Παράλληλοι Υπολογισμοί (Μεταπτυχιακό)

Διδάσκων: *Επίκ. Καθηγητής* Φ. Τζαφέρης

ΕΚΠΑ

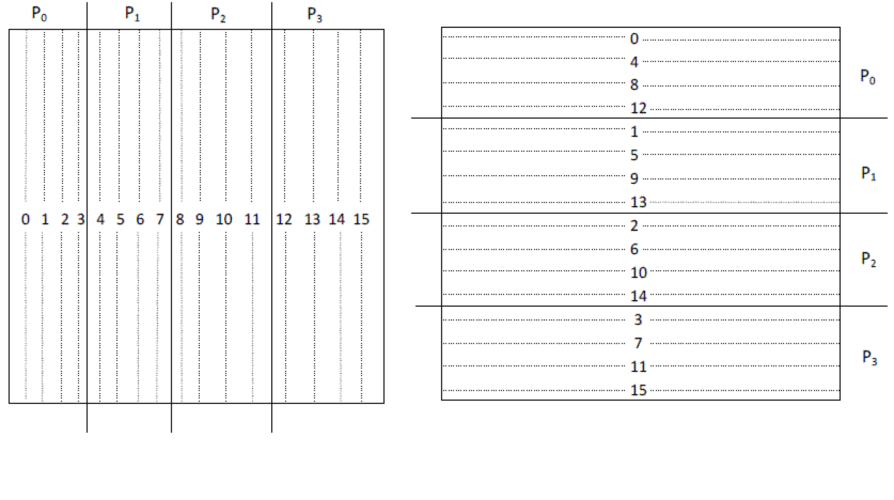
19 Απριλίου 2010

Παράλληλοι Αριθμητικοί Αλγόριθμοι

Σχήματα Διαχωρισμού (ή Απεικόνισης) ενός πίνακα στους επεξεργαστές

1. Διαχωρισμός σε λωρίδες
   α) σε ομάδες λωρίδων
      (i) σε ομάδες συνεχών γραμμών
      (ii) σε ομάδες συνεχών στηλών
   β) κυκλικά σε λωρίδες
      (i) κυκλικά σε γραμμές
      (ii) κυκλικά σε στήλες
   γ) κυκλικά σε ομάδες λωρίδων
2. Διαχωρισμός σε τετράγωνες ή ορθογώνιες περιοχές ή υποπίνακες

Ομοιόμορφος διαχωρισμός *σε λωρίδες* ενός 16 × 16 πίνακα σε 4 επεξεργαστές



Σχήμα: (α) σε ομάδες συνεχών στηλών (β) κυκλικά συνεχών γραμμών

Ομοιόμορφος διαχωρισμός σε τετράγωνα τεμάχια ενός 8 × 8 πίνακα σε 16 επεξεργαστές

(0,0) (0,1) P_0 (1,0) (1,1)	(0,2) (0,3) P_1 (1,2) (1,3)	(0,4) (0,5) P_2 (1,4) (1,5)	(0,6) (0,7) P_3 (1,6) (1,7)
(2,0) (2,1) P_4 (3,0) (3,1)	(2,2) (2,3) P_5 (3,2) (3,3)	(2,4) (2,5) P_6 (3,4) (3,5)	(2,6) (2,7) P_7 (3,6) (3,7)
(4,0) (4,1) P_8 (5,0) (5,1)	(4,2) (4,3) P_9 (5,2) (5,3)	(4,4) (4,5) P_{10} (5,4) (5,5)	(4,6) (4,7) P_{11} (5,6) (5,7)
(6,0) (6,1) P_{12} (7,0) (7,1)	(6,2) (6,3) P_{13} (7,2) (7,3)	(6,4) (6,5) P_{14} (7,4) (7,5)	(6,6) (6,7) P_{15} (7,6) (7,7)

(0,0) (0,4) P_0 (4,0) (4,4)	(0,1) (0,5) P_1 (4,1) (4,5)	(0,2) (0,6) P_2 (4,2) (4,6)	(0,3) (0,7) P_3 (4,3) (4,7)
(1,0) (1,4) P_4 (5,0) (5,4)	(1,1) (1,5) P_5 (5,1) (5,5)	(1,2) (1,6) P_6 (5,2) (5,6)	(1,3) (1,7) P_7 (5,3) (5,7)
(2,0) (2,4) P_8 (6,0) (6,4)	(2,1) (2,5) P_9 (6,1) (6,5)	(2,2) (2,6) P_{10} (6,2) (6,6)	(2,3) (2,7) P_{11} (6,3) (6,7)
(3,0) (3,4) P_{12} (7,0) (7,4)	(3,1) (3,5) P_{13} (7,1) (7,5)	(3,2) (3,6) P_{14} (7,2) (7,6)	(3,3) (3,7) P_{15} (7,3) (7,7)

