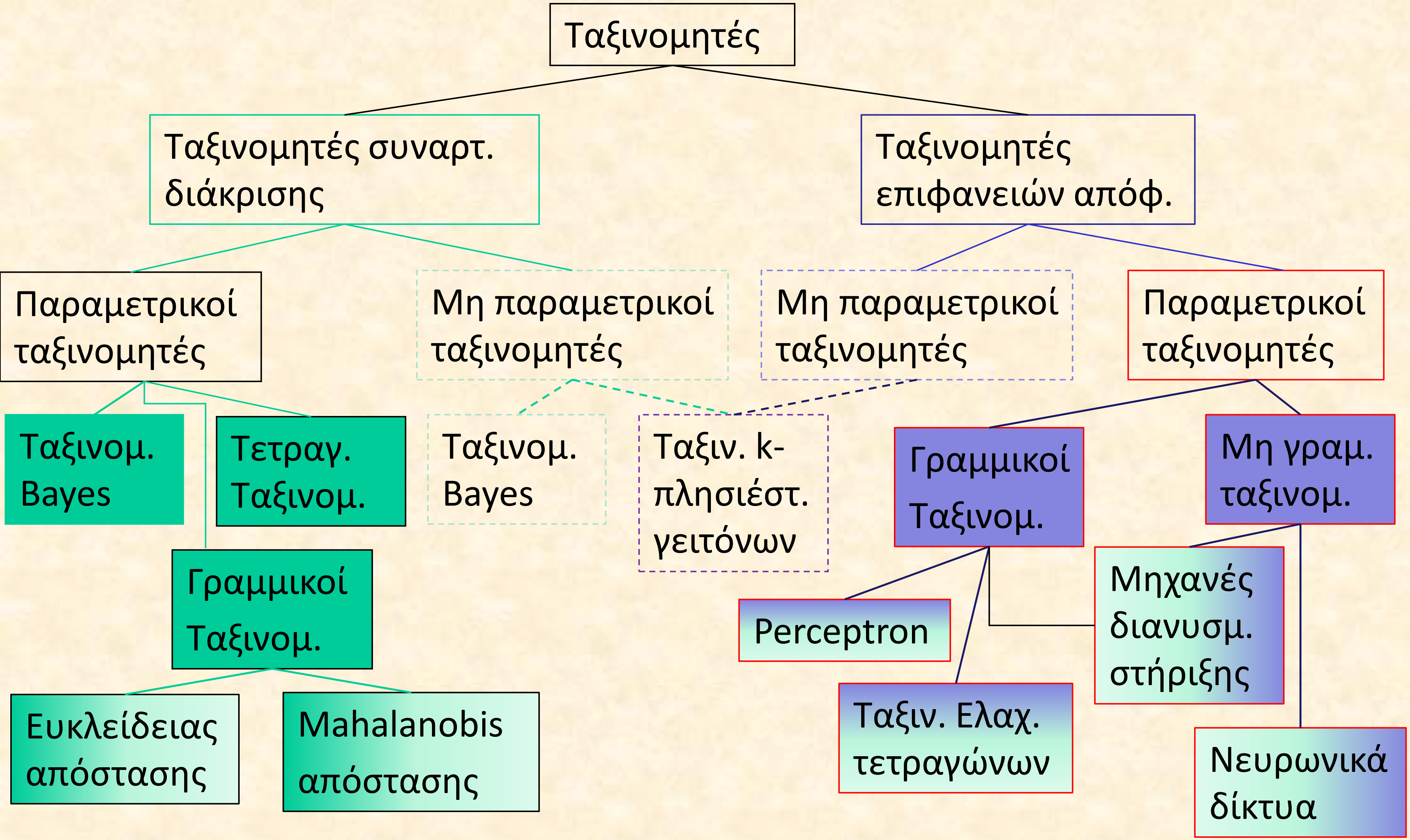
❖ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ
❖(PATTERN RECOGNITION)

Σέργιος Θεοδωρίδης

Κωνσταντίνος Κουτρούμπας

Version 2

“ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΗΣΗ” ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΩΝ



“ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΗΣΗ” ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΩΝ

Υπενθ.: X είναι το σύνολο των δεδομένων σημείων όλων των κλάσεων

X_j είναι το υποσύνολο του X που περιέχει τα διανύσματα της κλάσης ω_j,

$X=X_1 \cup \ldots \cup X_M$

Ταξινομητές με βάση τις συναρτήσεις διάκρισης

Ταξινομ. Bayes

$-g_j(x) = f(P(\omega_j)p(x|\omega_j))$

$-\text{Εκτιμ. } p(x|\omega_j) \approx \hat{p}(x|\omega_j;\vartheta_j)$

$-\text{Εκτιμ. } \vartheta_j, \text{ με βάση το } X_j$

$(ML,\ EM): X_j \rightarrow \hat{\vartheta}_j$

$-x_i \rightarrow p(x_i|\omega_j) \approx \hat{p}(x_i|\omega_j;\hat{\vartheta}_j)$

Τετραγωνικός ταξινομητής

$-g_j(x) = (x-\mu_j)^T \Sigma_j^{-1}(x-\mu_j)$

$-\text{Υπόθεση}: \ N(\mu_j, \Sigma_j)$

$-\text{Εκτιμ. } \mu_j, \ \Sigma_j, \text{ με βάση το } X_j$

$(ML): X_j \rightarrow \hat{\mu}_j, \hat{\Sigma}_j$

$-x_i \rightarrow g_j(x_i) = (x_i - \hat{\mu}_j)^T \hat{\Sigma}_j^{-1}(x_i - \hat{\mu}_j)$

Γραμμικός Ευκλείδειος ταξινομητής

$-g_j(x) = (x-\mu_j)^T(x-\mu_j)$

$-\text{Υπόθεση}: \ N(\mu_j, I)$

$-\text{Εκτίμ. } \mu_j, \text{ με βάση το } X_j$

$(ML): X_j \rightarrow \hat{\mu}_j$

$-x_i \rightarrow g_j(x_i) = (x_i - \hat{\mu}_j)^T(x_i - \hat{\mu}_j)$

Γραμμικός Mahalanobis ταξινομητής

$-g_j(x) = (x-\mu_j)^T \Sigma^{-1}(x-\mu_j)$

$-\text{Υπόθεση}: \ N(\mu_j, \Sigma)$

$-\text{Εκτίμ. } \mu_j, \ \Sigma, \text{ με βάση το } X_j$

$(ML): X_j \rightarrow \hat{\mu}_j, \hat{\Sigma}$

$-x_i \rightarrow g_j(x_i) = (x_i - \hat{\mu}_j)^T \hat{\Sigma}^{-1}(x_i - \hat{\mu}_j)$

“ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΗΣΗ” ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΩΝ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΩΝ

