Ασκήσεις για το μάθημα «Αναγνώριση Προτύπων» - 2

1. Έστω N μετρήσεις $x_1, \ldots, x_N$, που προέρχονται από μονοδιάστατη κανονική κατανομή γνωστής μέσης τιμής, μ, αλλά άγνωστης διασποράς, σ^2. Να εξάγετε την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας για τη σ^2. Μπορείτε να πιστοποιήσετε ότι η εκτίμηση αυτή αντιστοιχεί σε μέγιστο της συνάρτησης πιθανοφάνειας;

2. Η τυχαία μεταβλητή x ακολουθεί την Erlang συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
$$p(x;\theta) = \theta^2 x \exp(-\theta x) u(x)$$
όπου $u(x)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος
$$u(x) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ x \geq 0 \\ 0, & \alpha\nu\ x < 0 \end{cases}$$
Δείξτε ότι η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας του θ, δοθέντων των N μετρήσεων, $x_1, \ldots, x_N$, του x είναι
$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{2N}{\sum_{k=1}^{N} x_k}$$
Βεβαιωθείτε ότι η παραπάνω εκτίμηση αντιστοιχεί σε μέγιστο της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

3. Η τυχαία μεταβλητή x ακολουθεί την Rayleigh συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
$$p(x;\theta) = 2\theta x \exp(-\theta x^2) u(x)$$
όπου $u(x)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος . Δείξτε ότι η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας του θ, δοθέντων των N μετρήσεων, $x_1, \ldots, x_N$, του x είναι
$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{N}{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}$$
Βεβαιωθείτε ότι η παραπάνω εκτίμηση αντιστοιχεί σε μέγιστο της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

4. Η τυχαία μεταβλητή x ακολουθεί την Maxwell συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
$$p(x;\theta) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \theta^{3/2} x^2 \exp(-\theta x^2) u(x)$$
όπου $u(x)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος . Δείξτε ότι η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας του θ, δοθέντων των N μετρήσεων, $x_1, \ldots, x_N$, του x είναι
$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\frac{3}{2}N}{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}$$
Βεβαιωθείτε ότι η παραπάνω εκτίμηση αντιστοιχεί σε μέγιστο της συνάρτησης πιθανοφάνειας.

5. Έστω N μετρήσεις $x_1, \ldots, x_N$, που προέρχονται από την κατανομή Erlang. Έστω ακόμη ότι η a priori πιθανότητα για την παράμετρο θ είναι η κανονική κατανομή $p(\theta) = N(\theta_0, \sigma_0^2)$ (τα θ_0 και σ_0^2 είναι γνωστά). Προσδιορίστε την maximum a posteriori εκτίμηση της θ. Εξετάστε τη μορφή της εκτίμησης για τις περιπτώσεις (α) $\sigma_0^2 >>$ και (β) $N \to +\infty$.

6. Επαναλάβετε την άσκηση 5 για την κατανομή Rayleigh.

7. Επαναλάβετε την άσκηση 5 για την κατανομή Maxwell.

8. Έστω N μετρήσεις $x_1, \ldots, x_N$, που προέρχονται από την ομοιόμορφη κατανομή

$$p(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \alpha\nu \ 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \delta\iota\alpha\phi o\rho\epsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για το θ είναι

$$\hat{\theta}_{ML} = \max_{i=1,\ldots,N} x_i$$

9. Έστω τα 14 σημεία

$0.1, 0.15, 0.11, 0.2, 0.45, 0.32, 0.77, 0.56, 0.48, 0.43, 0.42, 0.67, 0.24, 0.47.$

Εκτιμήστε, με βάση τα σημεία αυτά, την πυκνότητα πιθανότητας στο σημείο $x = 0.44$, χρησιμοποιώντας την τεχνική των παραθύρων Parzen, για $h = 0.2, 0.3$. Για ευκολία στους υπολογισμούς, χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση $\phi(x)$, η οποία επιστρέφει 1 αν το x βρίσκεται εντός του διαστήματος $[-h/2, h/2]$ και 0 διαφορετικά.