

Βαθμός εξυπηρέτησης (Συνέχεια)

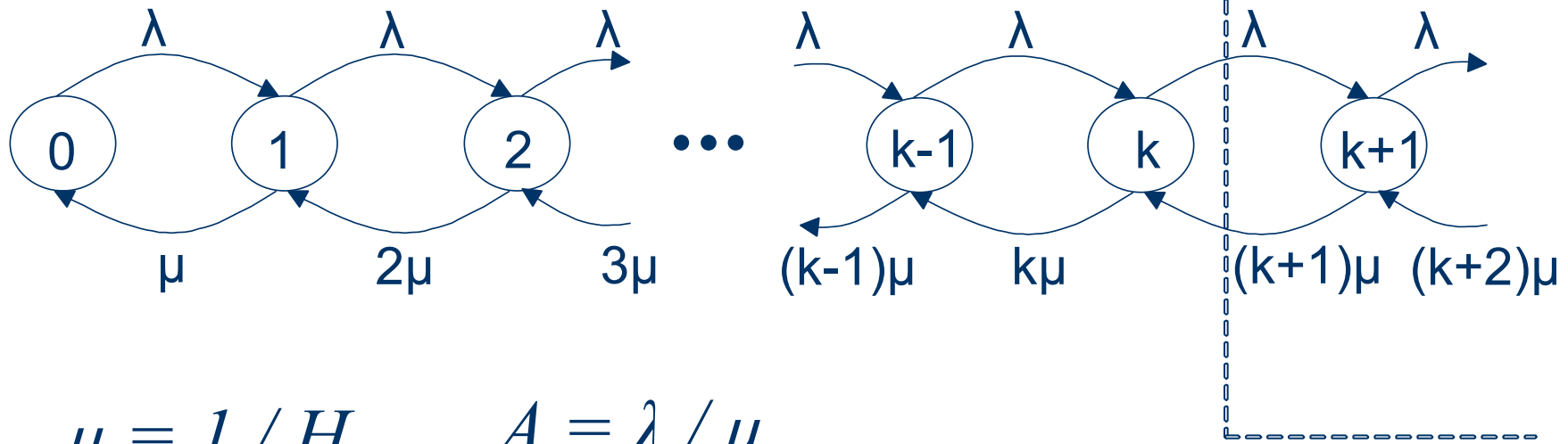
Υπολογισμός βαθμού εξυπηρέτησης

Erlang C

- Παρόμοιες υποθέσεις με Erlang B.
- Είναι διαθέσιμοι C δίαυλοι.
- Η κατανομή άφιξης των κλήσεων είναι Poisson με ρυθμό λ .
- Αν μια εισερχόμενη κλήση δεν βρίσκει ελεύθερο δίαυλο, τοποθετείται σε ουρά αναμονής με άπειρο μήκος.
- Κάθε κλήση εξυπηρετείται με τη σειρά άφιξής της.