Υπενθ.: X είναι το σύνολο των δεδομένων σημείων όλων των κλάσεων

X_j είναι το υποσύνολο του X που περιέχει τα διανύσματα της κλάσης ω_j,

$X=X_1\cup\ldots\cup X_M$

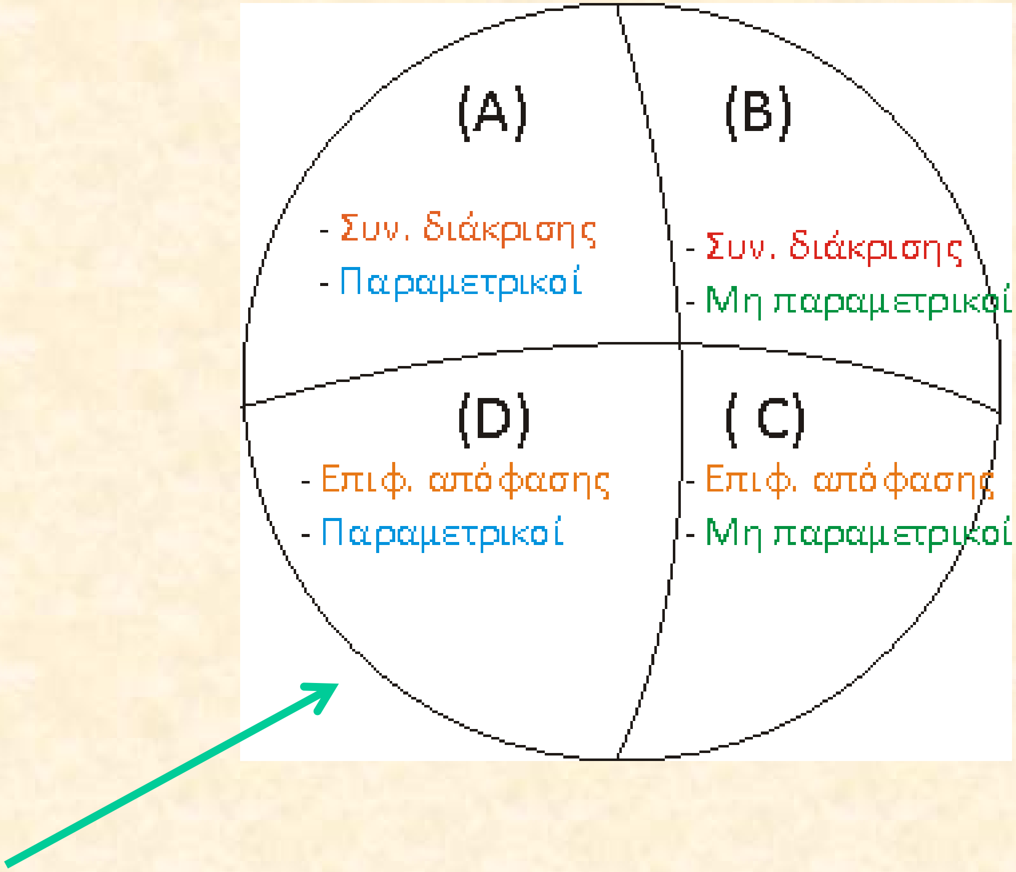
Μη παραμετρικοί ταξινομητές με βάση τις συναρτήσεις διάκρισης

Ταξινομητής Bayes

$$-\,g_j(x)=f(P(\omega_j)\,p(x\,|\,\omega_j))$$
$$-\,x_i\to p(x_i\,|\,\omega_j)\approx\hat{p}(x_i\,|\,\omega_j;X_j)$$
$$(\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\theta\upsilon\rho\alpha\ \text{Parzen},$$
$$\varepsilon\kappa\tau\acute{\iota}\mu.\ \pi\upsilon\kappa\nu.\ \beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\ \tau\omega\nu\ k-\pi\lambda\eta\sigma.\ \gamma\varepsilon\iota\tau.$$

Ταξινομητής k-πλησιέστερων γειτόνων

$$-\,x_i\to g_j(x_i)=k_i^j$$


(A)
- Συν. διάκρισης
- Παραμετρικοί
(B)
- Συν. διάκρισης
- Μη παραμετρικοί
(D)
- Επιφ. απόφασης
- Παραμετρικοί
(C)
- Επιφ. απόφασης
- Μη παραμετρικοί

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Μερικά προκαταρτικά:

- **Στην πράξη** έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύνολο δεδομένων (training set)

$$X = \{(x_i, d_i), x_i \in R^l, d_i \in \{1,2,\dots,M\}, i = 1,\dots N\}$$

όπου

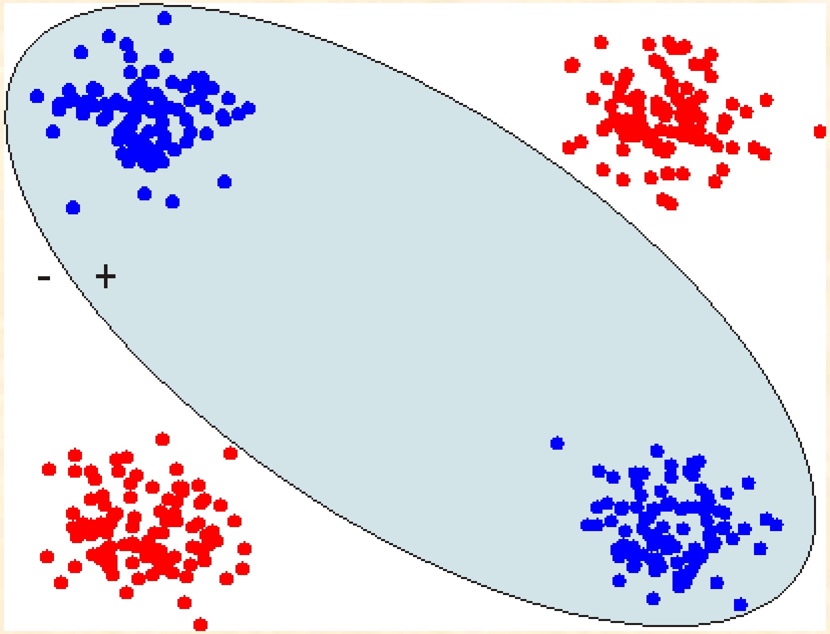
$\boldsymbol{x}_i$ είναι η l-διάστατη αναπαράσταση της i-στής οντότητας ενός συνόλου N οντοτήτων (training vector)

d_i είναι η ετικέτα της κλάσης στην οποία ανήκει το $\boldsymbol{x}_i$ (1 για ω_1, 2 για ω_2,…).

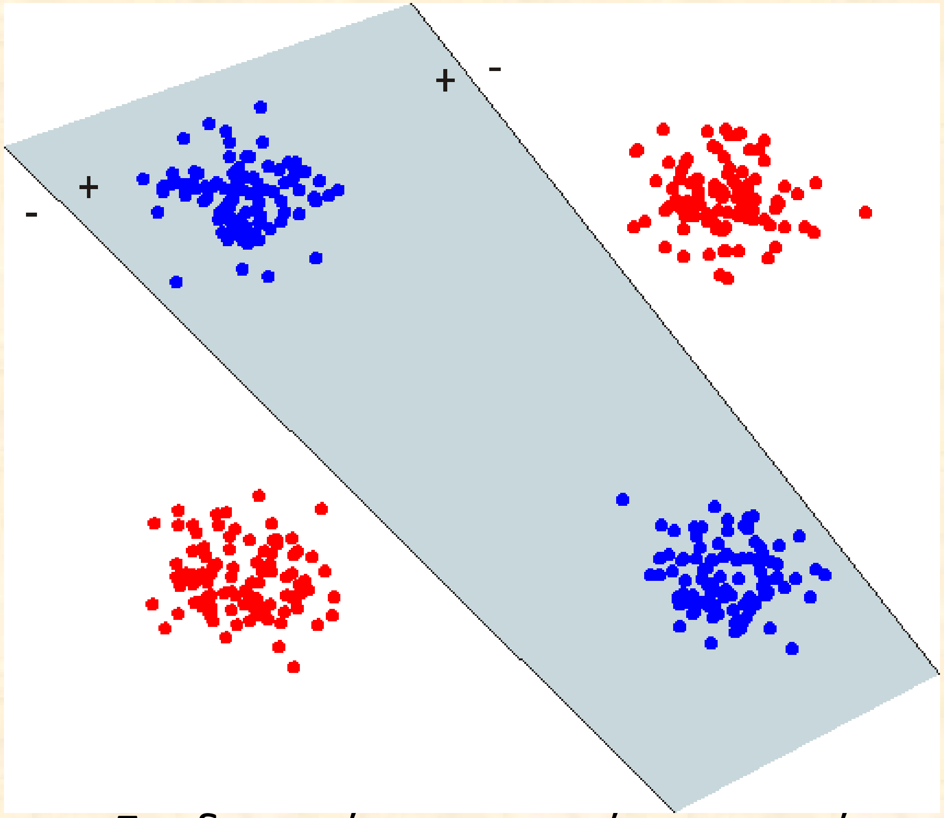
- Εστιάζουμε κυρίως στην περίπτωση δύο κλάσεων
  (συνήθως $\omega_1 \rightarrow +1$ ή Α **και** $\omega_2 \rightarrow -1(0)$ ή Β).
- Δεν υιοθετούμε κάποια υπόθεση σχετικά με τις συναρτήσεις πυκν. πιθ. (pdfs) που μοντελοποιούν τις κλάσεις.
- Εστιάζουμε σε ταξινομητές που δύνανται να υλοποιήσουν μη γραμμικούς διαχωρισμούς μεταξύ των (δεδομένων των) κλάσεων.

