Διατακτικοί αριθμοί και κλασσικές καλές διατάξεις

Ενότητες 10.3, 10.4 του βιβλίου Homotopy type theory

<u>Ορισμός 1:</u> Έστω A σύνολο και μία *δυαδική σχέση* στο A

(- < -) : A -> A -> PROP

Ορίζουμε με επαγωγή τι σημαίνει για a:A να είναι *προσβάσιμο* μέσω της < :
Αν για κάθε b<a έχουμε ότι το b είναι προσβάσιμο, τότε το a είναι προσβάσιμο. Για προσβάσιμο a γράφουμε acc(a).

Σημειώνουμε ότι ο παραπάνω αποτελεί επαγωγικό ορισμό μιας οικογένειας τύπων, καθώς ορίζεται για οποιαδήποτε δυάδα συνόλου και δυαδικής σχέσης πάνω σε αυτό.
Ο συγκεκριμένος τύπος έχει έναν κατασκευαστή

$$\mathsf{acc}_< : \prod_{a:A} \Big(\prod_{b:A} (b < a) \to \mathsf{acc}(b) \Big) \to \mathsf{acc}(a).$$

Η αρχή επαγωγής του είναι μακροσκελής . Εμείς θα την χρησιμοποιήσουμε μόνο σε περιπτώσεις που η οικογένεια τύπων εξαρτάται μόνο από το A (δηλ της μορφής P: A -> U) . Συνεπώς τα συστατικά που χρειαζόμαστε είναι:

P: A -> U και

$$f : \prod_{a:A} \Big(\prod_{b:A} (b < a) \to \mathsf{acc}(b) \times P(b) \Big) \to P(a).$$

Δηλαδή, υποθέτουμε ότι για κάθε b:A με b<a έχουμε acc(b) και ότι P(b) και από αυτό συμπεραίνουμε P(a). Η αρχή επαγωγής δίνει g: Π(a:A)acc(a) -> P(a). Η επιλογή το P να είναι μονοθέσιο και να μην εξαρτάται από το c:acc(a) δικαιολογείται από το επόμενο λήμμα.

<u>Λήμμα 2:</u> Η προσβασιμότητα είναι απλή ιδιότητα

Ορισμός 3: Μια δυαδική σχέση < σε ένα σύνολο A λέγεται *καλώς-θεμελιομένη* αν κάθε a:A είναι προσβάσιμο.

Λήμμα 4: Η καλή-θεμελίωση είναι απλή πρόταση, διότι ο τυπός της είναι ο Π(a:A) acc(a) που είναι απλή πρόταση αφού το acc(a) είναι.

Ο σκοπός της καλής θεμελίωσης είναι ότι για P: A -> U μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αρχή επαγωγής του acc για να πάρουμε Π(a:A) acc(a) -> P(a) και από εκεί χρησιμοποιώντας την καλή-θεμελίωση να εξάγουμε Π(a:A) P(a) . Για να το διατυπώσουμε διαφορετικά, αν για κάθε b:A με b<a, έχουμε P(b) και από αυτό μπορούμε να αποδείξουμε το P(a), τότε για κάθε a:A έχουμε P(a). Αυτό ονομάζεται καλώς-θεμελιωμένη επαγωγή.

Ορίζουμε τον τύπο των *υποσυνόλων* ενός συνόλου A , ως $P(A) := (A \to Prop)$
Συνεπώς αν $B: P(A)$ ορίζουμε $x \in B$ αν $B(x)$ κατοικείται, δηλαδή $B=\{x:A \mid B(x)\}$
Ένα $B:P(A)$ λέγεται κενό αν $B=\lambda(x:A)\bot$

<u>Λημμα*:</u> Υποθέτοντας το LEM τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