Σχήμα: (α) σε ομάδες συνεχών τετραγώνων (β) κυκλικά σε τετράγωνα

- Στον διαχωρισμό ενός $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακα σε ομάδες συνεχών στηλών σε $\mathbf{p}$ επεξεργαστές $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \cdots, \mathbf{P_{p-1}}$, ο επεξεργαστής $\mathbf{P_i}$ περιέχει τις στήλες με δείκτες :

$$(\mathbf{n}/\mathbf{p})\mathbf{i},\ (\mathbf{n}/\mathbf{p})\mathbf{i}+\mathbf{1}, \cdots, (\mathbf{n}/\mathbf{p})(\mathbf{i}+\mathbf{1})-\mathbf{1}$$

- Στον διαχωρισμό ενός $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακα κυκλικά σε ομάδες στηλών σε $\mathbf{p}$ επεξεργαστές $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \cdots, \mathbf{P_{p-1}}$, ο επεξεργαστής $\mathbf{P_i}$ περιέχει τις γραμμές με δείκτες :

$$\mathbf{i},\ \mathbf{i}+\mathbf{p},\ \mathbf{i}+\mathbf{2p}, \cdots, \mathbf{i}+\mathbf{n}-\mathbf{p}$$

- Στον διαχωρισμό ενός $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακα κυκλικά σε ομάδες λωρίδων (π.χ οριζοντίων) ο πίνακας διαχωρίζεται σε ομάδες των $\mathbf{q}$ γραμμών ($\mathbf{q} < \mathbf{n}/\mathbf{p}$) και αυτές κατανέμονται κυκλικά στους $\mathbf{p}$ επεξεργαστές.
- Ο διαχωρισμός ενός $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακα σε τετράγωνα τεμάχια αντιστοιχεί φυσικά σε ένα διδιάστατο τετραγωνικό πλέγμα επεξεργαστών.

Παράδειγμα

Μπορούμε να απεικονίσουμε ένα $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακα σε ένα δίκτυο με π-επεξεργαστές υποδιαιρώντας αυτόν σε ομάδες (υποπίνακες) μεγέθους $(\mathbf{n}/\sqrt{\mathbf{p}}) \times (\mathbf{n}/\sqrt{\mathbf{p}})$.

1. Αναστροφή Πίνακα

- Ο ανάστροφος ενός $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακα $\mathbf{A}$ είναι ένας πίνακας $\mathbf{A}^\mathbf{T}$ ίδιας διάστασης, τέτοιος ώστε να ισχύει: $\mathbf{A}^\mathbf{T}[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{A}[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$ για κάθε $\mathbf{i}, \mathbf{j} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \cdots, \mathbf{n} - \mathbf{1}$.
- Στην διαδικασία της αναστροφής ενός πίνακα, όλα τα στοιχεία του κάτω από την κύρια διαγώνιο μετακινούνται στις αντίστοιχες θέσεις πάνω από την κύρια διαγώνιο και αντίστροφα.
- Αν υποτεθεί ότι για την ανταλλαγή(αντιμετάθεση) ενός ζεύγους στοιχείων του πίνακα απαιτείται μια χρονική μονάδα, τότε ο **ακολουθιακός χρόνος** για την αναστροφή ενός $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακα $\mathbf{A}$ είναι $(\mathbf{n}^2 - \mathbf{n})/\mathbf{2}$ (ή προσεγγιστικά $\mathbf{n}^2/\mathbf{2}$).
- Στη συνέχεια μελετώνται παράλληλοι αλγόριθμοι για την αναστροφή ενός τετραγωνικού πίνακα με τη χρήση διαφόρων σχημάτων διαχωρισμού του.

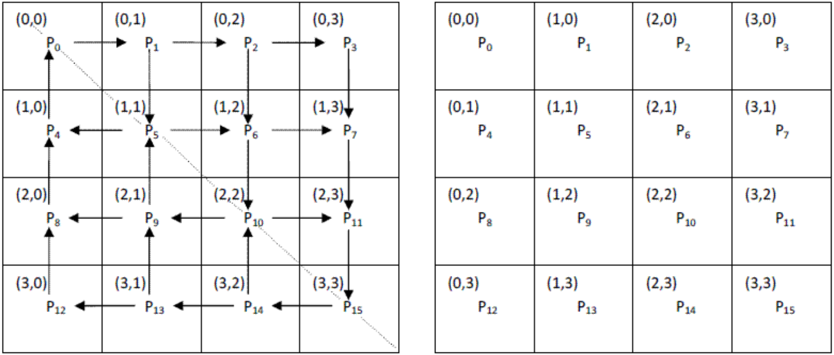
1.1 Διαχωρισμός σε τετράγωνα

- Θεωρούμε ότι ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακας $\mathbf{A}$ απεικονίζεται σε ένα λογικό τετραγωνικό πλέγμα επεξεργαστών και ότι είναι διαχωρισμένος σε τετράγωνα τεμάχια.
- Ένα λογικό πλέγμα μπορεί να εμφυτευθεί
  - α) σε ένα φυσικό πλέγμα ή
  - β) σε ένα υπερκύβο.
- Στη συνέχεια περιγράφουμε παράλληλους αλγορίθμους για τις δύο αυτές αρχιτεκτονικές.