-***<u>ΣΗΜ.:</u>*** Μη γραμμικοί διαχωρισμοί μπορούν να επιτευχθούν είτε μέσω μιας μη γραμμικής επιφανειας, είτε μέσω συνδυασμού μερικών γραμμικών η μη γραμμικών επιφανειών. Σε κάθε περίπτωση ορίζεται μια **επιφάνεια απόφασης**.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΑΠΟΦΑΣΗΣ



Μία μη γραμμική επιφάνεια



Συνδυασμός περισσοτέρων της μίας επιφανειών

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Σημ.: Εκτός αν ορίζεται διαφορετικά, θεωρούμε την περίπτωση των δύο κλάσεων, i.e., ω_1 (+1) and ω_2 (-1).

Ορισμός του προβλήματος: Δοθέντος ενός συνόλου δεδομένων *X* σχεδίασε ένα ταξινομητή που επιτυγχάνει τον "βέλτιστο" δυνατό διαχωρισμό των (διανυσμάτων των) δύο κλάσεων.

Στρατηγική επίλυσης:

1. **Υιοθέτησε** ένα συγκεκριμένο (μη γραμμικό) παραμετρικό μοντέλο για τον ταξινομητή (***w*** είναι το διάνυσμα που περιέχει όλες τις παραμέτρους του).
2. **Όρισε** κατάλληλη συνάρτηση κόστους (cost function) του ***w***, *J*(***w***), η οποία εμπλέκει επίσης τα διανύσματα του *X*, έτσι ώστε **οι θέσεις των βέλτιστών της να αντιστοιχούν στο βέλτιστο δυνατό διαχωρισμό για το πρόβλημα.** **Βελτιστοποίησε την** *J*(***w***) ως προς ***w***. **Η θέση *w* όπου η** *J*(***w***) **παρουσιάζει βέλτιστο ορίζει τον καλύτερο δυνατό διαχωρισμό**.

Σημαντική παρατήρηση: Η έννοια της φράσης "καλύτερος δυνατός διαχωρισμός" διαφέρει για διαφορετικές επιλογές της *J*(***w***).

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

Σύντομη υπενθύμιση:

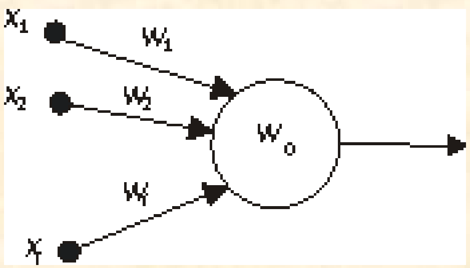
- Ένας γραμμικός ταξινομητής ορίζεται **μέσω** ενός υπερεπιπέδου

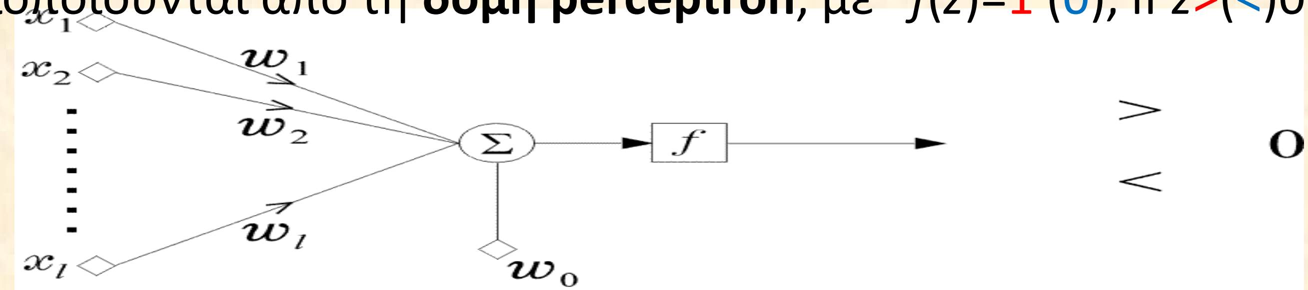
$$(H): h(x,w) = w_1\, x_1 + \ldots + w_l\, x_l + w_0 = \sum_{k=1}^{l} w_k x_k + w_0 = w^T x \;+\; w_0 = 0$$

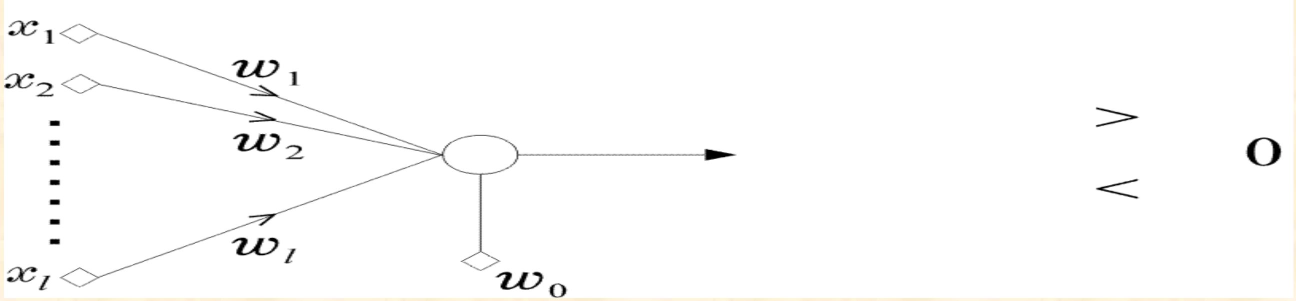
όπου $\boldsymbol{w}=[w_1,\ldots,w_l]^T$, $\boldsymbol{x}=[x_1,\ldots,x_l]^T$ (η γνώση των $\boldsymbol{w}$ και w_0 ορίζει πλήρως το (H))

- Αν για δεδομένο $\boldsymbol{x}$ είναι $\underline{h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}+w_0>(<)0}$, το $\boldsymbol{x}$ καταχωρείται στην κλάση +1(0).