I) Το B είναι διάφορο του $(\lambda x.\ \bot):P(X)$

II) Το B απλώς κατοικείται, δηλαδή $\exists(x : A).\ x \in B$

Απόδειξη: (ι)=>(ιι) Αν $B\neq \lambda(x:A)\bot$ τότε από function extentionality $\neg\prod(x:A)[B(x)=\bot]$. Τότε από LEM $\|\sum(x:A)[B(x)\neq\bot]\|$ καθώς και $P\neq\bot \Rightarrow P$. Το τελευταίο ισχύει καθώς αν P τότε δεν έχουμε κάτι να δείξουμε, ενώ αν ¬P τότε από univalence $P=\bot$.
Από τα προηγούμενα εξάγουμε $\|\sum(x:A)B(x)\|$ το ζητούμενο.
(ιι)=>(ι) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\|\Sigma(x:A)B(x)\| \to (\Pi(x:A)B(x) = \bot \to \bot)$. Επειδή θέλουμε να δείξουμε μια απλή πρόταση, από επαγωγή στη σύνθλιψη, μπορούμε να υποθέσουμε $a:A$ και $b:B(x)$.
Τώρα θεωρούμε $f:\Pi(x:A)B(x)=\bot$ και θέλουμε να εξάγουμε στοιχείο του ⊥. Έχουμε $f(a):B(a)=\bot$ και $\mathrm{idtoeqv}(f(a)):B(a) \to \bot$. Τότε όμως $\mathrm{idtoeqv}(f(a))(b) : \bot$ και τελειώσαμε.

<u>Λήμμα 5:</u> Υποθέτοντας το LEM, η $<$ είναι καλώς-θεμελιωμένη <u>ανν</u> κάθε μη-κενό υποσύνολο $B:P(A)$ απλώς έχει ελαχιστικό στοιχείο.
Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι $<$ καλώς-θεμελιωμένη και ότι $B:P(A)$ χωρίς ελαχιστικό στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι για $a:A$ με $a\in B$, τότε απλώς υπάρχει $b:A$ με $b<a$ και $b\in B$. Θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $a:A$, έχουμε not $a\in B$. Από επαγωγή υποθέτουμε ότι για κάθε τέτοιο $a':A$ με $a'<a$, δεν ισχύει $a'\in B$. Αν $a\in B$, από υπόθεση θα είχαμε ότι απλώς υπάρχει $b\in B$ με $b<a$, άτοπο. Συνεπώς not $a\in B$ και αφού $<$ καλώς-θεμελιωμένη , not $a\in B$ για κάθε $a:A$, δηλαδή B κενό.
Υποθέτουμε τώρα ότι κάθε μη-κενό υποσύνολο του A απλώς έχει ελαχιστικό στοιχείο. Θεωρούμε το $B=\{a:A \mid \neg acc(a)\}$. Έχουμε $B:P(A)$, μη-κενό άρα ελαχιστικό στοιχείο. Συνεπώς απλώς υπάρχει $a:A$ με $a\in B$, τ.ω. για κάθε $b<a$ έχουμε $acc(b)$. Από τον ορισμό όμως της προσβασιμότητας έχουμε $acc(a)$, το οποίο αντιβαίνει στο $a\in B$. Άρα B κενό και $<$ καλώς θεμελιωμένη.

<u>Ορισμός 5:</u> Μια καλώς-θεμελιωμένη σχέση < σε ένα σύνολο A λέγεται *εκτασιακή* αν για οποιαδήποτε a,b:A έχουμε:
(∀(c:A).(c<a) <=> (c<b)) -> (a=b)

Παρατηρούμε ότι εφ'όσον το A είναι σύνολο η εκτασιακότητας είναι απλή πρόταση.
Για να συνοψίσουμε, ξεκινώντας από τον τύπο των δυαδικών σχέσεων συνόλων πήραμε τον υποτύπο τον καλώς-θεμελιωμένων σχέσεων και στη συνέχεια τον υποτύπο αυτού, των καλώς-θεμελιωμένων
και εκτασιακών σχέσεων.

