Θεωρία τύπων τού Martin-Löf

Σημειώσεις παραδόσεων

Νίκος Ρήγας

Έκδοση 2020-11-10

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

2 Τύποι και αναδρομή

2.1 Οι φυσικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί παράγονται από το επαγωγικό σχήμα

1. το μηδέν είναι φυσικός αριθμός, και

2. ο επόμενος καθενός φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός.

Αυτή η επαγωγική περιγραφή προσδιορίζει τον τύπο Nat των φυσικών αριθμών. Γενικά, ένας *τύπος* προσδιορίζεται από ένα επαγωγικό σχήμα αποτελούμενο από μηδέν ή περισσότερες διαδικασίες κατασκευής, καθεμιά από τις οποίες ονομάζεται *ρήτρα* (clause) του επαγωγικού σχήματος ή *κατασκευαστής* (constructor) του αντίστοιχου τύπου. Καθετί που κατασκευάζεται με τη βοήθεια των κατασκευαστών ενός τύπου ονομάζεται *μέλος* (member) αυτού του τύπου. (Κάποιοι άλλοι όροι για μέλος είναι *στοιχείο* (element), *κάτοικος* (inhabitant) και *σημείο* (point) ενός τύπου). Οι τύποι συμβολίζονται με κεφαλαία λατινικά γράμματα $A, B, C, \ldots$, και τα μέλη τους με μικρά λατινικά γράμματα $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Για να δηλώσουμε ότι το a είναι μέλος τού τύπου A γράφουμε $a : A$.

Με αυτόν τον τυποθεωρητικό συμβολισμό, η παραπάνω επαγωγική περιγραφή των φυσικών αριθμών παίρνει τη μορφή

1. $\mathsf{0} : \mathrm{Nat}$,

2. εάν $n : \mathrm{Nat}$, τότε $\mathsf{s}(n) : \mathrm{Nat}$.

Επομένως, ο τύπος Nat έχει δύο κατασκευαστές, τον $\mathsf{0}$, που δεν έχει ορίσματα, και τον s, ο οποίος έχει ένα όρισμα που είναι με τη σειρά του μέλος τού Nat (οπότε είναι αναδρομικός κατασκευαστής). Αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι τα μέλη τού Nat είναι τα

$$\mathsf{0},\ \mathsf{s}(\mathsf{0}),\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})),\ \ldots,$$

τα οποία καλούμε 0, 1, 2 και λοιπά.

Ένα μέλος ενός τύπου A ενδέχεται να εξαρτάται παραμετρικά από ένα μέλος τού τύπου A' (οπότε δεν πρόκειται, αυστηρά μιλώντας, για ένα μέλος, αλλά για μία οικογένεια μελών τού A δεδειγμένη (indexed) από τον A', ή, στην ορολογία που θα υιοθετήσουμε, για έναν *μετασχηματισμό* μελών τού A' σε μέλη τού A)· γι΄ αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$(x : A')\ t(x) : A,$$

ή και $(x : A')\ t(x)$ εάν δε συντρέχει λόγος αναφοράς στον A. (Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε τον A από τη μορφή τού $t(x)$.) Ομοίως, η έκφραση

$$(x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)\ t(x_1, \ldots, x_n) : A$$

συμβολίζει έναν μετασχηματισμό με n το πλήθος ορίσματα. (Ένας μετασχηματισμός $()\ t() : A$ με μηδέν το πλήθος ορίσματα δεν είναι παρά ένα μέλος τού A.) Επειδή στην πράξη αυτός ο συμβολισμός των μετασχηματισμών καταντάει δύσχρηστος, θα εκμεταλλευόμαστε κάθε ευκαιρία που μας δίνεται για να γράφουμε απλώς t στη θέση τού $(x : A)\ t(x)$, και το ίδιο για άλλες περιπτώσεις μετασχηματισμών, έχοντας πάντοτε κατά νου ότι πρόκειται για κατάχρηση.

Τα ορίσματα ενός μετασχηματισμού μπορεί να είναι τα ίδια μετασχηματισμοί· αυτό αποτυπώνεται σε εκφράσεις όπως

$$(x : A, (y : B)\ z(y) : C)\ d(x, z) : D,$$

όπου ο σημαινόμενος μετασχηματισμός έχει δύο ορίσματα, εκ των οποίων το ένα είναι μέλος τού A και το άλλο είναι μετασχηματισμός μελών τού B σε μέλη τού C.

2.2 Αναδρομή στούς φυσικούς αριθμούς

Οι κύριες χρησιμότητες της επαγωγικής περιγραφής ενός τύπου είναι η διατύπωση ορισμών με αναδρομή και αποδείξεων με επαγωγή. Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση της αναδρομής· για την επαγωγή θα είμαστε σε θέση να μιλήσουμε μόλις εμπλουτίσουμε τη γλώσσα με οικογένειες τύπων.

Έστω C τυχών τύπος. Δοθέντων ενός $c_0 : C$ και ενός $(x : \mathrm{Nat}, y : C)\ c_{\mathsf{s}}(x, y) : C$ μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat})\ t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv c_{\mathsf{s}}(n, t(n)). \end{aligned}$$

Λέμε ότι ο t ορίζεται με *αναδρομή* (recursion) από τα c_0 και c_{s}· η δυνατότητα διατύπωσης τέτοιων ορισμών είναι η *αρχή τής αναδρομής για τον* Nat.

