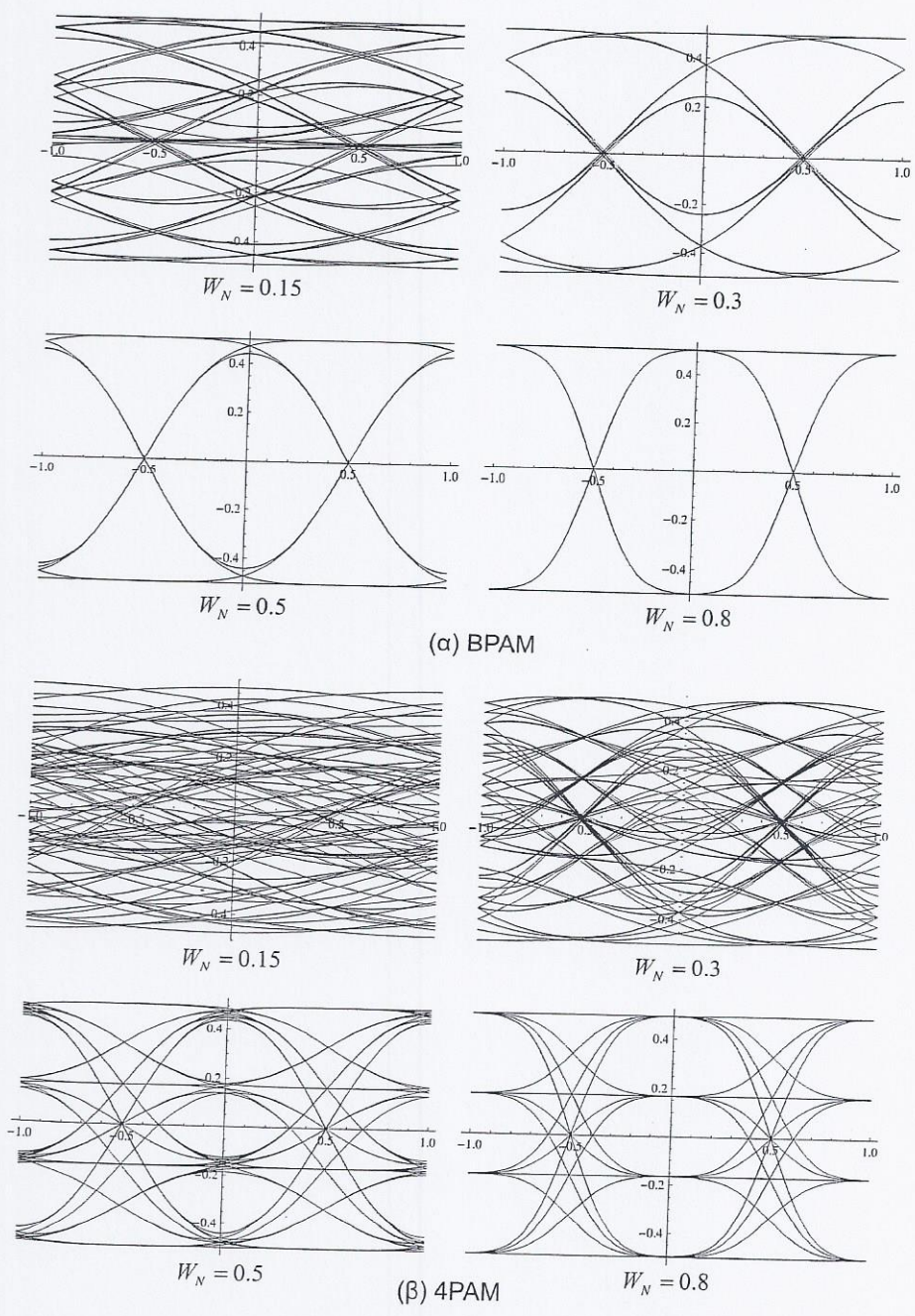
$\alpha = 0.35$



2-PAM

4-PAM

Σχήμα 9.10: Ακολουθία bits με παλμούς ανυψωμένου συνημιτόνου

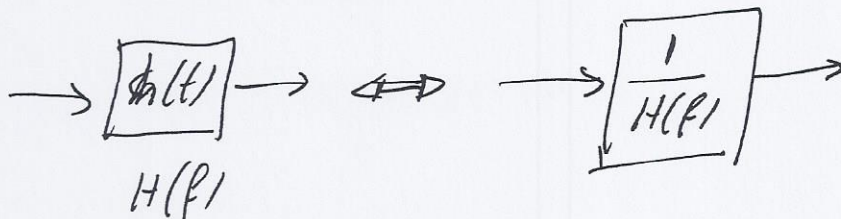


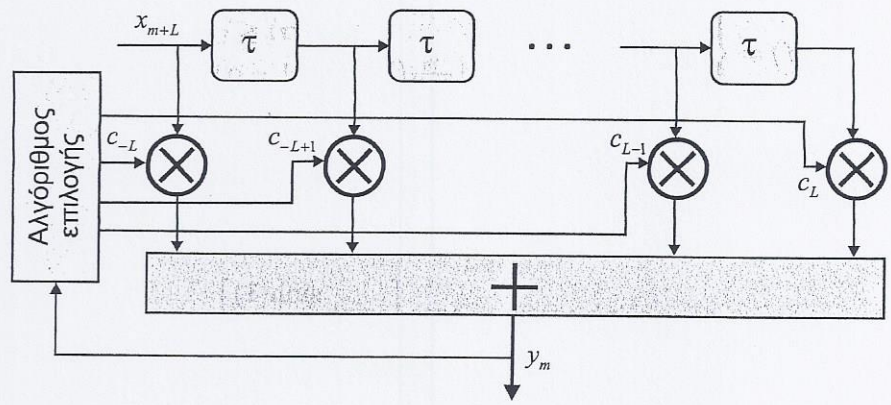
Σχήμα 9.8: Διαγράμματα οφθαλμού BPAM και 4PAM με Gaussian παλμούς

Equalizers - Ισοσταθμιστές

- Αντιμετώπιση της ISI
- "Undo" Channel