<u>Θεώρημα 6 :</u> Σε univalent universe, ο τύπος των καλώς-θεμελιωμένων, εκτασιακών σχέσεων είναι σύνολο.
Απόδειξη: Από univalence axiom , αρκεί να δείξουμε ότι αν (A,<) μια Κ-Θ.Ε.Σ. και f: (A,<) ~= (A,<) τότε f=idA.
Θα δείξουμε με επαγωγή στο < ότι για a:A ,f(a)=a . Η υπόθεση είναι ότι για όλα τα a'<a , f(a')=a' .
Επειδή ο A είναι εκτασιακός, για να συμπεράνουμε ότι f(a)=a αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε
c:A (c<f(a)) <=> (c<a)

Επειδή f αυτομορφισμός, έχουμε (c<a) <=> (f(c) < f(a))
Όμως c<a => f(c)=c από ε.υ. και συνεπώς (c<a) => (c<f(a)) . Από την άλλη, αν c<f(a) τότε f^-1(c) <a και άρα c=f(f^-1(c)) = f^-1(c) από ε.υ. , επομένως c<a . Τελικά έχουμε (c<a) <=> (c<f(a)) για οποιοδήποτε c:A , δηλαδή a=f(a) .

<u>Ορισμός 7:</u> Αν (A,<) και (B,<) είναι Κ-Θ.Ε.Σ. , μία *προσομοίωση* είναι μία συνάρτηση f:A -> B τέτοια ώστε:
1) Αν a<a' τότε f(a)<f(a') και
2) Για κάθε a:A και b:B , αν b<f(a) τότε απλώς υπάρχει ένα a':A τ.ω. f(a')=b.

<u>Λήμμα 8:</u> Οποιαδήποτε προσομοίωση είναι μονομορφική.

Σχήμα απόδειξης: Για να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε a,b:A , το f(a)=f(b) συνεπάγεται ότι a=b κάνουμε διπλή καλώς-θεμελιωμένη επαγωγή και χρησιμοποιούμε τις εκτασιακότητες και τις ιδιότητες μιας προσομοίωσης.

Παρατηρούμε ότι το να είναι μια συνάρτηση προσομοίωση είναι απλή πρόταση.

Λόγο τώρα της μονομορφικότητας της f, ο τύπος Σ(a:A).(f(a) = b) είναι απλή πρόταση. Συνεπώς αντί για απλή ύπαρξη έχουμε *γνήσια* .

Λέμε ότι το υποσύνολο C:P(B) είναι *αρχικό τμήμα* αν , c ∈ C και b<c συνεπάγονται b∈C. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι η εικόνα μιας προσομοίωσης είναι αρχικό τμήμα. Επίσης, ο εγκλεισμός ενός αρχικού τμήματος του B είναι προσομοίωση. Συνεπώς, από univalence , κάθε προσωμοίωση f: A - > B ισούται με τον εγκλεισμό ενός αρχικού τμήματος του B.

<u>Λήμμα 9:</u> Για Κ-Θ.Ε.Σ. (A,<) , (B,<) υπάρχει το πολύ μία προσομοίωση f: A -> B.

Σχήμα απόδειξης: Υποθέτουμε ότι f,g : A - > B προσομοιώσεις. Επειδή το να είναι προσομοίωση είναι απλή πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε a:A f(a)=g(a). Για να το πετύχουμε αυτό κάνουμε καλώς θεμελιωμένη επαγωγή και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των προσομοιώσεων και το γεγονός ότι οι σχέσεις είναι εκτασιακές.

Ως συνέπεια των προηγούμενων ορίζουμε για δυο Κ-Θ.Ε.Σ. , $A<=B$ αν υπάρχει προσωμοίωση f: A -> B.

<u>Ορισμός 10:</u> *Διατακτικός* ονομάζεται ένα σύνολο A μαζί με μία Κ-Θ.Ε.Σ. η οποία είναι μεταβατική, δηλαδή ικανοποιεί το εξής:
$\forall(a,b,c:A)\ (a<b) \to (b<c) \to (a<c)$. Συμβολίζουμε τον τύπο των διατακτικών με Ord.
Από τα προηγούμενα ο Ord είναι σύνολο. Θα δείξουμε ότι ορίζεται στο Ord μία καλώς-θεμελιομένη σχέση.