Ως πρώτο παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής αναδρομής, ας ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat})\ \mathsf{pred}(x) : \mathrm{Nat}$ που στέλνει το μηδέν στο μηδέν και καθέναν άλλο φυσικό αριθμό στον προηγούμενό του: Στην περίπτωση αυτή, ο τύπος C είναι ο Nat (ο μόνος τύπος που έχουμε αυτή τη στιγμή), και οι ορίζουσες σχέσεις έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathsf{pred}(0) &:\equiv 0, \\ \mathsf{pred}(\mathsf{s}(n)) &:\equiv n. \end{aligned}$$

Πρόκειται δηλαδή για το στιγμιότυπο του γενικού σχήματος τής αναδρομής όπου το c_0 είναι το 0 και το $c_{\mathsf{s}}(x, y)$ είναι το x.

Μπορούμε επίσης να ορίζουμε μετασχηματισμούς που έχουν περισσότερα από ένα ορίσματα, κάνοντας αναδρομή σε ένα από αυτά. Τέτοια περίπτωση είναι η πρόσθεση φυσικών αριθμών, την οποία θα ορίσουμε με αναδρομή στον δεξιό προσθετέο, αφήνοντας τον αριστερό να υπάρχει ως παράμετρος:

$$\begin{aligned} m + 0 &:\equiv m, \\ m + \mathsf{s}(n) &:\equiv \mathsf{s}(m + n). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι το $m + n$ ορίζεται με αναδρομή από τα m και $(x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(y)$.

Ενίοτε δε θέλουμε να δώσουμε όνομα στον μετασχηματισμό που ορίζεται με αναδρομή· αυτό συμβαίνει π.χ. εάν θέλουμε να τον αποτιμήσουμε αμέσως ή όταν εμφανίζεται ως όρισμα κάποιου άλλου μετασχηματισμού. Επίσης, για τη μεταμαθηματική μελέτη τής θεωρίας τύπων είναι απαραίτητο να μπορούμε να διατυπώσουμε την αρχή τής αναδρομής με τρόπο που να μην προϋποθέτει την προσθήκη στη γλώσσα ενός συμβόλου για κάθε ορίσιμο μετασχηματισμό. Αυτό το επιτυγχάνουμε υποκαθιστώντας τήν αρχή τής αναδρομής με το ένα και μοναδικό στιγμιότυπό της στο οποίο τα ίδια τα c_0 και c_s έχουν περάσει μέσα στον συμβολισμό ως ορίσματα. Ορίζουμε λοιπόν τον *αναδρομέα (recursor)*

$$(z : C, (x : \mathrm{Nat}, y : C)\ w(x, y) : C, n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, n) : C$$

τού Nat μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, 0) &:\equiv z, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, \mathsf{s}(n)) &:\equiv w(n, \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, n)). \end{aligned}$$

Ο κύριος ρόλος τού αναδρομέα είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφραστεί κάθε αναδρομικός ορισμός. Ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού, λόγου χάριν, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\mathsf{pred}(n) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(0, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ x, n),$$

ενώ το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών,

$$m + n :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(m, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(y), n).$$

Άσκηση 2.1. Έχοντας την πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} m \cdot 0 &:\equiv 0, \\ m \cdot \mathsf{s}(n) &:\equiv m \cdot n + m. \end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \cdot n$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού Nat. Προαιρετικά, συνεχίστε με τα m^n και $n!$.

2.3 Άλλα παραδείγματα τύπων

Λίστες

Οι λίστες μελών ενός τύπου A συγκροτούν έναν τύπο $\mathrm{List}(A)$, ο οποίος περιγράφεται από το επαγωγικό σχήμα

1. $\mathsf{nil}_A : \mathrm{List}(A)$, και
2. εάν $l : \mathrm{List}(A)$ και $a : A$, τότε $\mathsf{cons}_A(l, a) : \mathrm{List}(A)$,

όπου nil_A είναι η κενή λίστα και $\mathsf{cons}_A(l, a)$ είναι η προέκταση της l με την προσθήκη τού a. Στην πράξη, τα subscripts θα παραλείπονται όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με το ποιος είναι ο A.

Ο $\mathrm{List}(A)$ είναι παράδειγμα τύπου που εξαρτάται παραμετρικά από έναν προϋπάρχοντα τύπο. Όπως και στην περίπτωση του Nat, τα μέλη του παράγονται από μία διαδικασία προέκτασης· θα δούμε αργότερα ότι ο Nat είναι ειδική περίπτωση (spoiler: Πάρτε για A τον τύπο με ένα μέλος).

Η αρχή τής αναδρομής για τον $\mathrm{List}(A)$ έχει ως εξής: Εάν C είναι ένας οποιοσδήποτε τύπος, και μας έχουν δοθεί ένα $c_{\mathsf{nil}} : C$ και ένας μετασχηματισμός $(x : \mathrm{List}(A), y : A, z : C)\ c_{\mathsf{cons}}(x, y, z) : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{nil}) &:\equiv c_{\mathsf{nil}}, \\ t(\mathsf{cons}(l, a)) &:\equiv c_{\mathsf{cons}}(l, a, t(l)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{List}(A))\ t(x) : C$. Για παράδειγμα, το μήκος $\mathsf{len}(l)$ μιας λίστας l ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &:\equiv 0, \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(l, a)) &:\equiv \mathsf{s}(\mathsf{len}(l)), \end{aligned}$$

ενώ η συνένωση $k + l$ δύο λιστών k, l,

$$\begin{aligned} k + \mathsf{nil} &:\equiv k, \\ k + \mathsf{cons}(l, a) &:\equiv \mathsf{cons}(k + l, a). \end{aligned}$$

Όπως κάναμε και με τους φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να «πακετάρουμε» την αρχή τής αναδρομής τού $\mathrm{List}(A)$ σε έναν αναδρομέα

$$(v : C, (x : \mathrm{List}(A), y : A, z : C)\ w(x, y, z) : C, l : \mathrm{List}(A))\ \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, l) : C$$

οριζόμενο από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, \mathsf{nil}) &:\equiv v, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, \mathsf{cons}(l, a)) &:\equiv w(l, a, \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, l)), \end{aligned}$$