Υπολογισμός βαθμού εξυπηρέτησης

Erlang B



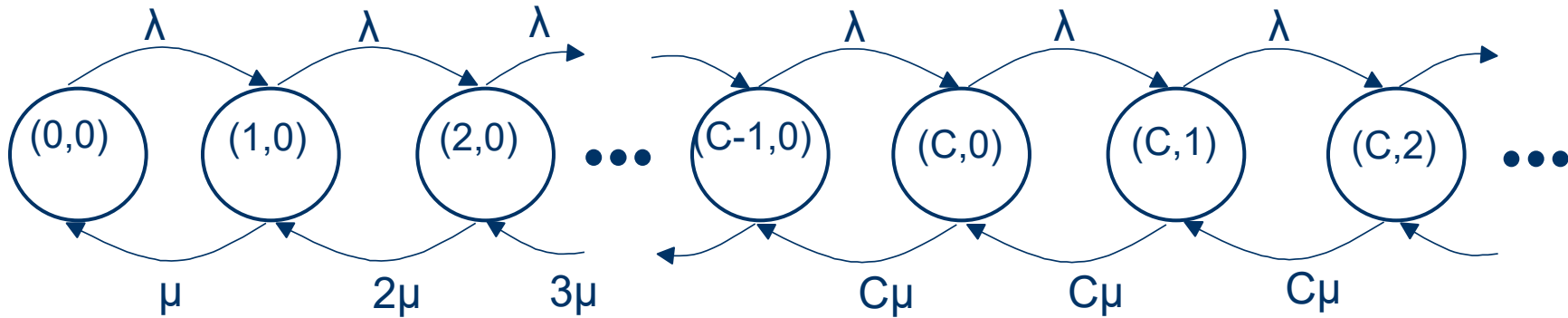
$$\mu = 1 / H \quad A = \lambda / \mu$$

$$\lambda P_k = (k+1)\mu P_{k+1}, \quad \text{για } 0 \leq k \leq C-1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow P_{k+1} = \frac{A}{k+1} P_k \quad \rightarrow P_{k+1} = \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} P_0$$

Υπολογισμός βαθμού εξυπηρέτησης

Erlang C



$$\lambda P_k = (k+1)\mu P_{k+1}, \quad \text{για } 0 \leq k \leq C-1$$

$$\lambda P_k = C\mu P_{k+1}, \quad \text{για } k \geq C$$

$$P_k = \frac{A^k}{k!} P_0, \quad \text{για } 0 \leq k \leq C$$

$$P_k = \left(\frac{\lambda}{\mu C} \right)^{k-C} \times P_C = \frac{A^k}{C^{k-C} C!} P_0 \quad \text{για } k \geq C$$

Υπολογισμός βαθμού εξυπηρέτησης

Erlang C

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!} P_0 + \sum_{k=C}^{\infty} \frac{A^k}{C^{k-C} C!} P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^C}{C!(1 - \frac{A}{C})}}$$

$$\Pr[\text{delay} > 0] = \sum_{k=C}^{\infty} P_k$$

GOS $\nearrow$

$$\Pr[\text{delay} > 0] = \frac{A^C}{A^C + C! \left(1 - \frac{A}{C}\right) \sum_{k=0}^{C-1} \frac{A^k}{k!}}$$

Υπολογισμός βαθμού εξυπηρέτησης

Erlang C

Πίνακας Erlang C

C	Προσφερόμενη κίνηση A (erlang)											
	Πιθανότητα καθυστέρησης B (%)											
	0.01	0.05	0.1	0.5	1	2	5	10	15	20	30	40
1	.0001	.0005	.0010	.0050	.0100	.0200	.0500	.1000	.1500	.2000	.3000	.4000
2	.0142	.0319	.0452	.1025	.1465	.2103	.3422	.5000	.6278	.7403	.9390	1.117
3	.0860	.1490	.1894	.3339	.4291	.5545	.7876	1.040	1.231	1.393	1.667	1.903
4	.2310	.3533	.4257	.6641	.8100	.9939	1.319	1.653	1.899	2.102	2.440	2.725
5	.4428	.6289	.7342	1.065	1.259	1.497	1.905	2.313	2.607	2.847	3.241	3.569
6	.7110	.9616	1.099	1.519	1.758	2.047	2.532	3.007	3.344	3.617	4.062	4.428
7	1.026	1.341	1.510	2.014	2.297	2.633	3.188	3.725	4.103	4.406	4.897	5.298
8	1.382	1.758	1.958	2.543	2.866	3.246	3.869	4.463	4.878	5.210	5.744	6.178
9	1.771	2.208	2.436	3.100	3.460	3.883	4.569	5.218	5.668	6.027	6.600	7.065
10	2.189	2.685	2.942	3.679	4.077	4.540	5.285	5.986	6.469	6.853	7.465	7.959
11	2.634	3.186	3.470	4.279	4.712	5.213	6.015	6.765	7.280	7.688	8.336	8.857
12	3.100	3.708	4.018	4.896	5.363	5.901	6.758	7.554	8.099	8.530	9.212	9.761
13	3.587	4.248	4.584	5.529	6.028	6.602	7.511	8.352	8.926	9.379	10.09	10.67
14	4.092	4.805	5.166	6.175	6.705	7.313	8.273	9.158	9.760	10.23	10.98	11.58
15	4.614	5.377	5.762	6.833	7.394	8.035	9.044	9.970	10.60	11.09	11.87	12.49
16	5.150	5.962	6.371	7.502	8.093	8.766	9.822	10.79	11.44	11.96	12.77	13.41
17	5.699	6.560	6.991	8.182	8.801	9.505	10.61	11.61	12.29	12.83	13.66	14.33
18	6.261	7.169	7.622	8.871	9.518	10.25	11.40	12.44	13.15	13.70	14.56	15.25
19	6.835	7.788	8.263	9.568	10.24	11.01	12.20	13.28	14.01	14.58	15.47	16.18
20	7.419	8.417	8.914	10.27	10.97	11.77	13.00	14.12	14.87	15.45	16.37	17.10
21	8.013	9.055	9.572	10.99	11.71	12.53	13.81	14.96	15.73	16.34	17.28	18.03
22	8.616	9.702	10.24	11.70	12.46	13.30	14.62	15.81	16.60	17.22	18.19	18.96
23	9.228	10.36	10.91	12.43	13.21	14.08	15.43	16.65	17.47	18.11	19.10	19.89
24	9.848	11.02	11.59	13.16	13.96	14.86	16.25	17.51	18.35	19.00	20.02	20.82
25	10.48	11.69	12.28	13.90	14.72	15.65	17.08	18.36	19.22	19.89	20.93	21.76
26	11.11	12.36	12.97	14.64	15.49	16.44	17.91	19.22	20.10	20.79	21.85	22.69
27	11.75	13.04	13.67	15.38	16.26	17.23	18.74	20.08	20.98	21.68	22.77	23.63
28	12.40	13.73	14.38	16.14	17.03	18.03	19.57	20.95	21.87	22.58	23.69	24.57
29	13.05	14.42	15.09	16.89	17.81	18.83	20.41	21.82	22.75	23.48	24.61	25.50
30	13.71	15.12	15.80	17.65	18.59	19.64	21.25	22.68	23.64	24.38	25.54	26.44