Αν A:Ord και a:A, συμβολίζουμε με $A/a := \{b:A \mid b<a\}$ το αρχικό τμήμα το οποίο είναι διατακτικός. Αν A/a = A/b σαν διατακτικοί, τότε ο ισομορφισμός τους πρέπει να σέβεται τους εγκλεισμούς αυτών στο A, και συνεπώς πρέπει να είναι ίσα ως σύνολα. Επειδή όμως A εκτασιακός, a=b και ορίζεται έτσι ένας μονομορφισμός A -> Ord.

<u>Ορισμός 11:</u> Για διατακτικούς A,B , μια προσομοίωση f: A -> B είναι *φραγμένη* αν υπάρχει b:B με A=B/b.

Επειδή το b είναι μοναδικό όταν υπάρχει, το να είναι μια προσομοίωση φραγμένη είναι απλή πρόταση. Όταν υπάρχει τέτοια f , γράφουμε $A<B$ (επίσης απλή πρόταση λόγο μοναδικότητας των προσομοιώσεων).

<u>Θεώρημα 12:</u> $(\mathrm{Ord}, <)$ είναι διατακτικός.
Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι οποιοσδήποτε διατακτικός A είναι προσβάσιμος, δηλαδή ότι η $<$ είναι καλώς-θεμελιωμένη.
Δείχνουμε πρώτα ότι για οποιοδήποτε $a:A$, το αρχικό τμήμα A/a είναι προσβάσιμο. Από αρχή επαγωγής στο A, υποθέτουμε ότι για $b:A$ με $b<a$, A/b προσβάσιμο . Από τον ορισμό της προσβασιμότητας πρέπει να δείξουμε ότι οποιοδήποτε $B:\mathrm{Ord}$ με $B<A/a$, είναι προσβάσιμο. Όμως $B<A/a$ συμαίνει ότι υπάρχει $b<a$ με $B=(A/a)/b = A/b$, το οποίο είναι προσβάσιμο από επαγωγική υπόθεση. Συνεπώς A/a προσβάσιμο για κάθε $a:A$.
Για να είναι ο A προσβάσιμος, πρέπει να δείξουμε ότι αν $B:\mathrm{Ord}$ με $B<A$, τότε B προσβάσιμο. Όμως πάλι $B<A$ σημαίνει ότι υπάρχει $a:A$ με $B=A/a$. Άρα το Ord είναι καλώς θεμελιωμένο.

Για την εκτασιακότητα, έστω $A,B:\mathrm{Ord}$ τ.ω. για κάθε $C:\mathrm{Ord}$ έχουμε $(C<A) \Leftrightarrow (C<B)$ και θα δείξουμε ότι $A=B$.
Επειδή για $a:A$, $A/a < A$ έχουμε $A/a<B$, δηλαδή υπάρχει $b:B$ με $A/a = B/b$. Ορίζεται έτσι μία συνάρτηση $f: A \to B$ που στέλνει το a στο b. Η f είναι ισομορφισμός και συνεπώς από univalence $A=B$.

Για την μεταβατικότητα, έστω $A<B$ και $B<C$. Τότε υπάρχουν $b:B$ και $c:C$ τ.ω. $A=B/b$ και $B=C/c$. 'Αρα υπάρχει c' με $A=B/b=(C/c)/c' = C/c'$.

<u>Λήμμα 13</u> : 'Εστω σύμπαν U. Για οποιονδήποτε διατακτικό $A:\mathrm{Ord}U$ υπάρχει $B:\mathrm{Ord}U$ τ.ω. $A<B$.
Θέτουμε $B=A+1$ με το $*:1$ να είναι μεγαλύτερο από οποιοδήποτε $a:A$. Δηλαδή $A=B/*$

