Geometric data analysis

1a. Convexity

Ioannis Emiris

Dept Informatics & Telecoms
NKU Athens

Fall 2020

Outline

1. Κυρτό Περίβλημα σε δύο διαστάσεις
2. Πολύεδρα γενικής διάστασης
   - Linear programming

Κυρτότητα

Definition (Κυρτό σύνολο)

Το σύνολο S είναι κυρτό (convex) ανν $a, b \in S \Rightarrow$ το ευθύγραμμο τμήμα $(a, b) \subset S$.

Definition (ΚΠ2: Κυρτό Περίβλημα σε 2δ)

- n σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_n$ στο $\mathbb{R}^2$.
- Το κυρτό περίβλημα (ΚΠ) συνόλου σημείων είναι το μικρότερο (ως προς επιφάνεια, ως προς περίμετρο, ή ως σημειοσύνολο) κυρτό σύνολο το οποίο περιλαμβάνει όλα τα A_i.
- Το ΚΠ των A_i είναι ένα κυρτό πολύγωνο με κορυφές $\{P_1, \ldots, P_k\} \subset \{A_1, \ldots, A_n\}$, $k \leq n$.

Ιδιότητες ΚΠ

- Γραμμικός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \ \lambda_i \in \mathbb{R}$.
- Θετικός (κωνικός) συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \ \lambda_i \geq 0$.
- Αφινικός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \ \sum_i \lambda_i = 1$.
- Κυρτός συνδυασμός $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n, \ \sum_i \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0$.

Example ($A_1, A_2 \in \mathbb{R}^2$ linearly independent)

- Γραμμικός συνδυασμός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 : \lambda_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.
- Θετικός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2, \ \lambda_i \geq 0\} =$ κώνος των A_1, A_2, κορυφή $(0,0)$
- Αφινικός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 : \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$: ευθεία από τα A_1, A_2
- Κυρτός: $\{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 : \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \ \lambda_i \geq 0\}$: ευθ. τμήμα (A_1, A_2)

- Τα σημεία του ΚΠ είναι κυρτοί συνδυασμοί των P_i (και των A_i).
- Κάθε κυρτός συνδυασμός των P_i, ή των A_i, ανήκει στο ΚΠ.

Τομή ημιεπιπέδων

Definition (H-representation)

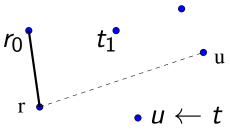
Μια ισοδύναμη αναπαράσταση κυρτού πολυγώνου P με k ακμές είναι ως η τομή k ημιεπιπέδων

$$P = \bigcap_{i=1}^{k} H_i,$$

όπου το H_i ορίζεται από την ευθεία της ακμής i και περιέχει τις υπόλοιπες ακμές.

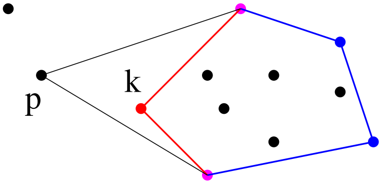
Αλγόριθμος περιτύλιξης (Giftwrap)

• r_0 η αριστερότερη, r η πιο πρόσφατη κορυφή:
• u το υποψήφιο σημείο για να γίνει επόμενη κορυφή.
• Δοκιμάζουμε όλα τα σημεία $t_1, t, \ldots$: το t "βελτιώνει" το u, ενώ το t_1 έπαιξε τον ρόλο του t προηγουμένως.



- Αρχικοποίηση $= O(n)$.
- Προσθήκη H ακμών, καθεμιά με πολυπλοκότητα $O(n)$.
- Συνολικός χρόνος $= O(Hn)$.
- Κάτω φράγμα ΚΠ2 $= \Omega(n \log n)$.

Beneath-Beyond για το ΚΠ2



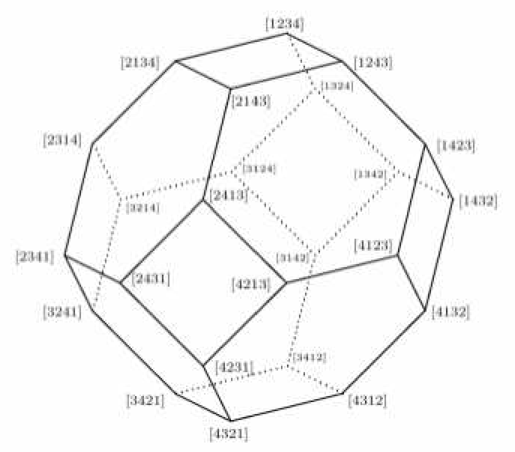
Ανανέωση ΚΠ με το επόμενο σημείο p. Ορισμός κόκκινων (ορατών) /γαλάζιων (αόρατων) ακμών/κορυφών και βυσσινί (μικτών) κορυφών.

- Αρχικοποίηση: διάταξη κορυφών ως προς x: $O(n \log n)$.
- $\forall$ νέο σημείο:
  - Εύρεση μίας κόκκινης ακμής $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
  - Χρωματισμός όλων των κόκκινων ακμών $\leq$ #νέων ακμών $\leq 2n$.
  - Κατασκευή δύο νέων ακμών $= O(1) \Rightarrow$ Συνολικά $= O(n)$.
- Συνολικός χρόνος $= O(n \log n)$.