-Τέτοιοι ταξινομητές υλοποιούνται από τη **δομή perceptron**, με $f(z)$=1 (0), if $z>(<)0$

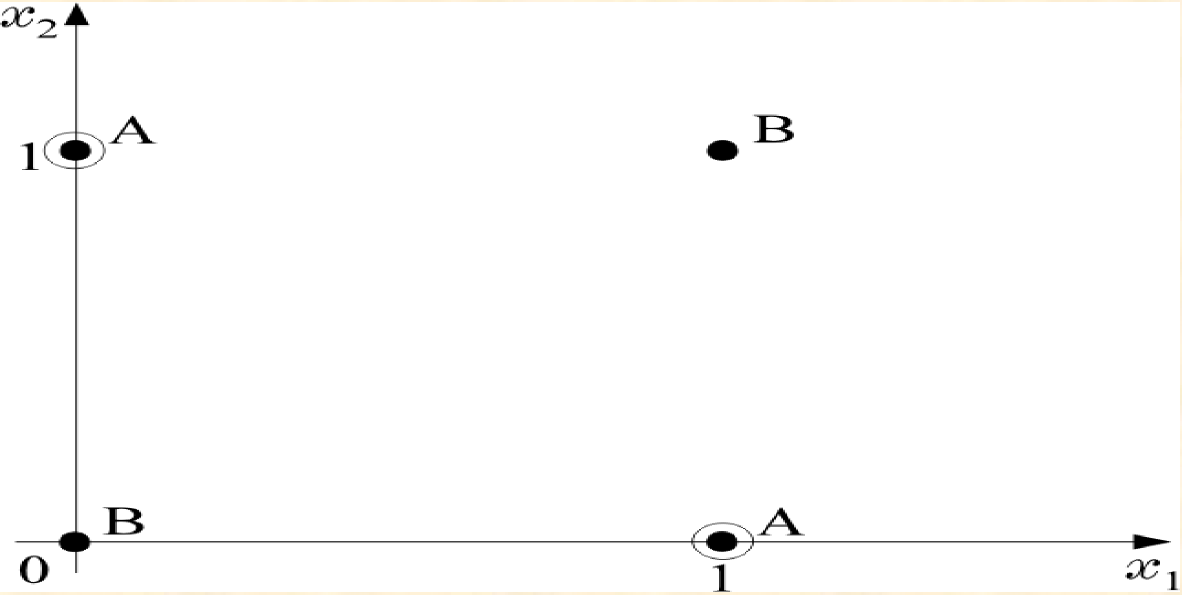






Το πρόβλημα exclusive OR (*XOR*)

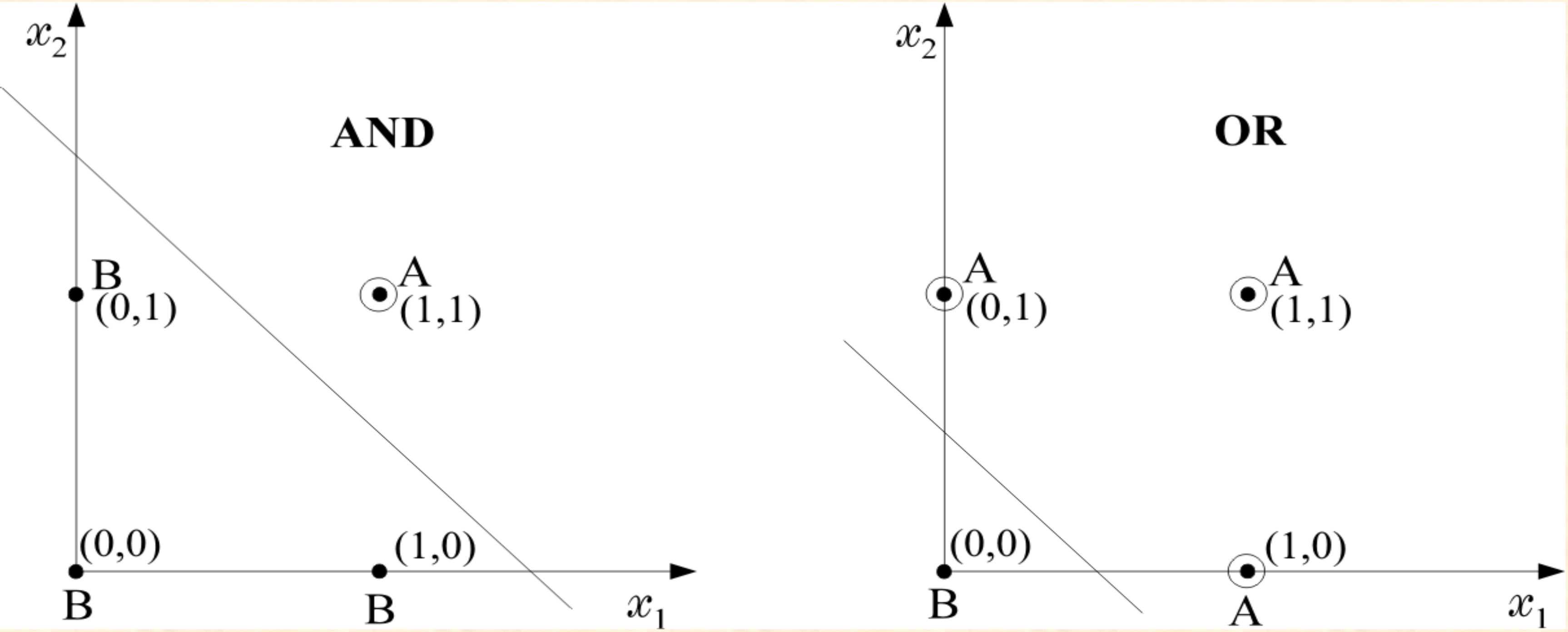
x_1	x_2	XOR	Class
0	0	0	B
0	1	1	A
1	0	1	A
1	1	0	B



Δεν υπάρχει καμία γραμμή (υπερεπίπεδο) που διαχωρίζει την κλάση A από την κλάση B.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Αντίθετα, τα προβλήματα *AND* και *OR* είναι γραμμικώς διαχωρίσιμα.