Υποθέτοντας το LEM

<u>Λήμμα 14:</u> Κάθε διατακτικός είναι τριχωτομικός, δηλαδή
$\forall(a,b:A)\ (a<b) \vee (b<a) \vee (a=b)$
Απόδειξη: Με επαγωγή στο a, υποθέτουμε ότι για κάθε $a'<a$ έχουμε $(a'<b') \vee (b'<a') \vee (a'=b')$ για κάθε $b':B$. Με επαγωγή στο b, υποθέτουμε ότι για κάθε $b'<b$ έχουμε $(a<b') \vee (b'<a) \vee (a=b')$.
Από LEM, είτε απλώς υπάρχει $b'<b$ τ.ω. $a<b'$, είτε απλώς υπάρχει $b'<b$ τ.ω. $a=b'$, είτε για κάθε $b'<b$ ισχύει $b'<a$.
Η πρώτη περίπτωση μέσω μεταβατικότητας δίνει $a<b$, η δεύτερη το ίδιο μέσω transport. Οπότε ασχολούμαστε μόνο με την πρόταση $\forall(b':A)(b'<b) \to (b'<a)$. Χρησιμοποιώντας ανάλογο επιχείρημα δείχνουμε ότι είτε $b<a$ είτε $\forall(a':A)\ (a'<a) \to (a'<b)$. Αυτά τα δύο τώρα με την εκτασιακότητα δίνουν $a=b$.

<u>Λήμμα 15</u> : Οι καλώς-θεμελιομένες σχέσεις δεν περιέχουν κύκλους. Συγκεκριμένα είναι μη-ανακλαστικές.

<u>Θεώρημα 16</u>: $(A,<)$ είναι διατακτικός <u>ανν</u> κάθε μη-κενό υποσύνολο του $B:P(A)$ έχει ελάχιστο στοιχείο.
Απόδειξη: (=>) Από λήμμα 5 ένα $B:P(A)$ απλώς έχει ελαχιστικό στοιχείο. Από τριχοτόμιση το ελαχιστικό είναι ελάχιστο και λόγο της μοναδικότητας του ελάχιστου, η απλή ύπαρξη είναι το ιδιό με το να έχει ελάχιστο.
(<=) Αν κάθε μη-κενό υποσύνολο έχει ελάχιστο στοιχείο τότε από λήμμα 5 η σχέση είναι καλώς-θεμελιομένη. Η τριχοτόμηση προκύπτει από το γεγονός ότι για οποιαδήποτε $a,b:A$ το σύνολο $\{a,b\}$ απλώς έχει ελάχιστο στοιχείο που θα είναι το a ή το b.
Για τη μεταβατικότητα αν $a<b$ και $b<c$ τότε τα $a=c$, $c<a$ θα δημιουργούσαν κύκλο. Για την εκτασιακότητα υποθέτουμε ότι $\forall(c:A)\ (c<a) \Leftrightarrow (c<b)$. Τότε αν $a<b$, θέτοντας $c=a$ έχουμε $a<a$, άτοπο. Όμοια για το $b<a$, άρα $a=b$.

<u>Θεώρημα 17</u>: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
1)Για κάθε σύνολο Χ , απλώς υπάρχει μία συνάρτηση f: P+(X) -> X , τ.ω. f(Y) ∈ Y για κάθε Y: P+(X).
2) Κάθε σύνολο απλώς μπορεί να μετασχηματιστεί σε διατακτικό.

<u>Υποθέτοντας το Αξίωμα της Επιλογής</u>

<u>Πόρισμα 18:</u> Η συνάρτηση Ord -> Set (που ξεχνά την διάταξη) είναι επιμορφισμός.
Ο τύπος των πληθικών αριθμών ορίζεται ως Card:= || Set ||0. Συνεπώς υπάρχει μια κανονική προβολή
|-| : Set -> Card , η σύνθεση της οποίας με αυτή του πορίσματος δίνει επιμορφισμό Ord -> Card που στέλνει κάθε διατακτικό στην πληθικότητα του.

<u>Θεώρημα 19:</u> Ο επιμορφισμός Ord -> Card έχει δεξιά αντίστροφη.
Απόδειξη: Επειδή Ord είναι διατακτικός, κάθε μη-κενό υποσύνολο του έχει μοναδικό ελάχιστο στοιχείο. Συνεπώς μπορούμε να στείλουμε κάθε πληθικό στο ελάχιστο στοιχείο του νήματος. Η σύνθεση αυτών μας δίνει την idcard.