1.1.1 Πλέγμα(mesh) *Περίπτωση 1:* $\mathbf{p} = \mathbf{n}^2$

- Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακας **A** καταχωρείται σε ένα τετραγωνικό πλέγμα επεξεργαστών έτσι ώστε ο κάθε επεξεργαστής να κατέχει ένα μόνο στοιχείο του πίνακα (Σχ.3(α)).
- Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται η διαδικασία της αναστροφής ενός τετραγωνικού πίνακα διάστασης $\mathbf{n} = \mathbf{4}$ σε ένα τετραγωνικό πλέγμα με $\mathbf{p} = \mathbf{16}$ επεξεργαστές.

Σχήμα 3 : Αναστροφή ενός 4×4 πίνακα με διαχωρισμό σε τετράγωνα σε πλέγμα με 16 επεξεργαστές



Σχήμα: (α) βήματα Επικοινωνίας (β) Τελική κατάσταση

- Ας φανταστούμε μια διαγώνια διαδρομή διαμέσου των επεξεργαστών $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_5}$, $\mathbf{P_{10}}$, $\mathbf{P_{15}}$.
- Για να γίνει η αναστροφή πρέπει τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο να μετακινηθούν στις αντίστοιχες διαμετρικά αντίθετες θέσεις πάνω από την κύρια διαγώνιο και αντίστροφα.
- Κάθε στοιχείο που βρίσκεται κάτω από τη κύρια διαγώνιο μετακινείται πρώτα προς τα πάνω μέχρι τη διαγώνιο και μετά προς τα δεξιά στον αντίστοιχο επεξεργαστή του προορισμού του.
- Παρόμοια, κάθε στοιχείο που βρίσκεται πάνω από τη κύρια διαγώνιο μετακινείται πρώτα προς τα κάτω μέχρι τη διαγώνιο και μετά προς τα αριστερά στον αντίστοιχο επεξεργαστή του προορισμού του.

Σχ. 3(α): Η μορφή επικοινωνίας

- Για παράδειγμα
  - το στοιχείο του πίνακα που βρίσκεται αρχικά στον $\mathbf{P_8}$ μετακινείται στον $\mathbf{P_2}$ διερχόμενο διαμέσου των $\mathbf{P_4}$, $\mathbf{P_0}$ και $\mathbf{P_1}$ και
  - το αρχικό στοιχείο του $\mathbf{P_2}$ μετακινείται στον $\mathbf{P_8}$ διερχόμενο διαμέσου των $\mathbf{P_6}$, $\mathbf{P_{10}}$ και $\mathbf{P_9}$.

Σχ. 3(β): Η τελική κατανομή των στοιχείων στους επεξεργαστές

1.1.2 Πλέγμα (mesh) *Περίπτωση 2:* $\mathbf{p} < \mathbf{n}^2$

- Θεωρούμε ότι ο $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακας **A** διαμοιράζεται στους **p** επεξεργαστές με τη χρήση ενός ομοιόμορφου διαχωρισμού σε ομάδες τετραγώνων.
- Η αναστροφή του *A* μπορεί να υπολογιστεί σε δύο φάσεις όπως φαίνεται στο σχήμα 4.

1η φάση

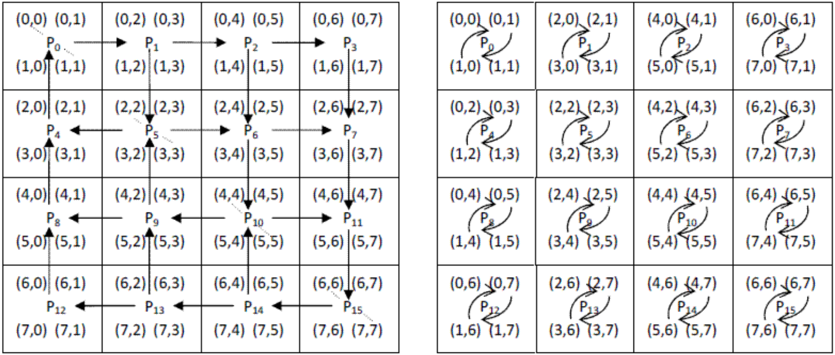
Στην **1η φάση** οι ομάδες του πίνακα μεταχειρίζονται ως αδιαίρετες ενότητες(μονάδες) και αναστρέφεται ο διδιάστατος πίνακας που έχει ως στοιχεία του τις ομάδες (σχ. $4(\alpha)$).