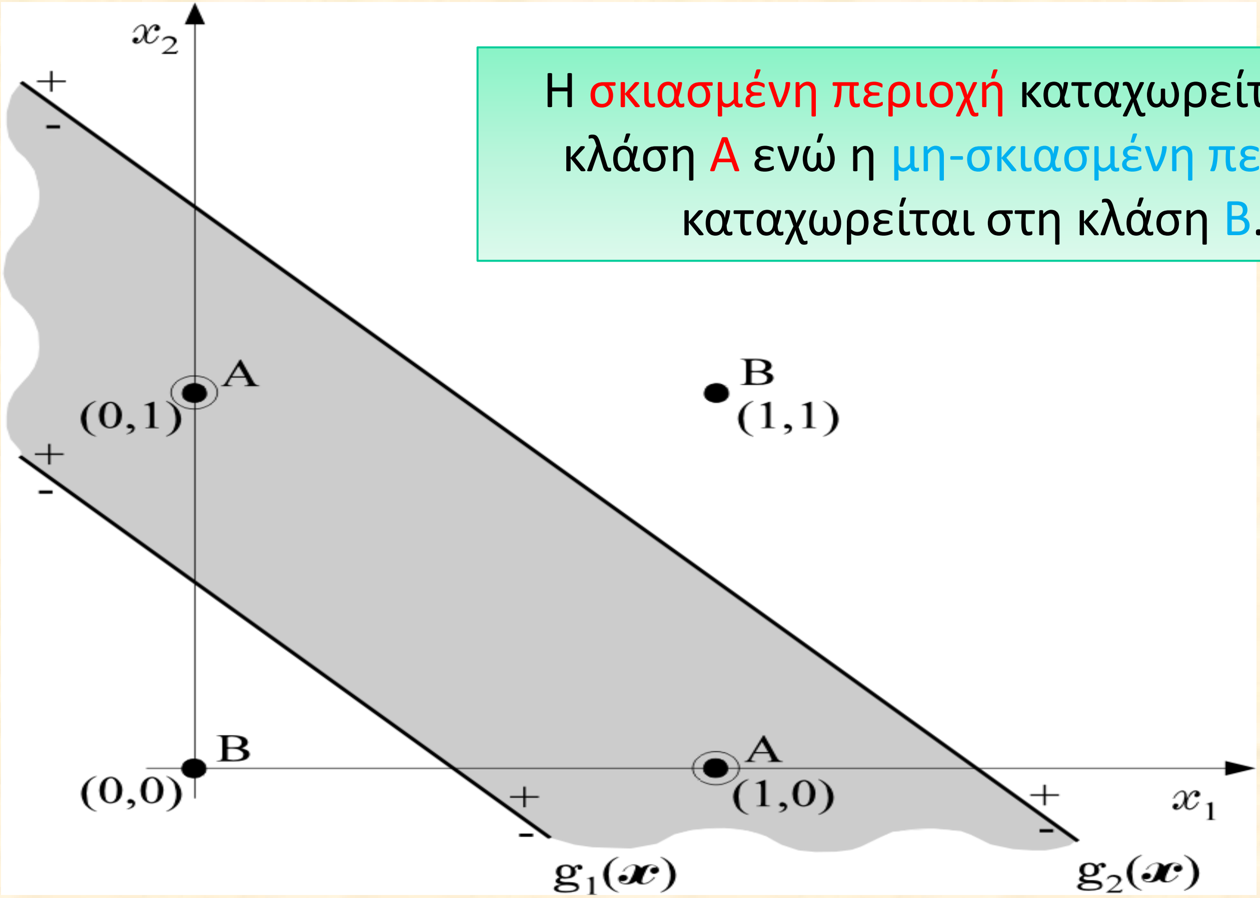


ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Η δομή δικτύου Perceptron δύο επιπέδων

Για το πρόβλημα *XOR*, σχεδίασε δύο, αντί για μία γραμμές.

Η σκιασμένη περιοχή καταχωρείται στη κλάση Α ενώ η μη-σκιασμένη περιοχή καταχωρείται στη κλάση Β.



ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Η δομή δικτύου Perceptron δύο επιπέδων

Έστω ότι το $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]^T$ απεικονίζεται στο διάνυσμα $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2]^T$, όπου το y_i ισούται με 1(0), αν το $\boldsymbol{x}$ ανήκει στη θετική (αρνητική) πλευρά της i-στής γραμμής, i=1,2. Τότε

Απεικόνιση				**Διαχωρισμός**
x_1	x_2	y_1	y_2	
0	0	0(-)	0(-)	B(0)
0	1	1(+)	0(-)	A(1)
1	0	1(+)	0(-)	A(1)
1	1	1(+)	1(+)	B(0)

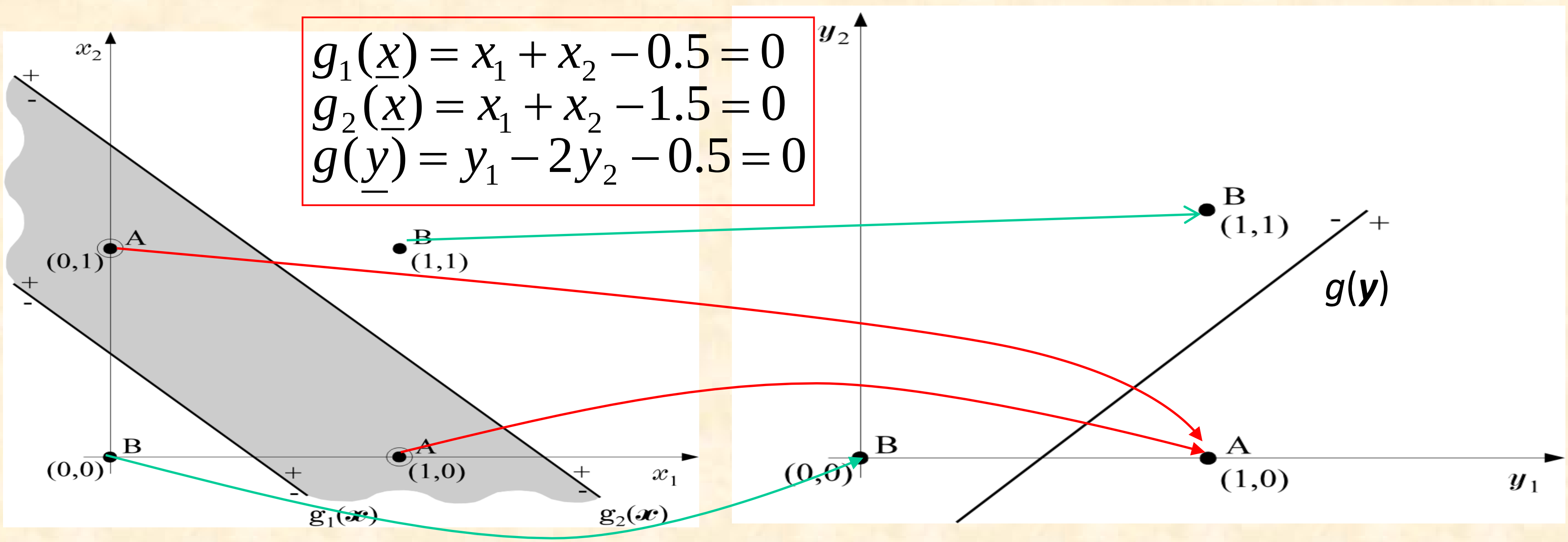
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Η δομή δικτύου Perceptron δύο επιπέδων

Έστω ότι το $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2]^T$ απεικονίζεται στο διάνυσμα $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2]^T$, όπου το y_i ισούται με 1(0), αν το ***x*** ανήκει στη θετική (αρνητική) πλευρά της *i*-στής γραμμής, *i*=1,2. Τότε,

- κάθε σημείο της σκιασμένης περιοχής απεικονίζεται στο σημείο (1,0) στο νέο χώρο
- κάθε σημείο της μη σκιασμένης περιοχής απεικονίζεται είτε στο (0,0) είτε στο (1,1).

$$g_1(\underline{x}) = x_1 + x_2 - 0.5 = 0$$
$$g_2(\underline{x}) = x_1 + x_2 - 1.5 = 0$$
$$g(\underline{y}) = y_1 - 2y_2 - 0.5 = 0$$



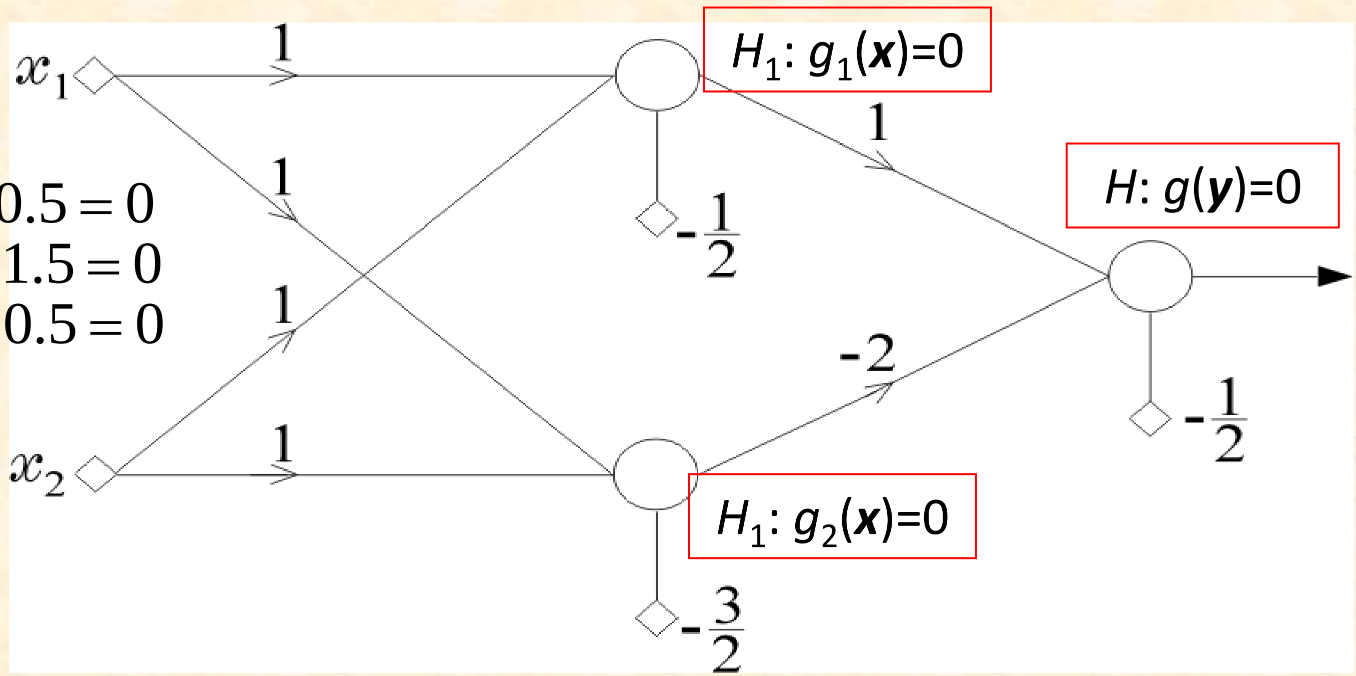
ΣΗΜ.: Το πρόβλημα γίνεται γραμμικώς διαχωρίσιμο στο μετασχηματισμένο χώρο.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Η δομή δικτύου Perceptron δύο επιπέδων - Υλοποίηση