οπότε το μήκος μιας λίστας μπορεί εναλλακτικά να οριστεί ως

$$\mathsf{len}(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(0, (x : \mathrm{List}(A), y : A, z : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(z), l),$$

και η συνένωση δύο λιστών,

$$k + l :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(k, (x : \mathrm{List}(A), y : A, z : \mathrm{List}(A))\ \mathsf{cons}(z, y), l).$$

Άσκηση 2.2. Η συνένωση $\mathsf{cat}(L) : \mathrm{List}(A)$ μιας λίστας $L : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$ λιστών μελών ενός τύπου A έχει τον αναδρομικό ορισμό

$$\begin{aligned} \mathsf{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)}) &:\equiv \mathsf{nil}_A, \\ \mathsf{cat}(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(L, l)) &:\equiv \mathsf{cat}(L) + l. \end{aligned}$$

Γράψτε τό $\mathsf{cat}(L)$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού $\mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$.

Δέντρα

Ο τύπος BTree των δυαδικών δέντρων συλλαμβάνεται από το επαγωγικό σχήμα

1. $\mathsf{triv} : \mathrm{BTree}$,
2. εάν $r : \mathrm{BTree}$ και $s : \mathrm{BTree}$, τότε $\mathsf{join}(r, s) : \mathrm{BTree}$.

Στον BTree αντιστοιχεί η εξής αρχή αναδρομής: Δοθέντων ενός $c_{\mathsf{triv}} : C$ και ενός $(x : \mathrm{BTree}, y : \mathrm{BTree}, z : C, w : C)\, c_{\mathsf{join}}(x, y, z, w) : C$, όπου C είναι τυχών τύπος, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{BTree})\ t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}) &:\equiv c_{\mathsf{triv}}, \\ t(\mathsf{join}(r, s)) &:\equiv c_{\mathsf{join}}(r, s, t(r), t(s)). \end{aligned}$$

Άσκηση 2.3. Περιγράψτε τή μορφή τού $\mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}$ και διατυπώστε τις ορίζουσες σχέσεις του.

Τα δυαδικά δέντρα είναι ειδική περίπτωση δέντρων δεδομένης διακλάδωσης. Ο τύπος $\mathrm{Tree}(A)$ των δέντρων με τύπο διακλάδωσης A ορίζεται από το επαγωγικό σχήμα

1. $\mathsf{triv}_A : \mathrm{Tree}(A)$,

2. εάν $(x:A)\ b(x) : \mathrm{Tree}(A)$, τότε $\mathsf{join}_A(x:A)\ b(x) : \mathrm{Tree}(A)$.

Σχηματικά, αυτό που λέει η δεύτερη ρήτρα είναι ότι εάν έχουμε ένα δέντρο $b(x)$ για κάθε $x : A$, μπορούμε να ενώσουμε αυτά τα δέντρα με μία καινούργια ρίζα και να φτιάξουμε ένα μεγάλο δέντρο $\mathsf{join}_A(x:A)\ b(x)$, το οποίο περιέχει όλα τα $b(x)$ ως άμεσα υποδέντρα. Για να επεκτείνουμε τον ορισμό ενός μετασχηματισμού t στο $\mathsf{join}_A(x:A)\ b(x)$, έχοντας ήδη διαθέσιμα τα $t(b(x))$ για $x : A$, χρειαζόμαστε έναν μετασχηματισμό

$$((x:A)\ y(x) : \mathrm{Tree}(A), (x:A)\ z(x) : C)\ c_{\mathsf{join}}(y,z) : C$$

οπότε, μαζί με ένα $c_{\mathsf{triv}} : C$ μπορούμε να ορίσουμε τον t θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}_A) &:\equiv c_{\mathsf{triv}}, \\ t(\mathsf{join}_A(x:A)\ b(x)) &:\equiv c_{\mathsf{join}}((x:A)\ b(x), (x:A)\ t(b(x))). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο τύπος A εμφανίζεται αρνητικά στον κατασκευαστή join_A, οπότε αναμένεται ότι το $\mathrm{Tree}(A)$ συναρτάται ανταλλοίωτα με το A. Πράγματι, ένας μετασχηματισμός

$$(x:B)\ u(x) : A$$

επάγει έναν μετασχηματισμό

$$(x:\mathrm{Tree}(A))\ \mathrm{Tree}(u)(x) : \mathrm{Tree}(B)$$

με ορισμό

$$\begin{aligned} \mathrm{Tree}(u)(\mathsf{triv}_A) &:\equiv \mathsf{triv}_B, \\ \mathrm{Tree}(u)(\mathsf{join}_A(x:A)\ b(x)) &:\equiv \mathsf{join}_B(y:B)\ \mathrm{Tree}(u)(b(u(y))). \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4. Περιγράψτε τόν αναδρομέα τού $\mathrm{Tree}(A)$, και εκφράστε τόν $\mathrm{Tree}(u)$ με τη βοήθειά του.

Άσκηση 2.5. Στον ορισμό τού $\mathrm{List}(A)$, ο τύπος A εμφανίζεται θετικά. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x:A)\ u(x) : B$, ορίστε, χρησιμοποιώντας τήν αρχή τής αναδρομής ή τον αναδρομέα τού $\mathrm{List}(A)$, τον μετασχηματισμό $(x:\mathrm{List}(A))\ \mathrm{List}(u)(x) : \mathrm{List}(B)$ ο οποίος απεικονίζει μία λίστα μελών τού A στη λίστα των εικόνων τους μέσω τού u.

Αληθοτιμές

Ο Bool είναι ο τύπος που έχει ακριβώς δύο μέλη false και true· επομένως, περιγράφεται από το επαγωγικό σχήμα

1. $\mathsf{false} : \mathrm{Bool}$,

2. $\mathsf{true} : \mathrm{Bool}$.