Σε αυτό το βήμα απαιτείται μια εσωτερική επικοινωνία παρόμοια εκείνης στο σχήμα 3(α), εκτός του ότι επικοινωνούν (αντί των στοιχείων του πίνακα) οι $(\mathbf{n}/\sqrt{\mathbf{p}}) \times (\mathbf{n}/\sqrt{\mathbf{p}})$ ομάδες.

2η φάση

Στην **2η φάση** πρέπει όλες οι ομάδες να αναστραφούν τοπικά μέσα στους αντίστοιχους επεξεργαστές τους (σχ. $4(\beta)$).

Σχήμα 4 : Οι δυό φάσεις της αναστροφής ενός **8** $\times$ **8** *πίνακα με διαχωρισμό σε τετράγωνα σε πλέγμα με 16 επεξεργαστές*



Σχήμα: (α) βήματα Επικοινωνίας (β) Τοπική Αναδιάταξη

- Όπως φαίνεται στο σχήμα 4(α) τα μονοπάτια επικοινωνίας των ομάδων στην ίδια γραμμή ή στήλη επικαλύπτονται.
  Π.χ. όλες οι ομάδες που αρχικά βρίσκονται στην πρώτη στήλη (δηλ. οι $\mathbf{P_4}$, $\mathbf{P_8}$ και $\mathbf{P_{12}}$) διέρχονται διαμέσου της $\mathbf{P_0}$ για να φθάσουν στους αντίστοιχους προορισμούς τους στην πρώτη γραμμή (που είναι οι $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ και $\mathbf{P_3}$ αντίστοιχα).
- Συνεπώς, πρέπει να συγχρονίζονται τα διάφορα βήματα επικοινωνίας έτσι ώστε μόνο ένα μήνυμα να μεταφέρεται κατά μήκος μιας σύνδεσης ανά χρονική στιγμή.
  Π.χ. στο πρώτο βήμα ο $\mathbf{P_{12}}$ μεταφέρει την ομάδα του στον $\mathbf{P_8}$, ο $\mathbf{P_8}$ την μεταφέρει στον $\mathbf{P_4}$ και ο $\mathbf{P_4}$ την μεταφέρει στον $\mathbf{P_0}$.

- Κατά τη διάρκεια της φάσης της επικοινωνίας, οι ομάδες του πίνακα που βρίσκονται αρχικά στους κάτω-αριστερά και πάνω-δεξιά επεξεργαστές (σχ. 5(α)) διανύουν τις μέγιστες αποστάσεις για να ανταλλάξουν τις θέσεις τους.
- Τα μονοπάτια αυτά, διανύοντας το καθένα προσεγγιστικά $\mathbf{2\sqrt{p}}$ συνδέσεις, καθορίζουν τον συνολικό χρόνο επικοινωνίας.
- Επειδή κάθε ομάδα περιέχει $\mathbf{n^2/p}$ στοιχεία, για την μετακίνησή της διαμέσου μιας απλής σύνδεσης απαιτείται χρόνος ίσος με $\mathbf{t_s + t_w n^2/p}$. Συνεπώς για την μετακίνηση όλων των ομάδων στους τελικούς προορισμούς τους απαιτείται συνολικός χρόνος ίσος με $\mathbf{2(t_s + t_w n^2/p)\sqrt{p}}$.
- Ο κάθε επεξεργαστής απαιτεί προσεγγιστικά $\mathbf{n^2/2p}$ χρονικές μονάδες για την αναστροφή του $(\mathbf{n/\sqrt{p}}) \times (\mathbf{n/\sqrt{p}})$ υποπίνακα που κατέχει.

- Έτσι λοιπόν, ο συνολικός χρόνος της παράλληλης διάτρεξης είναι:

$$T_p = \frac{n^2}{2p} + 2t_s\sqrt{p} + 2t_w\frac{n^2}{\sqrt{p}}$$

- Αρα το κόστος του παράλληλου συστήματος είναι:

$$p \cdot T_p = \frac{n^2}{2} + 2t_s p^{\frac{3}{2}} + 2t_w n^2\sqrt{p}$$

- Ο όρος που συνδέεται με το t_w καταλήγει σε ένα κόστος $\Theta(n^2\sqrt{p})$ που είναι μεγαλύτερο από το $\Theta(n^2)$ της ακολουθιακής αναστροφής.
- Ο συνολικός χρόνος επικοινωνίας του αλγορίθμου αυτού είναι η ίδια και για τις δύο τεχνικές αποστολής μηνυμάτων.