- Τοποθέτησε δύο νευρώνες (perceptrons) στο ίδιο (**πρώτο**) **επίπεδο**. Ο πρώτος (δεύτερος) υλοποιεί το διαχωρισμό που ορίζεται από τη γραμμή $g_1(\boldsymbol{x})=0$ ($g_2(\boldsymbol{x})=0$).
- Τοποθέτησε έναν επιπλέον νευρώνα στο **δεύτερο επιπεδο**, που παίρνει σαν είσοδο τις εξόδους των προηγουμένων δύο νευρώνων και υλοποιεί την ταξινόμηση στο μετασχηματισμένο χώρο.

$$H_1 : g_1(\underline{x}) = x_1 + x_2 - 0.5 = 0$$
$$H_2 : g_2(\underline{x}) = x_1 + x_2 - 1.5 = 0$$
$$H : g(y) = y_1 - 2y_2 - 0.5 = 0$$

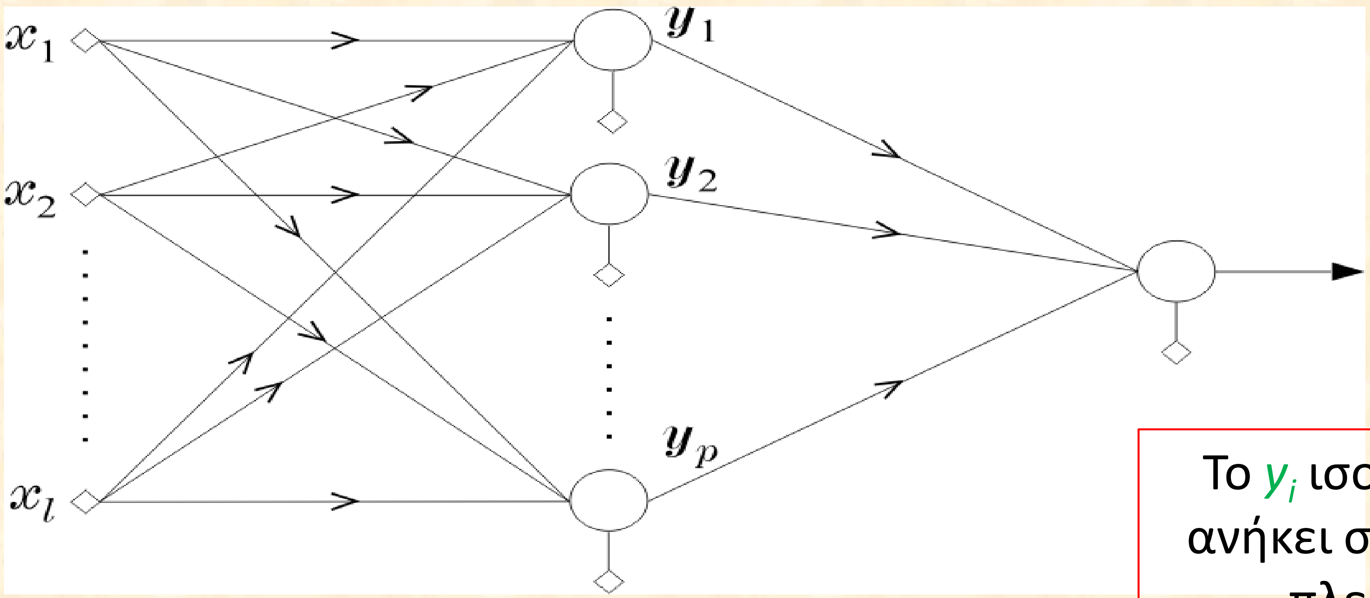


ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Δυνατότητες ταξινόμησης των δικτύων perceptrons δύο επιπέδων

- Στην περίπτωση το προβλήματος *XOR*, οι νευρώνες του πρώτου επιπέδου απεικονίζουν τα διανύσματα εισόδου (***x***) στις κορυφές του κύβου με πλευρά ίση με 1, δηλ., στις (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).
- Στη γενικότερη περίπτωση όπου $\mathbf{x} \in R^l$ και χρησιμοποιούνται p (πρώτου επιπέδου) νευρώνες, η απεικόνιση γίνεται στις κορυφές του H_p υπερκύβου, δηλ.,

$$x \rightarrow y = [y_1, \ldots y_p]^T, \; y_i \in \{0, 1\} \;\; i = 1, 2, \ldots p$$



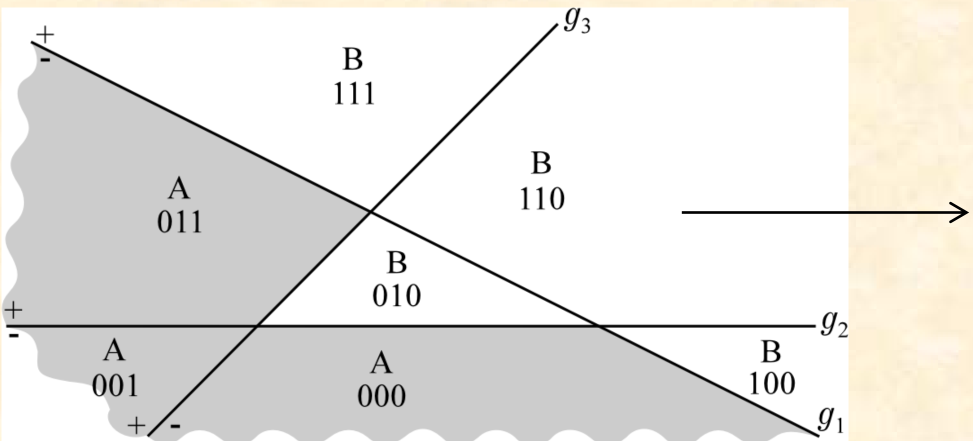
Το y_i ισούται με 1(0) αν το ***x*** ανήκει στη θετική (αρνητική) πλευρά του $g_i(\mathbf{x})=0$.