Η αρχή τής αναδρομής για τον Bool εκφράζει το γεγονός ότι προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό μελών τού Bool σε μέλη ενός τύπου C δεν έχουμε παρά να πούμε τι κάνει με το false και τι με το true· συγκεκριμένα, δοθέντων ενός $c_{\mathsf{false}} : C$ και ενός $c_{\mathsf{true}} : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{false}) &:\equiv c_{\mathsf{false}}, \\ t(\mathsf{true}) &:\equiv c_{\mathsf{true}} \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Bool})\, t(x) : C$. Όπως πάντα, έχουμε έναν αναδρομέα

$$(x : C, y : C, z : \mathrm{Bool})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{false}) &:\equiv x, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{true}) &:\equiv y. \end{aligned}$$

Μία πιο ευανάγνωστη γραφή τού $\mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, z)$ θα ήταν '$\mathsf{if}\ z\ \mathsf{then}\ y\ \mathsf{else}\ x$'.

Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε τον αληθοπίνακα της διάζευξης μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \mathsf{or}(b, \mathsf{false}) &:\equiv b, \\ \mathsf{or}(b, \mathsf{true}) &:\equiv \mathsf{true}, \end{aligned}$$

ή, εναλλακτικά, με τη βοήθεια του αναδρομέα τού Bool,

$$\mathsf{or}(b, c) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(b, \mathsf{true}, c).$$

Άσκηση 2.6. Ορίστε τούς αληθοπίνακες της σύζευξης και της συνεπαγωγής.

Η αρχή τής αναδρομής μάς παρέχει έναν τρόπο ορισμού μετασχηματισμών *από* τον Bool. Μια και στο επόμενο κεφάλαιο θα μιλήσουμε για λογική, ταιριάζει να κλείσουμε το κεφάλαιο της αναδρομής με κάποια παραδείγματα μετασχηματισμών *προς* τον Bool, δηλαδή αληθοσυναρτήσεων (αληθομετασχηματισμών, μάλλον, στην ορολογία μας). Με την ευκαιρία, θα πούμε δυο λόγια για πολλαπλή αναδρομή.

2.4 Πολλαπλή αναδρομή

Μέχρι τώρα είδαμε ποικίλα παραδείγματα ορισμού μετασχηματισμών, οι οποίοι είχαν περισσότερα από ένα ορίσματα, με αναδρομή σε ένα από αυτά. Υπάρχουν όμως καταστάσεις όπου χρειάζεται να κάνουμε αναδρομή σε δύο ή περισσότερα ορίσματα ταυτόχρονα. Αυτή η ανάγκη παρουσιάζεται, λόγου χάριν, στον ακόλουθο «ορισμό» τής αληθοσυνάρτησης $(x, y : \mathrm{Nat})\, \mathsf{isequal}(x, y) : \mathrm{Bool}$ της ισότητας φυσικών αριθμών:

$$\begin{aligned} &\mathsf{isequal}(0, 0) &&:\equiv \mathsf{true}, \\ &\mathsf{isequal}(0, \mathsf{s}(n)) &&:\equiv \mathsf{false}, \\ &\mathsf{isequal}(\mathsf{s}(m), 0) &&:\equiv \mathsf{false}, \\ &\mathsf{isequal}(\mathsf{s}(m), \mathsf{s}(n)) &&:\equiv \mathsf{isequal}(m, n). \end{aligned}$$

Η ιδέα εδώ είναι να αποπλέξουμε τη διπλή αναδρομή σε δύο επάλληλες (ή διαδοχικές) αναδρομές. Για να το πετύχουμε αυτό, γράφουμε το $\mathsf{isequal}(m, n)$ ως $\mathsf{isequal}_m(n)$. Με αυτόν τον συμβολισμό, οι δύο πρώτες σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{isequal}_0(0) &:\equiv \mathsf{true}, \\ \mathsf{isequal}_0(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{false} \end{aligned}$$

αποτελούν αναδρομικό ορισμό τού $\mathsf{isequal}_0$. Ομοίως, εάν έχουμε ορίσει τον $\mathsf{isequal}_m$, οι δύο άλλες σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{isequal}_{\mathsf{s}(m)}(0) &:\equiv \mathsf{false}, \\ \mathsf{isequal}_{\mathsf{s}(m)}(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{isequal}_m(n) \end{aligned}$$

ορίζουν τον $\mathsf{isequal}_{\mathsf{s}(m)}$. Δεν έχουμε τώρα παρά να βάλουμε αυτά τα δύο μαζί σε έναν αναδρομικό ορισμό τού $\mathsf{isequal}_m$, ή, εναλλακτικά, να επιστρατεύσουμε τον αναδρομέα των φυσικών αριθμών:

$$\mathsf{isequal}_m :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(c_0, (x, y)\ c_{\mathsf{s}}(x, y), m),$$

όπου

$$\begin{aligned} c_0 &:\equiv (n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(\mathsf{true}, (z : \mathrm{Nat}, w : \mathrm{Bool})\ \mathsf{false}, n), \\ c_{\mathsf{s}}(x, y) &:\equiv (n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(\mathsf{false}, (z : \mathrm{Nat}, w : \mathrm{Bool})\ y(z), n). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι εδώ χρησιμοποιούμε μία διαφορετική μορφή τού αναδρομέα από αυτή που έχουμε παρουσιάσει, καθώς τόσο το δεύτερο όρισμα του c_{s} όσο και το ίδιο το $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(c_0, (x, y)\ c_{\mathsf{s}}(x, y), m)$ είναι μετασχηματισμοί. Θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε τον rec κατάλληλα ώστε να συμπεριλάβουμε αυτή την περίπτωση· επειδή όμως σύντομα θα εισαγάγουμε τύπους συναρτήσεων, παρουσία τών οποίων αυτός ο γενικότερος αναδρομέας ορίζεται από τον ειδικότερο, δεν θα χρειαστεί να το κάνουμε. Από τη συζήτηση αυτή ας κρατήσουμε μόνο ότι μπορούμε, με τον ένα τρόπο ή με τον άλλο, να δίνουμε ορισμούς με πολλαπλή αναδρομή.