- ▷ Γραμμικοί Ισοσταθμιστές (Linear Equalizers)
- ▷ Μη-Γραμμικοί Ισοσταθμιστές (Non-linear ")
- ▷ Προσαρμοστικοί " (Adaptive ")

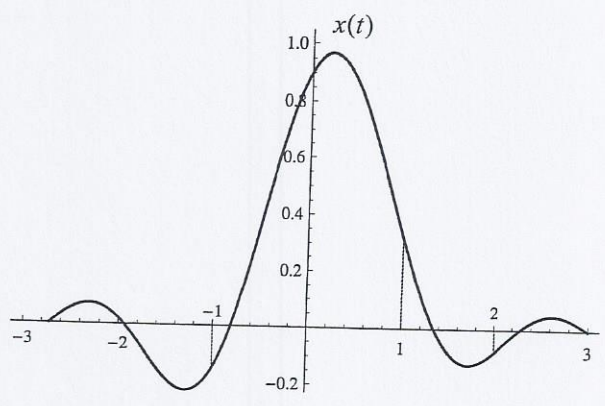
Γραμμικοί Ισοσταθμιστές





Σχήμα 9.12: Εγκάρσιο φίλτρο γραμμικού ισοσταθμιστή

- Finite Impulse Response (FIR) filter with $2L+1$ taps
- Πορμος ελευθερει μια πιοτιμω διαφορικη παλμω με μικρω διαρκεια