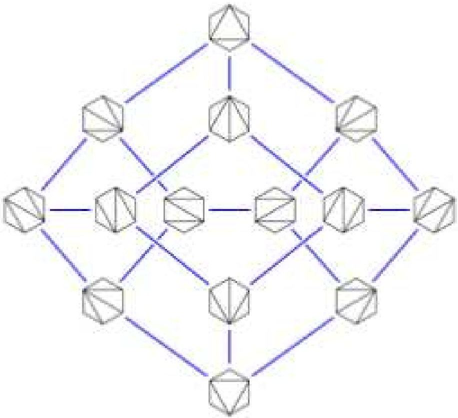
Outline

Μεταθέσεις

Permutahedron



Associahedron



ΚΠd

Definition (Τομή ημιχώρων)

Κυρτό πολύτοπο (polytope) ή πολύεδρο (polyhedron) είναι η Τομή πεπερασμένου πλήθους ημιχώρων.

Definition (ΚΠ σημείων)

Έστω σημεία $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^d$. Το Κυρτό Περίβλημα ΚΠ$(A_1, \ldots, A_n)$ είναι το μικρότερο (ως προς όγκο ή ως σημειοσύνολο) κυρτό πολύεδρο (τομή ημιχώρων), που περιέχει τα $A_1, \ldots, A_n$.

Corollary

- *Οι κορυφές $P_1, \ldots, P_k$ του ΚΠd ανήκουν στο $\{A_1, \ldots, A_n\}$.*
- *Τα σημεία του ΚΠ είναι κυρτοί συνδυασμοί των κορυφών.*

Άπλοκα

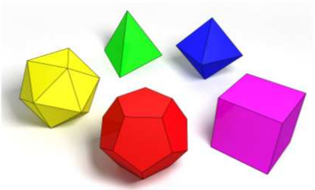
Definition

d-άπλοκο (simplex): Κυρτό πολύεδρο ΚΠ$(A_0, \ldots, A_d)$ τ.ώ. τα $A_i \in \mathbb{R}^d$ είναι αφινικώς ανεξάρτητα δηλ. τα $A_i - A_0$ γραμμικώς ανεξάρτητα.
Π.χ. Ευθύγραμμο τμήμα στο $\mathbb{R}$, τρίγωνο στο $\mathbb{R}^2$, τετράεδρο στο $\mathbb{R}^3$.

Definition

Απλό (simple): d-πολύεδρο σε κάθε κορυφή τέμνονται ακριβώς d έδρες
Απλοειδές (simplicial) d-πολύεδρο: $\forall$ έδρα άπλοκο διάστασης $d-1$.

Platonic Solids



Θεώρημα άνω φράγματος (upper bound)

Theorem (McMullen)

Οποιοδήποτε d–πολύεδρο με n κορυφές (ή n έδρες) περιέχει

$$O\left(n^{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$$

k-διάστατες όψεις, όπου διάσταση $k = 0, \ldots, d-1$.
Φράγμα σφιχτό στα κυκλικά πολύεδρα: $A_i = (i, \ldots, i^d), 1 \leq i \leq n$.

Corollary

Αν $d = O(1)$, *#όψεων όλων των διαστάσεων* $= O\left(dn^{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$.

Corollary

n *σημεία στο* $\mathbb{R}^d$: $K\Pi d = \Omega(n \log n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ *στην χείριστη περίπτωση.*
Χωρική πολυπλοκότητα $= \Omega(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$.

Αλγόριθμοι ΚΠd

Theorem (Beneath-Beyond)

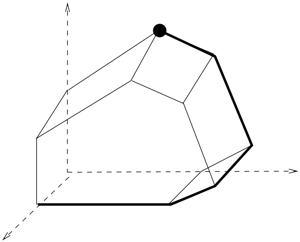
Τυχαιοκρατικός αναμενόμενου κόστους $O(n \lg n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ *[Seidel].*
Ντετερμινιστικός, βέλτιστος στην χείριστη περίπτωση:
$O(n \log n + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ *[Chazelle].*

Theorem (Αλγόριθμος περιτύλιξης)

Συνολικός χρόνος $= O(nH)$, $H = \#$*εδρών.*
Χωρική πολυπλοκότητα αντίστοιχη με Reverse search [Avis,Fukuda].

Outline

Γραμμικός Προγραμματισμός



Αλγόριθμος Simplex [Dantzig'63]

- Χείριστη περίπτωση: εκθετικός ως προς d από θεώρημα MacMullen για πολύεδρο n εδρών, πολυωνυμικός ως προς n.
- Δυϊσμός: εκθετικός ως προς n, πολυωνυμικός ως προς d.

Πολυωνυμικοί αλγόριθμοι

(Ασθενώς) πολυωνυμικοί δηλ. ως προς d, n, bitsize:

Ελλειψοειδής [Khachiyan'79]

- Γενική αναπαράσταση και μέσω Μαντείου (membership).
- Υπάρχει φράγμα σε συνάρτηση της ακτίνας της περιγεγραμμένης και εγγεγραμμένης σφαίρας που αποφεύγει το bitsize.

Εσωτερικών σημείων [Karmarkar'84]

Ταχύτερος, Αναπαράσταση εισόδου ως τομή ημιχώρων.

Αυξητικός αλγόριθμος [Megiddo'84]

- Αυξητικός γεωμετρικός $= O(n \cdot \exp(d))$.
- Αμφότεροι $O(n)$ αν $d = O(1)$.