Άσκηση 2.7. Τροποποιώντας τόν ορισμό τού $\mathsf{isequal}$ ορίστε, με πολλαπλή αναδρομή, έναν μετασχηματισμό $(m, n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{isless}(m, n) : \mathrm{Bool}$ ο οποίος παίρνει τις τιμές true και false ανάλογα με το εάν ο m είναι ή δεν είναι μικρότερος του n.

2.5 Ασκήσεις

Άσκηση 2.8. Η πράξη (almost minus) $m \dot{-} n$ ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} m \dot{-} 0 &:\equiv m, \\ m \dot{-} \mathsf{s}(n) &:\equiv \mathsf{pred}(m \dot{-} n). \end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \dot{-} n$ χρησιμοποιώντας τόν $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}$.

Άσκηση 2.9. Η αντιστροφή λίστας ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{inv}(\mathsf{nil}) &:\equiv \mathsf{nil}, \\ \mathsf{inv}(\mathsf{cons}(l, a)) &:\equiv \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, a) + \mathsf{inv}(l). \end{aligned}$$

Γράψτε τό $\mathsf{inv}(l)$ με τη βοήθεια του $\mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}$.

Άσκηση 2.10 (insertion sort). Ο μετασχηματισμός $(a : A, l : \mathrm{List}(A))\,\mathsf{insert}(a, l) : \mathrm{List}(A)$ τής ένθεσης ενός μέλους σε μία (ταξινομημένη) λίστα ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned}
&\mathsf{insert}(a', \mathsf{nil}) &&:\equiv \mathsf{cons}(\mathsf{nil}, a'),\\
&\mathsf{insert}(a', \mathsf{cons}(l, a)) &&:\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(\mathsf{cons}(\mathsf{cons}(l, a), a'), \mathsf{cons}(\mathsf{insert}(a', l), a), \mathsf{isless}(a', a)).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήστε αυτόν τον μετασχηματισμό για να περιγράψετε τον αλγόριθμο ταξινόμησης insertion sort. (Πρόκειται για τον αλγόριθμο ο οποίος, προκειμένου να ταξινομήσει μία λίστα $\mathsf{cons}(l, a)$, ταξινομεί πρώτα την l και μετά κάνει insert το a.)

3 Οικογένειες τύπων και επαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε κάποιες αρχές αναδρομής, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να εκφράσουμε μετασχηματισμούς μεταξύ των διαφόρων τύπων. Αυτό που φτιάξαμε, εν ολίγοις, είναι μία απλή συναρτησιακή γλώσσα. Ενδιαφερόμαστε όμως επίσης για τις ιδιότητες αυτών των μετασχηματισμών. Σε αυτό το κεφάλαιο, και πολύ περισσότερο στο επόμενο, θα δούμε πώς μπορούμε, στο πλαίσιο της θεωρίας τύπων, να διατυπώνουμε και να αποδεικνύουμε προτάσεις.

Σε αντίθεση με άλλες μαθηματικές θεωρίες και θεμελιώσεις των μαθηματικών όπως η θεωρία συνόλων, στη θεωρία τύπων οι μαθηματικές προτάσεις, καθώς και οι αποδείξεις τους, είναι μαθηματικά αντικείμενα πρώτης κατηγορίας. Συγκεκριμένα, οι μαθηματικές προτάσεις αναπαρίστανται από τύπους, που μπορούν να θεωρηθούν ταυτόχρονα μαθηματικές δομές και μαθηματικοί ισχυρισμοί, μία σύλληψη γνωστή ως propositions as types. Υπό αυτή τη σκοπιά, τα μέλη ενός τύπου νοούνται ως *τεκμήρια* ή *μάρτυρες* αλήθειας τής αντίστοιχης πρότασης. (Μερικές φορές λέγονται επίσης αποδείξεις, αλλά αυτή η ορολογία μπορεί να είναι παραπλανητική, επομένως γενικά την αποφεύγουμε.) Μία άμεση μεθοδολογική συνέπεια είναι ότι προκειμένου να δείξουμε ότι μία πρόταση αληθεύει δεν έχουμε παρά να εμφανίσουμε ένα μέλος τού τύπου που αντιστοιχεί σε αυτή την πρόταση.

Ωστόσο, αυτή η οπτική σχετικά με τις αποδείξεις διαφέρει ουσιωδώς από τη συνήθη. Ο τρόπος με τον οποίο η λογική γίνεται αντιληπτή από τη θεωρία τύπων είναι ότι μια πρόταση δεν είναι απλώς αληθής ή ψευδής, αλλά μάλλον μπορεί να νοηθεί ως η συλλογή όλων των δυνατών τεκμηρίων αλήθειας της. Σύμφωνα με αυτήν τη σύλληψη, οι αποδείξεις δεν είναι μόνο το μέσο επικοινωνίας των μαθηματικών, αλλά αποτελούν και οι ίδιες αντικείμενο μελέτης ισότιμο με πιο οικεία αντικείμενα όπως οι αριθμοί και οι συναρτήσεις.