Σχήμα 9.13: Υπολογισμός των συντελεστών x_n του καναλιού σε πιλοτικό παλμό ανυψωμένου συνημιτόνου

$$x(-2) = 0.08, \quad x(-1) = -0.18, \quad x(0) = 0.9$$

$$x(1) = 0.3, \quad x(2) = -0.09$$

- Το σήμα εξόδου του εγκάρσιου φίλτρου (χωρίς το θόρυβο) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $2L + 1$ δειγμάτων εισόδου $x(mT - n\tau)$ και των σταθερών c_n σύμφωνα με τη σχέση

$$y_m = \sum_{n=-L}^L c_n x(mT - n\tau). \tag{9.32}$$

Η (9.32) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα υπό μορφή πινάκων ως

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XC} \tag{9.33}$$

και στην περίπτωση $\tau = T$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{-L} \\ \vdots \\ y_0 \\ \vdots \\ y_L \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{-L} \\ \vdots \\ c_0 \\ \vdots \\ c_L \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{-2L} \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_{-2L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2L} & x_{2L-1} & \cdots & x_0 \end{bmatrix}. \tag{9.34}$$

Στην (9.34) το \mathbf{Y} έχει διάσταση $2L+1$, οπότε ο πίνακας \mathbf{X} είναι τετραγωνικός με διάσταση $(2L + 1) \times (2L + 1)$. Έτσι τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{C} μπορούν να βρεθούν επιλύοντας την (9.33) ως

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}. \tag{9.35}$$

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η χρησιμοποίηση του εγκάρσιου φίλτρου για τη σχεδίαση διαφόρων τύπων ισοσταθμιστών.

Zero - Forcing Εξισώσεις (Ισοσταθμιστά επιβολή μηδενισμών)

Ο ισοσταθμιστής επιβολής μηδενισμών zero-forcing (ZF) προκύπτει αν επιβληθεί η συνθήκη του Nyquist στην έξοδο του αντίστροφου φίλτρου. Δηλαδή

$$y_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (9.36)$$

Τότε το διάνυσμα \mathbf{Y} (με διάσταση $2L + 1$) θα είναι

$$\mathbf{Y} = [0 \dots 1 \dots 0]^T \quad (9.37)$$

και οι συντελεστές c_n υπολογίζονται από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} c_{-L} \\ \vdots \\ c_0 \\ \vdots \\ c_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{-2L} \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_{-2L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2L} & x_{2L-1} & \cdots & x_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9.38)$$

Για τον ισοσταθμιστή ZF ισχύουν τα εξής:

- i. Χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την καταπολέμηση της διασυμβολικής παρεμβολής και της παραμόρφωσης που προκαλεί αυτή στον εκπεμπόμενο παλμό. Αυτό που επιτυγχάνει είναι η αποκατάσταση της μορφής του παλμού, με την επιβολή μηδενισμών στα σημεία δειγματοληψίας τα οποία εξαιτίας της παραμόρφωσης του παλμού λαμβάνονται μη-μηδενικά (Σχήμα 9.14).
- ii. Στην πράξη δεν καταργεί εντελώς την ISI. Αν όμως $L \rightarrow \infty$ τότε θεωρητικά η ISI εξαλείφεται πλήρως.
- iii. Δε λαμβάνει υπόψη τον προσθετικό θόρυβο. Αυτό έχει σαν συνέπεια να παρουσιάζει κακές επιδόσεις όσον αφορά την πιθανότητα σφάλματος σε περιβάλλον ισχυρού θορύβου.

Παράδειγμα 9.5

Οι συντελεστές του ισοδύναμου FIR φίλτρου του καναλιού σε τηλεπικοινωνιακό σύστημα μετρήθηκαν και βρέθηκαν

9-24

$$\{x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0.1, 0.3, -0.2, 1.0, 0.4, -0.1, 0.1\}. \quad (9.39)$$

Οι συντελεστές αυτοί χρησιμοποιούνται από έναν ισοσταθμιστή ZF symbol-spaced με τρία taps, ο οποίος επιβάλλει μηδενική ISI στις γειτονικές του κυρίως λοβού στιγμές δειγματοληψίας.

Να υπολογιστούν οι σταθερές c_n του ισοσταθμιστή και η ISI που παραμένει μετά την ισοστάθμιση.