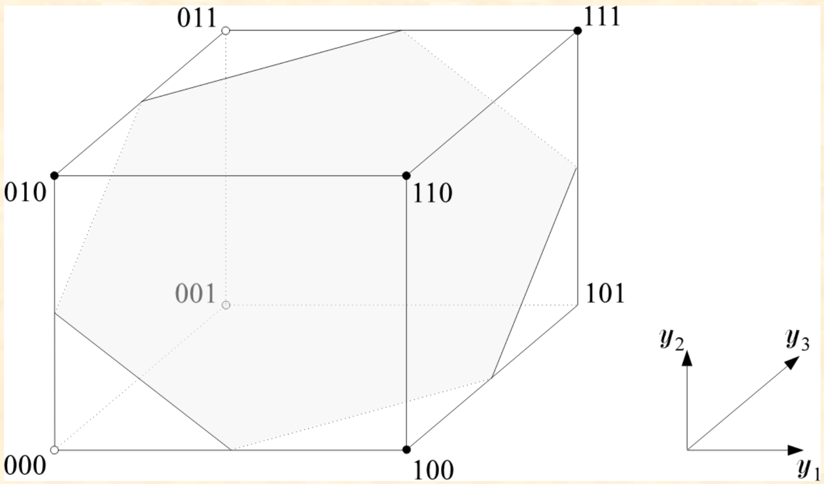
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Δυνατότητες ταξινόμησης των δικτύων perceptrons δύο επιπέδων

- Τεμνόμενα υπερεπίπεδα στο χώρο που αντιστοιχούν στους *p* νευρώνες του πρώτου επιπέδου, ορίζουν περιοχές με την ακόλουθη ιδιότητα:

  "ΟΛΑ τα σημεία μιας περιοχής έχουν την ίδια σχετική θέση ως προς τα *p* υπερεπίπεδα. Επομένως, ***απεικονίζονται στην ίδια κορυφή του*** H_p ***υπερκύβου***."





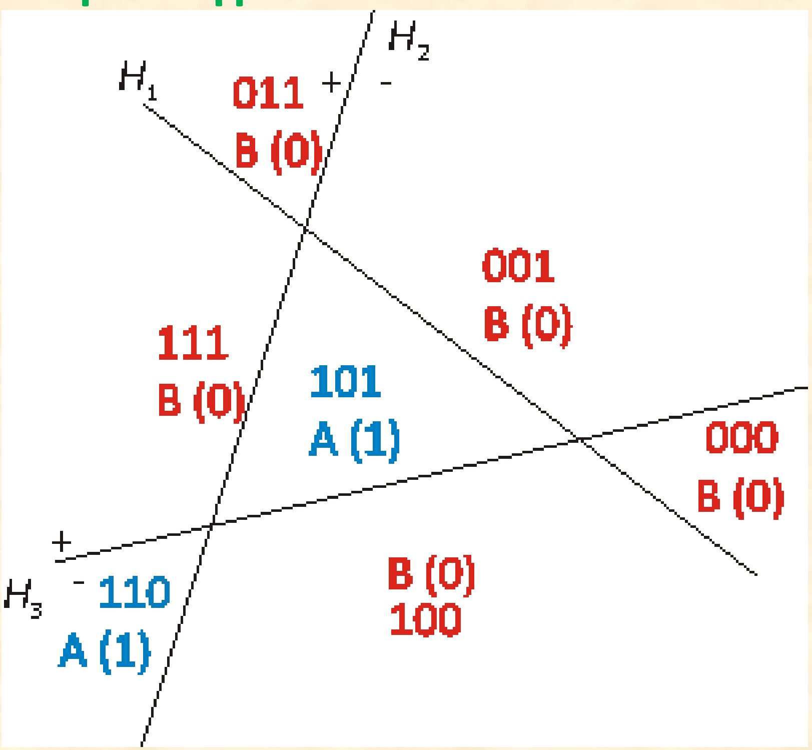
Παράδειγμα: Η κορυφή 001 αντιστοιχεί στην περιοχή που βρίσκεται στην (-) πλευρά της $g_1(\underline{x})=0$, στην (-) πλευρά της $g_2(\underline{x})=0$, στη (+) πλευρά της $g_3(\underline{x})=0$.

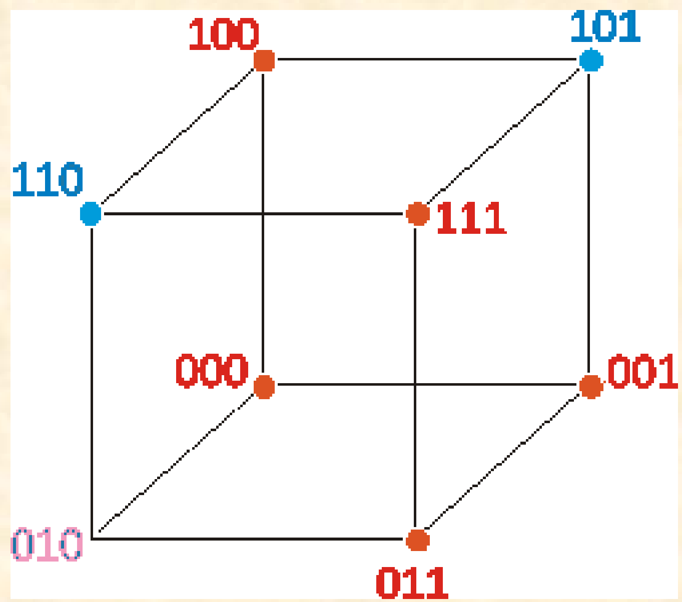
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Δυνατότητες ταξινόμησης των δικτύων perceptrons δύο επιπέδων

- Ο νευρώνας εξόδου αντιστοιχεί σε ένα υπερεπίπεδο στο μετασχηματισμένο χώρο το οποίο χωρίζει κάποιες κορυφές του H_p υπερκύβου από τις υπόλοιπες. Συνεπώς, ένα perceptron δύο επιπέδων έχει τη δυνατότητα να διαχωρίσει **κλάσεις που αποτελούνται από ενώσεις πολυεδρικών περιοχών**.
- Αλλά **ΌΧΙ ΟΠΟΙΕΣΔΗΠΟΤΕ** ενώσεις. Αυτό εξαρτάται από τη σχετική θέση των αντίστοιχων κορυφών του υπερκύβου.

Παράδειγμα:



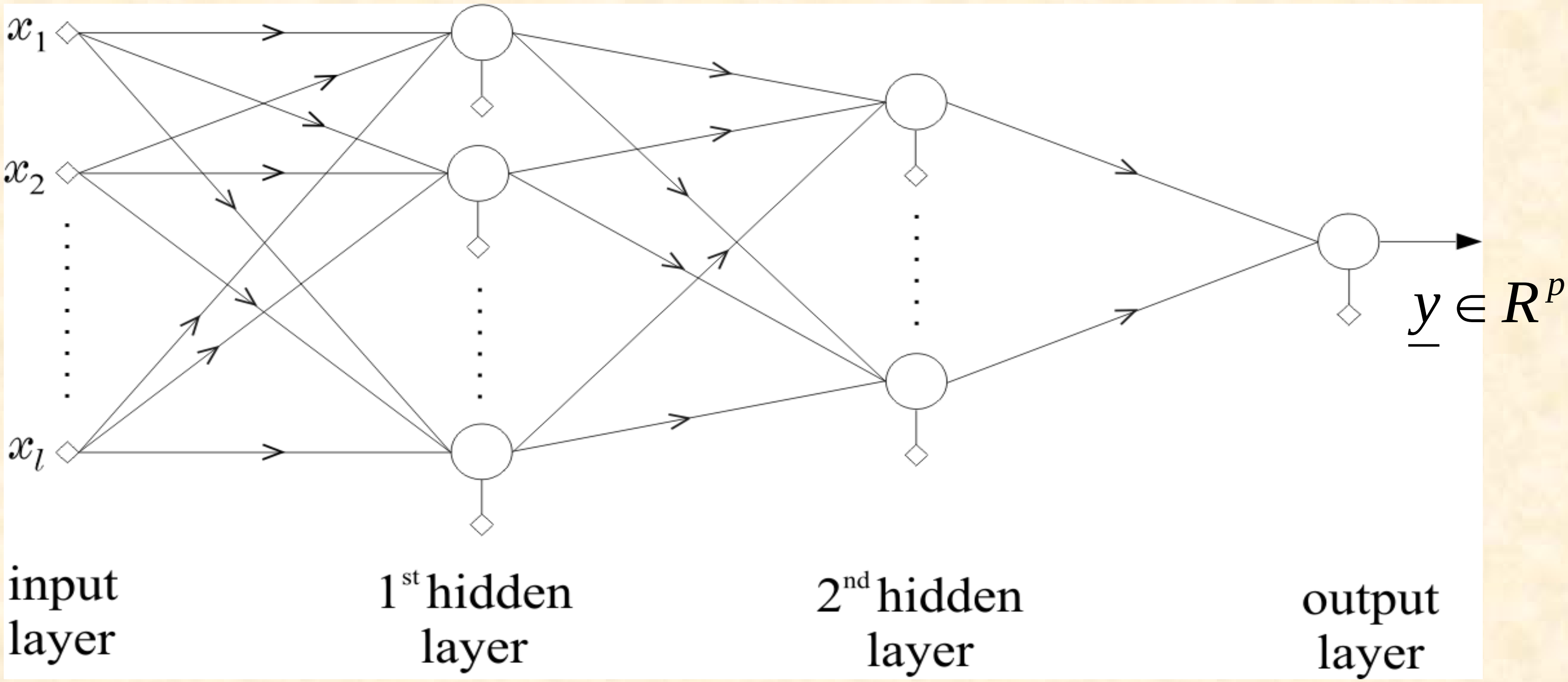


Δεν υπάρχει υπερεπίπεδο που να διαχωρίζει τις **μπλε** κορυφές από τις υπόλοιπες

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Δίκτυα Perceptrons τριών επιπέδων

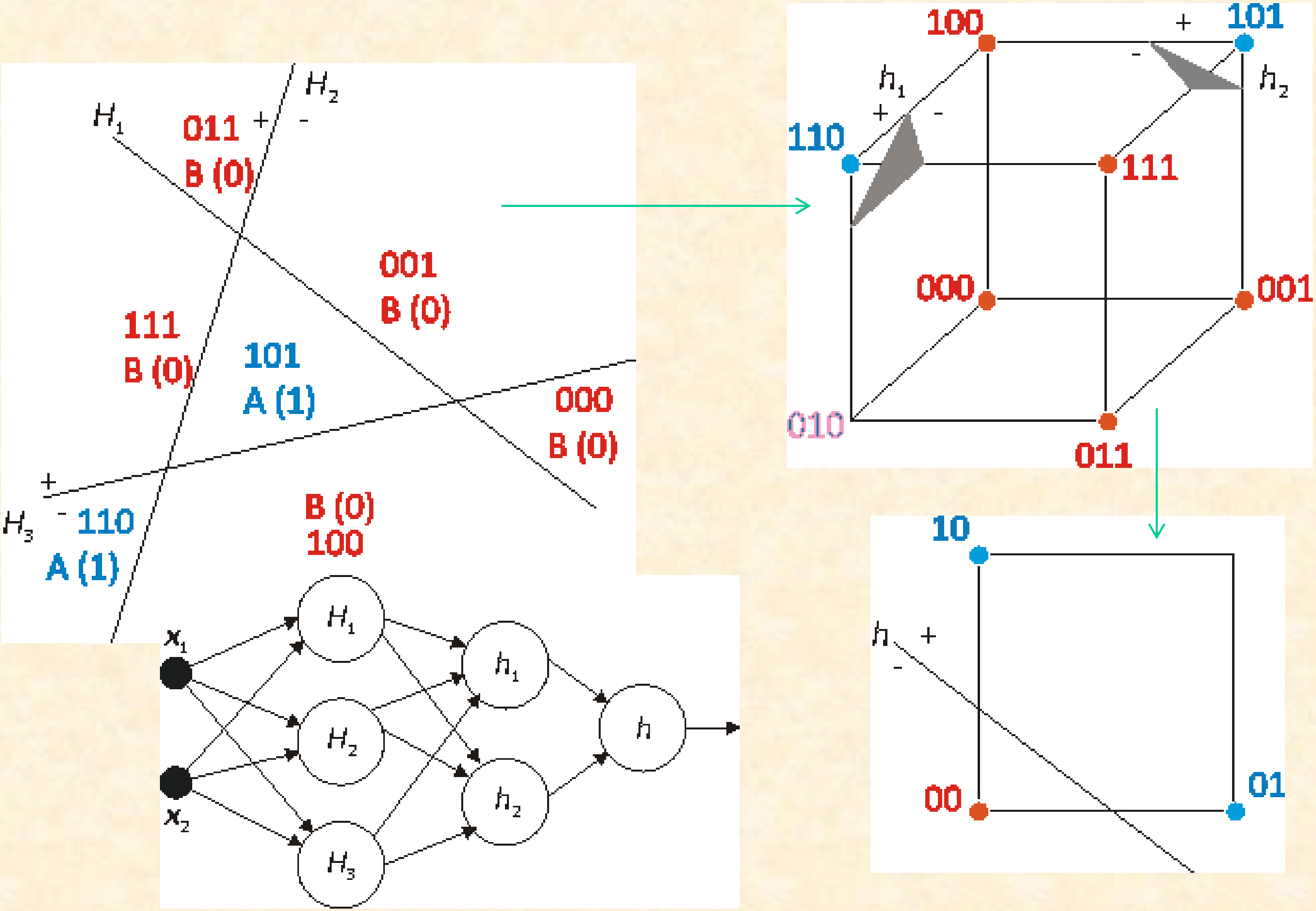
Η αρχιτεκτονική:



Τέτοιες δομές είναι ικανές να διαχωρίσουν κλάσεις που ορίζονται από **οποιαδήποτε** ένωση πολυεδρικών περιοχών.

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Δίκτυα Perceptrons τριών επιπέδων– παράδειγμα



ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΤΕΣ – ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ

Δίκτυα Perceptrons τριών επιπέδων

Έστω $A=R_1\cup \ldots \cup R_k$ (1) και $B=R_1' \cup \ldots \cup R_m'$ (0) ($A\cup B=R^l$), όπου οι περιοχές R_i και R_j' ορίζονται από την τομή p υπερεπιπέδων, $H_1,\ldots,H_p$.

Πώς ένα perceptron τριών επιπέδων μπορεί να υλοποιήσει ΟΠΟΙΟΝΔΗΠΟΤΕ διαχωρισμό που ορίζεται από υπερεπίπεδα:

- Τοποθέτησε *p* νευρώνες στο πρώτο επίπεδο, καθένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε ένα από τα υπερεπίπεδα $H_1,\ldots,H_p$.
- Τοποθέτησε *k* nodes στο δεύτερο επίπεδο, καθένας από τους οποίους διαχωρίζει μια *κορυφή του* H_p *υπερκύβου* που αντιστοιχεί σε μια περιοχή R_i, από όλες τις υπόλοιπες κορυφές.
- Τοποθέτησε έναν *OR* νευρώνα στο τρίτο επίπεδο (αυτός επιστρέφει **0** για την κορυφή 00…0 του H_k υπερκύβου και **1** για όλες τις υπόλοιπες).

ΣΗΜ.: Το πρώτο επίπεδο του δικτύου ορίζει τα υπερεπίπεδα, το δεύτερο επίπεδο ορίζει τις περιοχές και ο νευρώνας εξόδου ορίζει τις κλάσεις.