Σχετικά με την έννοια της συνάρτησης

Μία συνάρτηση μπορεί να νοηθεί ως ένας κωδικοποιημένος, ή «πακεταρισμένος», μετασχηματισμός. Σ΄ αυτή την ανάγνωση, ο κατασκευαστής λ κωδικοποιεί, ή πακετάρει, έναν μετασχηματισμό σε συνάρτηση· αντιστρόφως, ο μετασχηματισμός που αποκωδικοποιεί, ή ξεπακετάρει, είναι ο apply:

$$\begin{aligned} (x:\phi)\ b(x):\psi \quad &\mapsto \quad \lambda(b):\phi\supset\psi, \\ f:\phi\supset\psi \quad &\mapsto \quad (x:\phi)\ \mathsf{apply}(f,x):\psi. \end{aligned}$$

Η ουσιαστική διαφορά μεταξύ συναρτήσεων και μετασχηματισμών είναι η εξής:

- Οι μετασχηματισμοί είναι δραστικοί, δηλαδή είναι έτοιμοι να δεχθούν ορίσματα χωρίς πρόσθετες διατυπώσεις.
- Οι συναρτήσεις είναι αδρανείς: Η εφαρμογή μιας συνάρτησης σε ένα μέλος τού πεδίου ορισμού της χρειάζεται εξωτερική βοήθεια, η οποία, στην περίπτωσή μας, έρχεται στη μορφή τού μετασχηματισμού apply.

Κάτι ανάλογο συμβαίνει στη θεωρία συνόλων. Εκεί, οι συναρτήσεις, ως σύνολα (διατεταγμένων ζευγών), είναι αδρανείς. Κατά συνέπεια, για μία συνάρτηση

$$f:X\longrightarrow Y$$

η έκφραση $f(x)$ χρήζει ορισμού, π.χ.,

$$\phi(f(x)) \quad :\equiv \quad \exists(y\in Y)\ [(x,y)\in f\ \&\ \phi(y)]\,.$$

Παρατήρηση. Η διάκριση μεταξύ συναρτήσεων και μετασχηματισμών πηγαίνει πίσω στον Frege, ο οποίος καλούσε τους μετασχηματισμούς συναρτήσεις, και τους χαρακτήριζε *μη κορεσμένα αντικείμενα*, ενώ σε μία κατά Frege συνάρτηση f αντιστοιχούσε το $\grave{\epsilon}f$, το οποίο ονόμαζε course-of-values τής f. Το σύμβολο λ χρησιμοποιείται για πρώτη φορά από τον Church τη δεκαετία τού 1930.

Σχετικά με την αρχή αποκεισμού τρίτου

Μία πρόταση είναι *αποκρίσιμη* εάν είναι αληθής ή ψευδής· συμβολικά,

$$\mathrm{Decidable}(\phi) \;:\equiv\; \phi \vee \neg\phi.$$

Η αρχή τού αποκλεισμού τού τρίτου λέει ότι όλες οι προτάσεις είναι αποκρίσιμες.

Άσκηση 1. Για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ και ψ, δείξτε ότι $\phi \supset ((\phi \supset \psi) \supset \psi)$.

Πόρισμα 1. *Για οποιαδήποτε πρόταση ϕ, $\phi \supset \neg\neg\phi$.*

Απόδειξη. Στην προηγούμενη άσκηση, βάλτε όπου ψ το $\bot$. □

Μία πρόταση είναι ευσταθής (stable) εάν ισχύει το αντίστροφο:

$$\mathrm{Stable}(\phi) \;:\equiv\; \neg\neg\phi \supset \phi.$$

Άσκηση 2. Δείξτε ότι εάν μία οποιαδήποτε πρόταση ϕ είναι αποκρίσιμη, τότε είναι ευσταθής.

Άσκηση 3. Αποδείξτε τή διπλή άρνηση τής αρχής τού αποκλεισμού τού τρίτου: Για οποιαδήποτε πρόταση ϕ, $\neg\neg\mathrm{Decidable}(\phi)$.

Πόρισμα 2. *Εάν κάθε πρόταση είναι ευσταθής, τότε η αρχή τού αποκλεισμού τού τρίτου ισχύει.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση του πορίσματος έπεται ότι για οποιαδήποτε πρόταση ϕ, η πρόταση $\mathrm{Decidable}(\phi)$ είναι ευσταθής. Τώρα εφαρμόστε τήν άσκηση 3. □

Οικογένειες τύπων

Η αρχή τής αναδρομής μιας οικογένειας

$$(x : A)\ B(x)$$

παρέχει έναν τρόπο ορισμού μετασχηματισμών

$$(x : A, y : B(x))\ t(x, y) : C(x),$$

όπου η $(x : A)\ C(x)$ είναι οικογένεια ως προς τον ίδιο δείκτη.

Παρατηρήσεις.

1. Σε σχέση με τις αρχές αναδρομής των μεμονομένων τύπων, υπάρχει μία επιπλέον μεταβλητή, η x, η οποία μάς λέει σε ποιο στιγμιότυπο βρισκόμαστε κάθε φορά.

2. Ο τύπος τού y εξαρτάται από το x.

3. Ανάλογα πράγματα ισχύουν προκειμένου για οικογένειες ως προς περισσότερους δείκτες.

Μέλη και κατασκευαστές

Η αρχή τής *επαγωγής* για τον τύπο Bool έχει ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{Bool})\ C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{false}} : C(\mathsf{false})$, και
- ενός $c_{\mathsf{true}} : C(\mathsf{true})$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{false}) &:\equiv c_{\mathsf{false}}, \\ t(\mathsf{true}) &:\equiv c_{\mathsf{true}}, \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Bool})\ t(x) : C(x)$.

Λήμμα 3. $\forall (x : Bool)\ x = \mathsf{false} \vee x = \mathsf{true}$.

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο x. Θεωρούμε την οικογένεια

$$(x : Bool)\ x = \mathsf{false} \vee x = \mathsf{true},$$

και τα μέλη

$$\begin{aligned} \mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}}) &: \mathsf{false} = \mathsf{false} \vee \mathsf{false} = \mathsf{true} \\ \mathsf{in}_2(\mathsf{refl}_{\mathsf{true}}) &: \mathsf{true} = \mathsf{false} \vee \mathsf{true} = \mathsf{true}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω ορίζεται με επαγωγή ένας μετασχηματισμός

$$(x : \mathrm{Bool})\ t(x) : x = \mathsf{false} \vee x = \mathsf{true}.$$

Δεν έχουμε πλέον παρά να εφαρμόσουμε τον κανόνα εισαγωγής τής συνεπαγωγής:

$$\lambda(t) : \forall (x : \mathrm{Bool})\ x = \mathsf{false} \vee x = \mathsf{true}.$$ □

Το ίδιο *δεν* ισχύει για οικογένειες τύπων· π.χ., δε μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε μέλος τού $a = a$ είναι ίσο με το refl_a.