Υπερκύβος

Είδαμε προηγουμένως ότι αν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι ομοιόμορφα διαχωρισμένος σε ομάδες ίσου μεγέθους τότε η αναστροφή του μπορεί να γίνει σε δυό φάσεις:

1. πρώτα η αναστροφή των ομάδων τετραγώνων και
2. έπειτα η αναστροφή των στοιχείων μέσα στην κάθε ομάδα.

Λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω αναπτύσσουμε τον γνωστό αναδρομικό αλγόριθμο αναστροφής (Recursive Transposition Algorithm) (RTA) που είναι κατάλληλος για την αρχιτεκτονική του υπερκύβου(Σχ. 5).

Ο αναδρομικός αλγόριθμος αναστροφής (RTA)

- Αν ο πίνακας A είναι διαχωρισμένος σε 4 ομάδες τετραγώνων η εργασία της αναστροφής του περιλαμβάνει την ανταλλαγή της πάνω-δεξιάς και κάτω-αριστεράς ομάδας (Σχ. $5(\alpha)$) και μετά τον υπολογισμό του αναστρόφου κάθε μιας από τις 4 ομάδες εσωτερικά. Ο υπολογισμός των μετασχηματισμών αυτών των ομάδων μπορεί να γίνει παράλληλα με την επιπλέον υποδιαίρεση καθεμιάς από αυτές σε 4 υποομάδες (Σχ. $5(\beta)$) και με επανάληψη της διαδικασίας.
- Η διαδικασία της υποδιαίρεσης και αναστροφής των ομάδων επαναλαμβάνεται αναδρομικά μέχρις ότου όλος ο πίνακας αναστραφεί(Σχ. $5(\gamma)$ και (δ)).

Σχήμα 5 Ο αναδρομικός αλγόριθμος αναστροφής (RTA) ενός **8** × **8** πίνακα

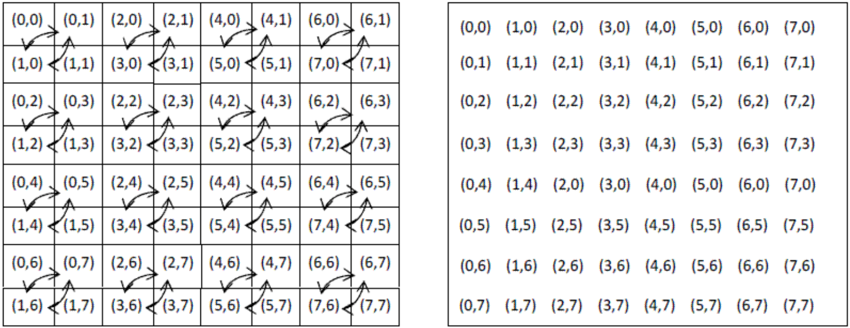
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	(0,7)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)
(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)
(6,0)	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)
(7,0)	(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)

(α) Διαίρεση του πίνακα σε 4 ομάδες
και ανταλλαγή της πάνω-δεξιάς
με την κάτω-αριστερή ομάδα

(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(6,0)	(6,1)	(6,2)	(6,3)
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(7,0)	(7,1)	(7,2)	(7,3)
(0,4)	(0,5)	(0,6)	(0,7)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)
(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)
(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)
(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)

(β) Διαίρεση της κάθε ομάδας σε 4 υποομάδες
και ανταλλαγή της πάνω δεξιάς
με την κάτω-αριστερή υποομάδα