Υπολογισμός βαθμού εξυπηρέτησης

Παράδειγμα 3.7

$K = 7$ εξαγωνικές κυψέλες $R = 2.31$ km, $C_{o\lambda} = 84$.
Αν $A_u = 0.06$ erlang και $\lambda_u = 2$ κλήσεις / ώρα,
υπολογίστε τα παρακάτω για σύστημα Erlang C με
 $GOS = 0.05$.

- α) Πόσοι χρήστες ανά km^2 θα υποστηρίζονται από το σύστημα;
- β) Ποια είναι η πιθανότητα μια καθυστερημένη κλήση να περιμένει περισσότερο από 12 sec;
- γ) Ποια είναι η πιθανότητα να καθυστερήσει μια κλήση περισσότερο από 12 sec;

Υπολογισμός βαθμού εξυπηρέτησης

Παράδειγμα 3.7

Λύση:

(α) Το εμβαδόν S_c κάθε εξαγωνικής κυψέλης είναι

$$S_c = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 = 6 \text{ km}^2$$

Ο αριθμός των διαύλων ανά κυψέλη θα είναι $C_c = C_{\text{ολ}} / K = 84 / 7 = 12$. Από τον Πίνακα 3.3, για $C_c = 12$ και $GOS = 5\%$, προκύπτει $A = 6.758$ erlang.

Ο αριθμός των χρηστών ανά κυψέλη θα είναι

$$N_u = \left\lfloor \frac{A}{A_u} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6.758}{0.06} \right\rfloor = 112 \text{ χρήστες}$$

οπότε θα αντιστοιχούν $N_u / S_c = 112 / 6 = 18$ χρήστες/km²

β) Για $\lambda = 2$ κλήσεις / ώρα, η μέση διάρκεια των κλήσεων θα είναι

$$H = \frac{A_u}{\lambda} = 0.03 \text{ ώρες} = 108 \text{ sec},$$

οπότε

$$\Pr[\text{delay} > t / \text{delay} > 0] = e^{-\frac{(C-A)t}{H}} = e^{-\frac{(12-6.758)12}{108}} = 0.5585$$