3.1 Οικογένειες τύπων

Θα μιλήσουμε τώρα για το ένα από τα δύο δομικά στοιχεία των προτάσεων, τα κατηγορήματα· το άλλο, οι λογικές σταθερές, είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

Μία *οικογένεια τύπων (type family)* είναι ένας μετασχηματισμός μελών κάποιων τύπων σε τύπους. Σε μία οικογένεια $(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)\ A(x_1, \dots, x_n)$, οι $A_1, \dots, A_n$ λέγονται τύποι δεικτών (indexing types), και οι επιμέρους τύποι $A(x_1, \dots, x_n)$ λέγονται στιγμιότυπα (instances) της οικογένειας.

Οι οικογένειες τύπων, που επίσης λέγονται εξαρτώμενοι τύποι (dependent types), ήσαν μία από τις σημαντικότερες καινοτομίες τής θεωρίας τύπων τού Martin-Löf. Τυπικά παραδείγματα οικογενειών τύπων αποτελούν τα διάφορα κατηγορήματα

$(x, y : A)\ x = y$, $(x : \mathrm{Nat})\ \mathrm{Prime}(x)$ κ.λπ. που συναντάμε στα μαθηματικά. Ένα στοιχειώδες, αλλά σημαντικό, παράδειγμα οικογένειας είναι η σταθερή οικογένεια $(x : A)\ B$ όπου A και B είναι τύποι. Και βέβαια, μία οικογένεια $()\ A()$ με μηδέν το πλήθος ορίσματα δεν είναι παρά ένας τύπος.

3.2 Ισότητα

Ο απλούστερος τρόπος να ορίσουμε μία οικογένεια είναι προδιαγράφοντας κατασκευαστές στα διάφορα στιγμιότυπά της, όπως κάναμε και για μεμονωμένους τύπους. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον τρόπο για να ορίσουμε την πλέον κοινή και πλέον σημαντική σχέση στα μαθηματικά, την ισότητα.

Έστω $a : A$, όπου A τύπος. Η *ισότητα προς a* είναι η οικογένεια

$$(x : A)\ a =_A x$$

που ορίζεται από τη μοναδική ρήτρα

$$\mathsf{refl}_a : a =_A a.$$

Ως συνήθως, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα παραλείπουμε το subscript και θα γράφουμε απλούστερα $a = b$.

Η ισότητα προς a λέγεται επίσης *βασισμένη (based)* ισότητα, διότι το ένα σκέλος (το αριστερό στον συμβολισμό μας) κρατιέται σταθερό, σε αντιδιαστολή με την (απλώς) ισότητα που θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, η οποία είναι οικογένεια ως προς αμφότερα τα σκέλη. Οι δύο διαφέρουν όσον αφορά τη μορφή τού αναδρομέα, αλλά είναι ισοδύναμες· για τον λόγο αυτόν, όταν δεν συντρέχει λόγος διάκρισης θα λέμε απλώς ισότητα.

Σχετικά με την αρχή τής αναδρομής, παρατηρήστε ότι η ισότητα προς a είναι οικογένεια, οπότε αυτό που θα ορίσουμε είναι μετασχηματισμοί προς οικογένειες ως προς τον ίδιο τύπο δεικτών, και επίσης ότι έχουμε μόνο έναν κατασκευαστή, οπότε αρκεί να πούμε τι κάνει ένας τέτοιος μετασχηματισμός με αυτόν. Αναλυτικότερα, ας θεωρήσουμε ότι μας έχουν δοθεί

1. μία οικογένεια $(x : A)\ C(x)$ τύπων, και
2. ένα μέλος c_{refl_a} τού $C(a)$.

Τότε, η σχέση

$$t(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv c_{\mathsf{refl}_a}$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : A, y : a = x)\ t(x, y) : C(x)$.

Παρατηρήστε ότι, σε σχέση με την περίπτωση των μεμονομένων τύπων, εδώ έχουμε ένα παραπάνω όρισμα, το οποίο χρησιμεύει στο να προσδιορίσει σε ποιο στιγμιότυπο βρισκόμαστε κάθε φορά. Ένας άλλος τρόπος να περιγραφεί αυτό είναι λέγοντας ότι αυτό που ορίζεται με αναδρομή στην ισότητα προς a είναι μία δέσμη

$$\begin{gathered}(y : a = b)\ t(b, y) : C(b),\\ (y : a = b')\ t(b', y) : C(b'),\\ (y : a = b'')\ t(b'', y) : C(b''),\\ \vdots\end{gathered}$$

αποτελούμενη από έναν μετασχηματισμό για κάθε μέλος τού τύπου δεικτών A.

Ο αναδρομέας τής ισότητας προς a είναι ο μετασχηματισμός

$$(x : A, c : C(a), p : a = x)\ \mathsf{rec}_{a=x}(c, p) : C(x) \tag{1}$$

που ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{rec}_{a=a}(c, \mathsf{refl}_a)\ :\equiv c.$$

Ένας άλλος τρόπος γραφής τού (1) είναι υπό μορφήν κανόνα:

$$\frac{x : A \qquad c : C(a) \qquad p : a = x}{\mathsf{rec}_{a=x}(c, p) : C(x)}\ . \tag{2}$$

Αυτή η έκφραση ονομάζεται *κανόνας σχηματισμού* τού αναδρομέα τής ισότητας, διότι περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αυτός συντάσσεται, δηλαδή τη μορφή των ορισμάτων του και τον τύπο (ή τύπους στην προκειμένη περίπτωση) των τιμών του. Ανάλογοι κανόνες σχηματισμού μπορούν να γραφτούν για τους άλλους μετασχηματισμούς.

Άσκηση 3.1. Γράψτε τούς κανόνες σχηματισμού των κατασκευαστών τού $\mathrm{List}(A)$.

Εάν στον (2) βάλουμε, για λόγους συμμετρίας, στη θέση τού x ένα μέλος a' τού A και κρατήσουμε μόνο τους τύπους, παίρνουμε τον λογικό κανόνα

$$\frac{C(a) \qquad a = a'}{C(a')}\ , \tag{3}$$

γνωστό και ως *indiscernibility of identicals*, ο οποίος εκφράζει το γεγονός ότι τα ίσα μοιράζονται τις ίδιες ιδιότητες.