Ο αλγόριθμος (RTA) αντιστοιχεί φυσικά σε ένα υπερκύβο



Σχήμα: (γ) Τελευταία υποδιαίρεση και Αναστροφή δ) Τελική κατάσταση

Ο αλγόριθμος RTA αντιστοιχεί φυσικά σε ένα υπερκύβο

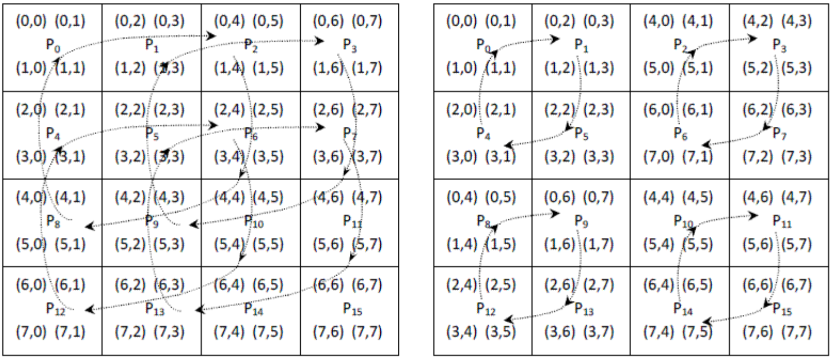
- Στο *1ο βήμα* του αλγορίθμου, θεωρούμε ότι ένας υπερκύβος με π επεξεργαστές αποτελείται από 4 υποκύβους με $\mathbf{p}/\mathbf{4}$ επεξεργαστές ο καθένας (αν $\sqrt{\mathbf{p}}$ είναι δύναμη του 2). Καθεμιά από τις 4 ομάδες, που προκύπτουν από την πρώτη υποδιαίρεση του πίνακα, αντιστοιχεί στον καθένα από τους υποκύβους.
- Στα *επόμενα* βήματα ένας υποκύβος θεωρείται ως ένας συνδυασμός από 4 μικρότερους υποκύβους.
- Στο *τελικό* αναδρομικό βήμα, οι υποκύβοι περιέχουν ένα μόνο επεξεργαστή ο καθένας.

Επειδή στο κάθε αναδρομικό βήμα το μέγεθος των υποκύβων υποτετραπλασιάζεται, συνολικά εκτελούνται

$$\mathbf{log_4 p} = (\mathbf{log_2 p})/\mathbf{2} \quad \text{βήματα.}$$

Υποθέτουμε ότι ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακας διαμοιράζεται σε $\mathbf{p}$ επεξεργαστές με τη χρήση του διαχωρισμού *σε ομάδες τετραγώνων*. Τα βήματα της επικοινωνίας που υλοποιεί ο αλγόριθμος RTA παρουσιάζονται στο σχήμα 6 για $\mathbf{n} = \mathbf{8}$ και $\mathbf{p} = \mathbf{16}$.

Σχήμα 6 Βήματα επικοινωνίας στον RTA σε έναν υπερκύβο 16 επεξεργαστών.



(α) Διαίρεση του πίνακα σε 4 ομάδες και ανταλλαγή της πάνω-δεξιάς με την κάτω-αριστερή ομάδα

(β) Διαίρεση της κάθε ομάδας σε 4 υποομάδες και ανταλλαγή της πάνω δεξιάς με την κάτω-αριστερή υποομάδα

Παράδειγμα: $\mathbf{n = 8}$ και $\mathbf{p = 16}$

- Η μορφή επικοινωνίας χρησιμοποιεί την ιδιότητα του δικτύου ενός υπερκύβου σύμφωνα με την οποία κάθε σύνολο των αντιστοίχων επεξεργαστών στους 4 υποκύβους είναι ένας υπερκύβος 4 επεξεργαστών.
- Στο σχήμα 6(α), ένας υπερκύβος με 16 επεξεργαστές υποδιαρείται σε 4 υποκύβους με **4** επεξεργαστές ο καθένας. Στους 4 αυτούς υποκύβους, οι επεξεργαστές $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_{10}}$ και $\mathbf{P_8}$ κατέχουν τις αντίστοιχες θέσεις (πάνω αριστερή γωνία) και είναι συνδεδεμένες σε ένα υπερκύβο.
- Όταν τα πάνω-δεξιά και κάτω αριστερά (τέταρτα) τμήματα του πίνακα ανταλλάσονται, ο $\mathbf{P_8}$ στέλνει τα δεδομένα του στον $\mathbf{P_2}$ διαμέσου του $\mathbf{P_0}$ και ο $\mathbf{P_2}$ στέλνει τα δεδομένα του στον $\mathbf{P_8}$ διαμέσου του $\mathbf{P_{10}}$.
- Κατά τη διάρκεια της επικοινωνίας αυτής οι $\mathbf{P_0}$, $\mathbf{P_{10}}$ παρίστανται στην ανταλλαγή των δεδομένων μεταξύ $\mathbf{P_2}$ και $\mathbf{P_8}$ αλλά δεν εκτελούν καμμιά επικοινωνία με τα δικά τους (δεδομένα).