γ) Για $C = 12$ και $A = 6.758$ erlang

$$\Pr[\text{delay} > 12] = \Pr[\text{delay} > 0] \Pr[\text{delay} > t / \text{delay} > 0] = 0.05 \times 0.5585 = 0.0279$$

Φασματική απόδοση κυψελωτών συστημάτων

Ολικό αξιοποιούμενο εύρος ζώνης:

$$B_s = C_c \cdot K \cdot W$$

Δίαυλοι ανά
κυψέλη

Αριθμός επαναχρησιμοποίησης

Εύρος ανά δίαυλο

Φασματική απόδοση κυψελωτών συστημάτων

Έστω ένα σύστημα S που περιέχει ένα σύνολο κυψελών οργανωμένες σε ομάδες επαναχρησιμοποίησης με K κυψέλες η κάθε μία.

Φασματική απόδοση συστήματος

$$\eta_s = \frac{A_c}{B_s \cdot S_c} = \frac{A_c}{C_c \cdot K \cdot W \cdot S_c}$$

A_c = μέση μεταφερόμενη κίνηση ανά κυψέλη

S_c = μέσο εμβαδό κυψέλης συστήματος

Η φασματική απόδοση εκφράζεται σε *erlang/MHz/km²* (όχι σε *erlang/Hz/m²*).

Φασματική απόδοση κυψελωτών συστημάτων

Παράδειγμα 3.8:

Κυψέλες ανά ομάδα **$K=7$**

Ολικός αριθμός διαύλων **$C=395$**

Κίνηση ανά χρήστη **$A_u=0,03$ erlang**

Μέση διάρκεια κλήσεων **$H=120$ sec**

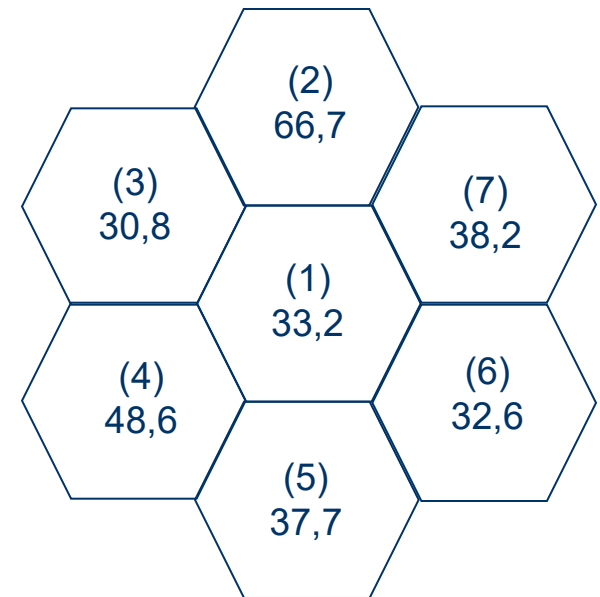
Έκταση εξυπηρέτησης **1200km^2**

$GOS = 0,02$

Υπολογίστε:

- α) αριθμό απαιτούμενων διαύλων για κάθε κυψέλη
- β) αριθμό εξυπηρετούμενων συνδρομητών
- γ) μέσο αριθμό χρηστών ανά δίαυλο συστήματος
- δ) μέσο εξυπηρετούμενο αριθμό κλήσεων/ώρα
- ε) πυκνότητα χρηστών ανά km^2
- στ) πυκνότητα κλήσεων ανά km^2
- ζ) μέση ακτίνα κυψέλης σε km
- η) χρησιμοποίηση διαύλων σε κάθε κυψέλη

