

## Ασκήσεις για το μάθημα «Αναγνώριση Προτύπων»

1. Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο κλάσεων στο μονοδιάστατο χώρο. Υπάρχει περίπτωση η πιθανότητα σφάλματος ταξινόμησης να είναι μεγαλύτερη από  $\frac{1}{2}$ ; Αν ναι δώστε ένα παράδειγμα. Αν όχι δικαιολογήστε (το ερώτημα γενικεύεται και σε χώρους / διαστάσεων).

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes, γράψτε την πιθανότητα λάθους ως

$$P_e = \int_{R_2} P(\omega_1|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{R_1} P(\omega_2|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

2. Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο κλάσεων,  $\omega_1$  και  $\omega_2$ . Βρείτε τουλάχιστον μία ικανή συνθήκη κάτω από την οποία ο ταξινομητής Bayes, για το πρόβλημα διαχωρισμού των δύο αυτών κλάσεων, θα αποφασίζει συνέχεια υπέρ της κλάσης  $\omega_1$ .
3. Δείξτε ότι σε ένα πρόβλημα ταξινόμησης με  $M$  κλάσεις, η πιθανότητα σφάλματος ταξινόμησης για τον βέλτιστο ταξινομητή φράσσεται σύμφωνα με την σχέση

$$P_e \leq \frac{M-1}{M}$$

**Υπόδειξη:** Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε  $\mathbf{x}$ , το μέγιστο μεταξύ των  $P(\omega_i|\mathbf{x})$ ,  $i=1, 2, \dots, M$  είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το  $1/M$ . Η ισότητα ισχύει αν όλες οι  $P(\omega_i|\mathbf{x})$  είναι ίσες. Επίσης χρησιμοποιήστε (αφού πρώτα την αποδείξετε) την έκφραση

$$P(e) = 1 - \int P(\omega_{\max}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x},$$

όπου το ολοκλήρωμα εκτείνεται σε όλο το χώρο των δειγμάτων.

4. Σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα ταξινόμησης δύο κλάσεων,  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι οι Gaussian  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  και  $\mathcal{N}(1, \sigma^2)$  για τις δύο κλάσεις, αντιστοίχως. Προσδιορίστε τις περιοχές απόφασης  $R_1$  και  $R_2$  που αντιστοιχούν στις κλάσεις  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , αντίστοιχα.
5. Επαναλάβετε την άσκηση 3 για την περίπτωση όπου οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας είναι οι Gaussian  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  και  $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ .
6. Θεωρήστε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα δύο (ισοπίθανων) κλάσεων με δείγματα που κατανέμονται σύμφωνα με την Rayleigh κατανομή για κάθε κλάση, δηλαδή,

$$p(x|\omega_i) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Υπολογίστε τις περιοχές απόφασης για κάθε κλάση.

7. Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο (ισοπίθανων) κλάσεων,  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , όπου η κλάση  $\omega_1$  μοντελοποιείται από την κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(0, 1)$  ενώ η κλάση  $\omega_2$  μοντελοποιείται από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .  
 (α) Προσδιορίστε τις περιοχές απόφασης  $R_1$  και  $R_2$  για τις δύο κλάσεις.  
 (β) Μπορείτε να προσδιορίσετε τη πιθανότητα λάθους ταξινόμησης;
8. Θεωρείστε ένα πρόβλημα δύο κλάσεων,  $\omega_1$  και  $\omega_2$ , στο δισδιάστατο χώρο, με  $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ . Προσδιορίστε τις περιοχές απόφασης για τις παραπάνω κλάσεις και χαρακτηρίστε την επιφάνεια απόφασης (δηλ. αναφέρετε αν είναι έλλειψη, παραβολή κλπ) αν  $p(\mathbf{x}|\omega_1) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_1)$ ,  $p(\mathbf{x}|\omega_2) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_2)$ , με  
 (α)  $\boldsymbol{\mu}_1 = [0, 0]^T$ ,  $\boldsymbol{\mu}_2 = [4, 0]^T$  και

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.35 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.0 \\ 0.0 & 1.85 \end{bmatrix}$$

(β)  $\boldsymbol{\mu}_1 = [0, 0]^T$ ,  $\boldsymbol{\mu}_2 = [3.2, 0]^T$  και

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.0 \\ 0.0 & 0.75 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1 \end{bmatrix}$$