- Στο κάθε αναδρομικό βήμα του αλγορίθμου, τα ζεύγη των επεξεργαστών ανταλλάσουν τις ομάδες του πίνακα έτσι ώστε ένας ενδιάμεσος επεξεργαστής να δέχεται πρώτα τα δεδομένα από τον πηγαίο και έπειτα να τα προωθεί στον προορισμό τους.
- Μετά από κάθε βήμα, το πρόβλημα ανάγεται στην αναστροφή ενός πίνακα με διάσταση 1/4 της διάστασης του αρχικού πίνακα.
- Μετά από $(\log_2 p)/2$ βήματα, ο $n \times n$ πίνακας έχει υποδιαιρεθεί σε ομάδες τετραγώνων διάστασης $n/\sqrt{p} \times n/\sqrt{p}$, οι οποίες αναστρέφονται τοπικά στον κάθε επεξεργαστή.
- Επειδή το μέγεθος της κάθε ατομικής ομάδας δεδομένων που επικοινωνεί είναι n^2/p, το κάθε βήμα επικοινωνίας απαιτεί $t_s + t_w n^2/p$ χρονικές μονάδες (υποθέτοντας ότι η *αποστολή μηνυμάτων* γίνεται **με αποθήκευση και προώθηση** (store-and-forward routing)).

- Ο συνολικός χρόνος για την εκτέλεση των $\log_2 p$ βημάτων επικοινωνίας είναι:

$$T_1 = (t_s + t_w \frac{n^2}{p}) \log p.$$

- Επίσης ο χρόνος που απαιτείται για την εκτέλεση της αναστροφής στις τοπικές ομάδες είναι:

$$T_2 = \frac{n^2}{2p}.$$

- Επομένως ο συνολικός χρόνος της παράλληλης διάτρεξης του αλγορίθμου RTA είναι:

$$T = T_1 + T_2 = (t_s + t_w \frac{n^2}{p}) \log p + \frac{n^2}{2p}.$$

- Αν υποθέσουμε ότι η *αποστολή μηνυμάτων* στον υπερκύβο γίνεται **με διαχωρισμό και απόδοση** (cut-through routing)) τότε ο χρόνος επικοινωνίας του αλγορίθμου RTA βελτιώνεται και είναι:

$$T = (t_s + t_w n^2/p + 2t_h) \log p.$$

Συμπέρασμα

- Αρα στον υπερκύβο(όπως και στην περίπτωση πλέγματος), η αναστροφή πίνακα με διαχωρισμό σε τετράγωνα δεν έχει βέλτιστο κόστος.
- Το υπολογιστικό κόστος του παράλληλου αλγορίθμου και για τις δυό τεχνικές αποστολής μηνυμάτων είναι:

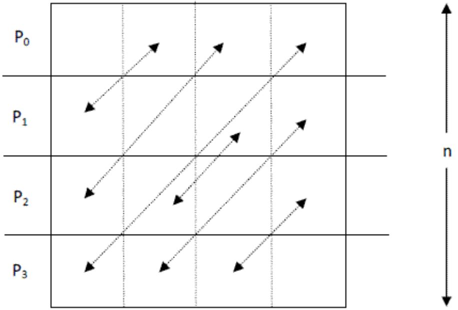
$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{T_p} = \Theta(\mathbf{n^2 logp}).$$

1.2 Διαχωρισμός σε λωρίδες

- Θεωρούμε ότι ένας $\mathbf{n} \times \mathbf{n}$ πίνακας $\mathbf{A}$ απεικονίζεται σε $\mathbf{n}$ επεξεργαστές έτσι ώστε ο κάθε επεξεργαστής να περιέχει μιά πλήρη γραμμή του πίνακα. Με αυτή την απεικόνιση, ο επεξεργαστής $\mathbf{P_i}$ αρχικά περιέχει τα στοιχεία της $\mathbf{i}$ γραμμής του πίνακα με δείκτες $[\mathbf{i}, \mathbf{0}], [\mathbf{i}, \mathbf{1}], \cdots, [\mathbf{i}, \mathbf{n}-\mathbf{1}]$.
- Μετά την αναστροφή, το στοιχείο $\mathbf{a}[\mathbf{i}, \mathbf{0}]$ ανήκει στον $\mathbf{P_0}$, το στοιχείο $\mathbf{a}[\mathbf{i}, \mathbf{1}]$ ανήκει στον $\mathbf{P_1}$, κ.ο.κ.
- Γενικά, το στοιχείο $\mathbf{a}[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$ αρχικά μένει στον $\mathbf{P_i}$, αλλά κατά τη διάρκεια της αναστροφής μετακινείται στον $\mathbf{P_j}$.
- Το σχήμα της μεταφοράς δεδομένων φαίνεται στο σχήμα 7 για ένα $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ πίνακα που απεικονίζεται σε 4 επεξεργαστές με τη χρήση του διαχωρισμού σε γραμμές. Κάθε επεξεργαστής στέλνει ένα μόνο στοιχείο του πίνακα σε κάθε άλλο επεξεργαστή, δηλαδή γίνεται μια επικοινωνία όλων προς όλους προσωπικά.
- Γενικά, αν $\mathbf{p} \leq \mathbf{n}$ τότε ο κάθε επεξεργαστής αρχικά αποθηκεύει $\mathbf{n}/\mathbf{p}$ γραμμές(δηλ. $\mathbf{n^2}/\mathbf{p}$ στοιχεία) του πίνακα.