Ένα άμεσο πόρισμα του κανόνα (3) είναι ότι η ισότητα διατηρείται από μετασχηματισμούς· προκειμένου για έναν μετασχηματισμό $(x : A)\ u(x) : B$, το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $C(x) :\equiv u(a) = u(x)$. Η πλήρης τυποθεωρητική διατύπωση του γεγονότος αυτού είναι η εξής:

Λήμμα 1. *Έστω $(x : A)\, u(x) : B$ μετασχηματισμός. Για οποιαδήποτε $a, a' : A$ και $p : a =_A a'$ υπάρχει ένα*

$$\mathsf{ap}_u(p) : u(a) =_B u(a')$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\mathsf{ap}_u(\mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_{u(a)}$.

Απόδειξη. Εδώ, όπως και στην πλειονότητα των αποδείξεων στη θεωρία τύπων, η εκφώνηση υποδεικνύει τον τρόπο δράσης. Συγκεκριμένα, η σχέση $\mathsf{ap}_u(\mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_{u(a)}$ μάς καθοδηγεί να ορίσουμε το $\mathsf{ap}_u(p)$ με αναδρομή στο p. Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια $(x : A)\ u(a) =_B u(x)$ και το μέλος $\mathsf{refl}_{u(a)}$ τού $u(a) =_B u(a)$, και ορίζουμε τον μετασχηματισμό $(x : A, y : a =_A x)\ t(x, y) : u(a) =_B u(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a, \mathsf{refl}_a)\ :\equiv \mathsf{refl}_{u(a)}.$$

Δεν έχουμε πλέον παρά να θέσουμε $\mathsf{ap}_u(p)\ :\equiv t(a', p)$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε απ΄ ευθείας τον ap_u επικαλούμενοι τον αναδρομένα τής ισότητας:

$$\mathsf{ap}_u(p)\ :\equiv \mathsf{rec}_{a=a'}(\mathsf{refl}_{u(a)}, p). \qquad \square$$

Όπως αναμένεται, η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. Το ακόλουθο λήμμα αποτελεί την τυποθεωρητική εκδοχή τής συμμετρίας.

Λήμμα 2. *Για οποιαδήποτε* $a, a' : A$ *υπάρχει ένας μετασχηματισμός*

$$(p : a = a')\ p^{-1} : a' = a$$

ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\mathsf{refl}_a{}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_a$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $(x : A)\ C(x)$, όπου $C(x) \ :\equiv\ x = a$, και ορίζουμε τον μετασχηματισμό $(x : A)\ t(x) : C(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a, \mathsf{refl}_a) \ :\equiv \mathsf{refl}_a.$$

Τέλος, θέτουμε $p^{-1} \ :\equiv\ t(a', p)$. Το δεύτερο ζητούμενο είναι άμεσο:

$$\mathsf{refl}_a{}^{-1} \equiv t(a, \mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_a. \qquad \square$$

Με τη βοήθεια του αναδρομέα τής ισότητας, το p^{-1} γράφεται

$$p^{-1} \ :\equiv \mathsf{rec}_{a=a'}(\mathsf{refl}_a, p).$$

Παρατηρήστε ότι η ομοιότητα του p^{-1} με το $\mathsf{ap}_{(x\,:\,A)\ x}(p)$ είναι μόνο φαινομενική: Στη μία περίπτωση η οικογένεια ως προς την οποία κάνουμε αναδρομή είναι η $(x : A) a = x$, ενώ στην άλλη η $(x : A) x = a$. Το δίδαγμα είναι ότι είναι σημαντικό, όταν δίνουμε έναν ορισμό με αναδρομή ή επικαλούμαστε τον αναδρομέα τής ισότητας, να αναφέρουμε την οικογένεια στην οποία ο οριζόμενος μετασχηματισμός παίρνει τιμές.

Για τη μεταβατικότητα έχουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 3. *Για οποιαδήποτε* $a, a', a'' : A$ *υπάρχει ένας μετασχηματισμός*

$$(p : a = a', q : a' = a'')\ p \cdot q : a = a''$$

ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\mathsf{refl}_a \cdot \mathsf{refl}_a \equiv \mathsf{refl}_a$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $(x : A)\ a = x$, και ορίζουμε τον μετασχηματισμό $(x : A)\ t(x) : a = x$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a', \mathsf{refl}_{a'}) \ :\equiv\ p.$$

Τέλος, θέτουμε $p \cdot q \ :\equiv\ t(a'', q)$. Στην περίπτωση που $a \equiv a' \equiv a''$, έχουμε

$$\mathsf{refl}_a \cdot \mathsf{refl}_a \equiv t(a, \mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_a. \qquad \square$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε το $p \cdot q$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τής ισότητας:

$$p \cdot q \ :\equiv \mathsf{rec}_{a'=a''}(p, q).$$

Για λόγους ομοιομορφίας, διατυπώνουμε και το τετριμμένο λήμμα που διευθετεί την ανακλαστικότητα:

Λήμμα 4. *Για οποιοδήποτε* $a : A$ *υπάρχει ένα*

$$1 : a = a$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $1 \equiv \mathsf{refl}_a$. $\square$

3.3 Επαγωγή

Η προσθήκη οικογενειών τύπων στη θεωρία μάς δίνει τη δυνατότητα να ισχυροποιήσουμε τις αρχές αναδρομής τών διαφόρων τύπων. Θα πάρουμε ως παράδειγμα τους φυσικούς αριθμούς: Η έννοια ενός αναδρομικού ορισμού