Κατανομή κίνησης ανά κυψέλη



Erlang B

Erlang B Table

<i>Ch</i>	<i>1%</i>	<i>2%</i>	<i>5%</i>	<i>Ch</i>	<i>1%</i>	<i>2%</i>	<i>5%</i>
7	2.50	2.94	3.74	29	19.49	21.04	23.83
8	3.12	3.63	4.54	30	20.34	21.93	24.80
9	3.78	4.34	5.37	31	21.19	22.83	25.77
10	4.46	5.08	6.21	32	22.04	23.73	26.75
11	5.16	5.84	7.07	33	22.90	24.63	27.72
12	5.87	6.61	7.95	34	23.77	25.53	28.70
13	6.60	7.40	8.83	35	24.63	26.44	29.68
14	7.35	8.20	9.72	36	25.51	27.34	30.66
15	8.10	9.00	10.63	37	26.38	28.25	31.64
16	8.87	9.82	11.54	38	27.25	29.16	32.62
17	9.65	10.65	12.46	39	28.13	30.08	33.61
18	10.43	11.49	13.39	40	29.01	31.00	34.60
19	11.23	12.33	14.31	41	29.89	31.92	35.58
20	12.03	13.18	15.25	42	30.77	32.83	36.57
21	12.83	14.03	16.19	43	31.66	33.76	37.56
22	13.65	14.90	17.13	44	32.54	34.68	38.56
23	14.47	15.76	18.08	45	33.43	35.60	39.55
24	15.29	16.63	19.03	46	34.32	36.53	40.55
25	16.12	17.50	19.99	47	35.21	37.46	41.54
26	16.95	18.38	20.94	48	36.11	38.39	42.54
27	17.97	19.26	21.90	49	37.00	39.32	43.53
28	18.64	20.15	22.86	50	37.90	40.25	44.53

Λύση:

α,β) Η προσφερόμενη κίνηση από κάθε χρήστη είναι $A_u = 0.03$ erlang και η μέση διάρκεια των κλήσεων $H = 120 \text{ sec} = 0.033 \text{ h}$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\lambda = \frac{A_u}{H} = \frac{0.03}{0.033} = 0.9 \text{ κλήσεις / ώρα / χρήστη}$$

Για την κυψέλη (1), ο αριθμός των χρηστών N_u θα είναι

$$N_u = \left\lfloor \frac{A_1}{A_u} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{33.2}{0.03} \right\rfloor = 1106 \text{ χρήστες}$$

και ο αριθμός των κλήσεων ανά ώρα στην κυψέλη αυτή θα είναι

$$\lambda_1 = \lambda \times N_u = 0.9 \times 1106 = 995.4 \text{ κλήσεις / ώρα.}$$

Από τον Πίνακα 3.2, για $A = 33.2$ erlang και $GOS = 0.02$, βρίσκουμε $C = 43$ δίαυλοι. Η χρησιμοποίηση των διαύλων αυτών θα είναι $A / C = 33.2 / 43 = 0.77$.

Κυψέλη	Κίνηση (erlang)	Αριθμός Χρηστών	Αριθμός Κλήσεων	Απαιτούμενοι δίαυλοι	Χρησιμοποίηση διαύλων
1	33.2	1106	995.4	43	0.77
2	66.7	2223	2000.7	78	0.86
3	30.8	1026	923.4	40	0.77
4	48.6	1620	1458.0	59	0.82
5	37.8	1260	1134.0	48	0.79
6	32.6	1086	977.4	42	0.78
7	38.2	1273	1145.7	48	0.80
Σύνολο	287.9	9594	8634.6	358	

Στον παραπάνω πίνακα απεικονίζονται οι παραπάνω υπολογισμοί για όλες τις κυψέλες.

γ) Ο μέσος αριθμός χρηστών ανά δίαυλο του συστήματος θα είναι

$$N_{u,ολ} / C_{ολ} = 9594 / 358 = 26.8 \text{ χρήστες / δίαυλο.}$$

δ) Ο μέσος αριθμός κλήσεων, όπως φαίνεται στον πίνακα, είναι 8634.6.

ε) Η πυκνότητα χρηστών είναι $9594 / 1200 \text{ km}^2 \approx 8 \text{ χρήστες / km}^2$.

στ) Η πυκνότητα κλήσεων είναι $8634.6 / 1200 \text{ km}^2 = 7.2 \text{ κλήσεις / km}^2$.

ζ) Το εμβαδόν κάθε κυψέλης θα είναι $S_c = 1200 / 7 \text{ km}^2$. Δεδομένου ότι η σχέση που δίνει το εμβαδόν είναι

$$S_c = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2$$

προκύπτει $R = 8.12 \text{ km}$.

η) Η χρησιμοποίηση των διαύλων για κάθε κυψέλη φαίνεται στην τελευταία στήλη του πίνακα.