Σχήμα 7 Επικοινωνία όλων προς όλους προσωπικά για την αναστροφή ενός $\mathbf{4} \times \mathbf{4}$ πίνακα με $p = 4$ επεξεργαστές

- Με την εκτέλεση της αναστροφής γίνεται μιά επικοινωνία όλων προς όλους προσωπικά μεταξύ των ομάδων του πίνακα μεγέθους $\mathbf{n}/\mathbf{p} \times \mathbf{n}/\mathbf{p}$, αντί των μεμονωμένων στοιχείων.



- Στο τέλος της φάσης επικοινωνίας, ο κάθε επεξεργαστής εκτελεί μιά εσωτερική αναστροφή σε αυτές τις ομάδες. Υποθέτοντας ότι κάθε ανταλλαγή ενός ζεύγους στοιχείων απαιτεί μια χρονική μονάδα, μια τέτοια ομάδα πίνακα μπορεί να αναστραφεί σε $\mathbf{n^2/(2p^2)}$ χρονικές μονάδες.
- Επειδή ο κάθε επεξεργαστής έχει $\mathbf{p}$ τέτοιες ομάδες, για την αναστροφή τους απαιτούνται $\mathbf{n^2/(2p)}$ χρονικές μονάδες.
- Οι εκφράσεις για τον χρόνο μιας όλων προς όλους προσωπικής επικοινωνίας σε διάφορες αρχιτεκτονικές προκύπτει από τον σχετικό πίνακα(σχήμα 8), αν αντικαταστήσουμε το μέγεθος $\mathbf{m}$ του μηνύματος με $\mathbf{n^2/p^2}$.
- Ο αλγόριθμος έχει βέλτιστο κόστος μόνο σε υπερκύβο με αποστολή μηνυμάτων με διαχωρισμό και απόδοση, όπου ο χρόνος επικοινωνίας προσεγγιστικά είναι:

$$\mathbf{T_{comm} = t_s(p-1) + t_w\frac{n^2}{p} + \frac{1}{2}t_h p \log p}.$$

- Ο συνολικός χρόνος της παράλληλης διάτρεξης είναι:

$$T_p = \frac{n^2}{2p} + t_s(p-1) + t_w\frac{n^2}{p} + \frac{1}{2}t_h p \log p.$$

- Άρα το κόστος του παράλληλου συστήματος είναι:

$$p \cdot T_p = \frac{n^2}{2} + t_s p(p-1) + t_w n^2 + \frac{1}{2}t_h p^2 \log p.$$

- Ο όρος που συνδέεται με το t_w καταλήγει σε ένα κόστος $\Theta(n^2)$ που είναι βέλτιστο.

Σχήμα 8 Χρόνοι Επικοινωνίας των διαφόρων λειτουργιών σε διάφορες αρχιτεκτονικές με επικοινωνία μιας σύνδεσης(link) *με διαχωρισμό και απόδοση*

	Αρχιτεκτονική		
Λειτουργία	**Δακτύλιος**	**Διδιάστατο πλέγμα** (αναδιπλούμενο τετραγωνικό)	**Υπερκύβος**
Ενας προς όλους	$(t_s + t_w m)\log p$ $+ t_h(p-1)$	$(t_s + t_w m)\log p$ $+ 2t_h(\sqrt{p}-1)$	$(t_s + t_w m)\log p$
Ολοι προς όλους	$(t_s + t_w m)(p-1)$	$2t_s(\sqrt{p}-1) + t_w m(p-1)$	$t_s \log p + t_w m(p-1)$
Ενας προς όλους προσωπικά	$(t_s + t_w m)(p-1)$	$2t_s(\sqrt{p}-1) + t_w m(p-1)$	$t_s \log p + t_w m(p-1)$
Ολοι προς όλους προσωπικά	$(t_s + t_w p/2)(p-1)$	$(2t_s + t_w mp)(\sqrt{p}-1)$	$(t_s + t_w m)(p-1) + (t_h/2)p\log p$
Κυκλικά x-ολισθήσεις	$(t_s + t_w m)\lfloor p/2 \rfloor$	$(t_s + t_w m)(2\lfloor \sqrt{p}/2 \rfloor + 1)$	$t_s + t_w m + t_h(\log p - \gamma(q))$

t_s : ο χρόνος εκκίνησης
t_w : ο χρόνος μεταφοράς μιας λέξης
t_h : ο χρόνος αναμονής(ή ανίχνευσης)

$\gamma(q)$: ο μέγιστος ακέραιος **j** τέτοιος ώστε ο 2^j δεν διαιρεί τον **q**