Απάντηση

Οι συντελεστές c_n υπολογίζονται από τη σχέση (9.38) ως

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & x_{-2} \\ x_1 & x_0 & x_{-1} \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9.40) \\ &= \begin{bmatrix} 0.875 & 0.259 & -0.21 \\ -0.307 & 0.834 & 0.259 \\ 0.21 & -0.307 & 0.875 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.259 \\ 0.834 \\ -0.307 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Από τη σχέση (9.32), η οποία γράφεται εδώ (με $L = 1$ και $\tau = T$) ως

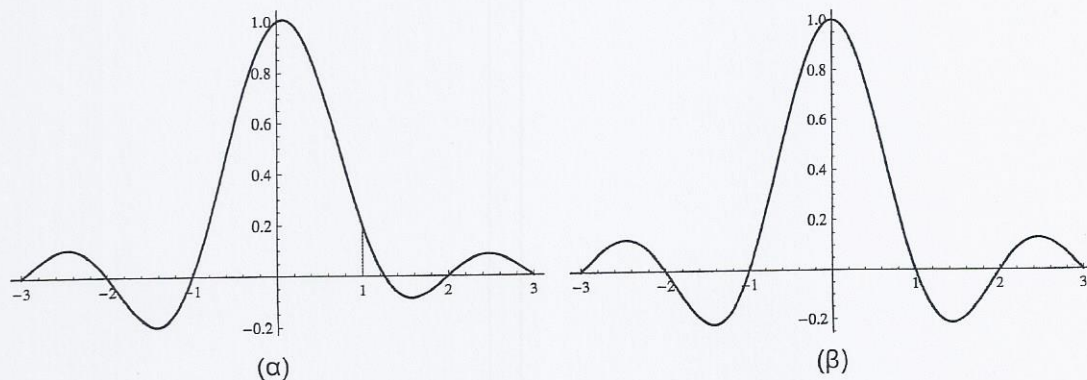
$$y_m = \sum_{n=-1}^1 c_n x(mT - nT) \quad (9.41)$$

μπορούν να υπολογιστούν οι δειγματοληπτημένες τιμές (για τις χρονικές στιγμές $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm L$) στην έξοδο του ισοσταθμιστή

$$\begin{aligned} y_{-3} &= 0.1613, y_{-2} = 0.1678, y_{-1} = 0, y_0 = 1 \\ y_1 &= 0, y_2 = -0.1807, y_3 = 0.1143. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Έτσι ο ισοσταθμιστής έχει σαν αποτέλεσμα το μηδενισμό της ISI στα γειτονικά αλλά αυτή συνεχίζει να παραμένει στα απομακρυσμένα σύμβολα.

Αν το μήκος του ισοσταθμιστή ήταν μεγαλύτερο από τρία taps τότε περισσότερα σημεία δειγματοληψίας θα είχαν μηδενική τιμή ISI.



Σχήμα 9.14: (α) Λαμβανόμενος παλμός RC με παραμόρφωση (β) Αποκατάσταση του παλμού μετά την ισοστάθμιση ZF

Minimum Mean Square Error (MMSE) Equalizer

Ισοσταθμιστής Ελάχισου Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος

- Πιο ακριβής λύση παρέχει υποψη στη διαστρωγική των και των ακραίων θορύβων.
- Οι c_n επιλέγονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το MMSE στην των οποίων ISI & θορύβου στην σφύδα των ισοσταθμιστή.

$$q_m = \sum_{n=-L}^L c_n z(mT - nT) \quad \left[z(t) = \sum_n a_n x(nT) + n(t) \right]$$

$$MSE = E \{ |q_m - a_m|^2 \}$$

Αποδεικνύεται ότι ο υπολογισμός των c_n στη διασυστήματος C

$$C = R_{xx}^{-1} R_{xy}$$

$R_{xx} = X^T X$ πίνακας αυτοσυστήματος (autocorrelation matrix)
 $R_{xy} = X^T Y$ " συσυστήματος (cross correlation matrix)

Μη-Γραμμικοί Ισοσταθμιστές

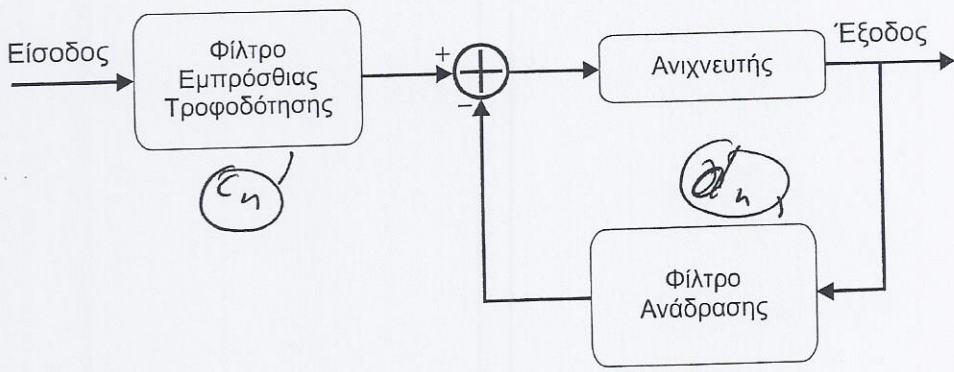
Ισοσταθμιστής ανάδρασης απόφασης (Decision Feedback Equalizer)

$$z_m = a_m x_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} a_n x_{m-n} + \eta_m$$

Αν γνωρίζουμε τα a_n (με $n \neq m$) \Rightarrow ISI cancellation

$$\Rightarrow \hat{z}_m = z_m - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} a_n x_{m-n}$$

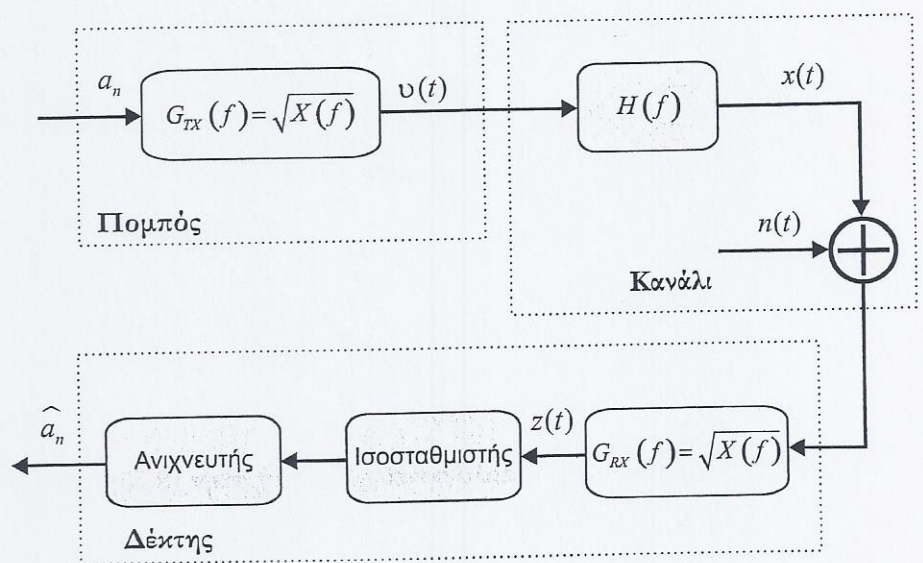
No ISI but only noise.



Σχήμα 9.15: Ισοσταθμιστής ανάδρασης απόφασης

$$\hat{z}_m = \sum_{n=1}^{Q_1} c_n z_{m-n} - \sum_{n=1}^{Q_2} d_n \hat{a}_{m-n}$$

How to split the Nyquist filter between Transmitter & Receiver.



Σχήμα 9.17: Φίλτρα εκπομπής και λήψης σε ψηφιακό τηλεπικοινωνιακό σύστημα