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv f_n(t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c : C$ και $(n : \mathrm{Nat}, x : C)\ f_n(x) : C$, είναι ότι ο t μπορεί να υπολογιστεί σε βήματα:

$$\begin{aligned} t(0) &\equiv c, \\ t(1) &\equiv f_0(t(0)), \\ t(2) &\equiv f_1(t(1)), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής. Σχηματικά, οι τιμές τού t λαμβάνονται «κυνηγώντας» τό c κατά μήκος τού διαγράμματος

$$C \xrightarrow{f_0} C \xrightarrow{f_1} C \xrightarrow{f_2} \cdots.$$

Η ίδια, όμως, διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται και στο γενικότερο διάγραμμα

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \cdots,$$

όπου, αντί για έναν τύπο C, έχουμε μία οικογένεια τύπων $(n : \mathrm{Nat})\ C_n$. Οδηγούμαστε έτσι στην *αρχή τής επαγωγής* τού Nat: Δοθέντων

- μιας οικογένειας τύπων $(x : \mathrm{Nat})\ C(x)$,
- ενός $c_0 : C(0)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : \mathrm{Nat}, y : C(x))\ c_{\mathsf{s}}(x, y) : C(\mathsf{s}(x))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv c_{\mathsf{s}}(n, t(n)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathrm{Nat})\ t(x) : C(x).$$

Με ανάλογο τρόπο γενικεύονται οι αρχές αναδρομής των άλλων τύπων. Η αρχή τής επαγωγής για τον BTree, π.χ., διαμορφώνεται ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{BTree})\ C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{triv}} : C(\mathsf{triv})$, και
- ενός μετασχηματισμού

$$(x : \mathrm{BTree}, y : \mathrm{BTree}, z : C(x), w : C(y))\ c_{\mathsf{join}}(x, y, z, w) : C(\mathsf{join}(x, y)),$$

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}) &:\equiv c_{\mathsf{triv}}, \\ t(\mathsf{join}(r, s)) &:\equiv c_{\mathsf{join}}(r, s, t(r), t(s)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{BTree})\ t(x) : C(x)$.

Άσκηση 3.2. Διατυπώστε τις αρχές επαγωγής των $\mathrm{List}(A)$ και Bool.

Λύση. Διατυπώνουμε την αρχή επαγωγής για τον $\mathrm{List}(A)$: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{List}(A))\ C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{nil}} : C(\mathsf{nil})$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : \mathrm{List}(A), y : A, z : C(x))\ c_{\mathsf{cons}}(x, y, z) : C(\mathsf{cons}(x, y))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{nil}) &:\equiv c_{\mathsf{nil}}, \\ t(\mathsf{cons}(l, a)) &:\equiv c_{\mathsf{cons}}(l, a, t(l)), \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{List}(A))\ t(x) : C(x)$. □

Η αρχή τής επαγωγής τού Nat οφείλει την ονομασία της στο ότι εμπεριέχει την οικεία μέθοδο απόδειξης ιδιοτήτων των φυσικών με επαγωγή: Εάν $\phi(x)$ είναι μία ιδιότητα φυσικών αριθμών, από μία απόδειξη c_0 τής $\phi(0)$ και μία απόδειξη $c_{\mathsf{s}}(x, y)$ τής $\phi(\mathsf{s}(x))$ από την $\phi(x)$ λαμβάνουμε, μέσω τού μετασχηματισμού t που ορίζεται με επαγωγή από τα c_0 και c_{s}, μία απόδειξη $t(x)$ τού $\phi(x)$ για τυχόντα φυσικό αριθμό x.

Η γενίκευση του αναδρομέα για την αρχή τής επαγωγής ονομάζεται *επαγωγέας* και συμβολίζεται ind· για τους φυσικούς αριθμούς, έχει τη μορφή

$$(z : C(0), (x : \mathrm{Nat}, y : C(x))\ w(x, y) : C(\mathsf{s}(x)), n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{ind}_{\mathrm{Nat}}(z, w, n) : C(n).$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής επαγωγής, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόσθεση φυσικών αριθμών είναι αντιμεταθετική,

$$n + m = m + n,$$

με επαγωγή στο n. Αφ' ενός έχουμε να δείξουμε ότι $0 + m = m + 0$, το οποίο, δεδομένου ότι $m + 0 \equiv m$, γράφεται ισοδύναμα

$$0 + m = m. \tag{4}$$

Αφ' ετέρου, έχουμε να δείξουμε ότι εάν $n + m = m + n$, τότε $\mathsf{s}(n) + m = m + \mathsf{s}(n)$, το οποίο, δεδομένου ότι $m + \mathsf{s}(n) \equiv \mathsf{s}(m + n)$, και αξιοποιώντας τήν επαγωγική υπόθεση, γράφεται ισοδύναμα

$$\mathsf{s}(n) + m = \mathsf{s}(n + m). \tag{5}$$

Παρατηρήστε ότι οι σχέσεις (4) και (5) είναι οι ορίζουσες σχέσεις τής πρόσθεσης αντεστραμμένες· αυτό φαίνεται καλύτερα εάν θεσουμε $m +' n :\equiv n + m$:

$$\begin{aligned} m +' 0 &= m, \\ m +' \mathsf{s}(n) &= \mathsf{s}(m +' n). \end{aligned}$$

Αυτό που μόλις διαπιστώσαμε είναι ειδική περίπτωση του εξής αποτελέσματος.

Θεώρημα 5 (μοναδικότητα του definiendum). *Ας θεωρήσουμε τον αναδρομικό ορισμό*

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv c_\mathsf{s}(n, t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c_0 : C$ *και* $(x : \mathrm{Nat}, y : C)\ c_\mathsf{s}(x, y) : C$*, και ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός* $(x : \mathrm{Nat})\ u(x) : C$ *μαζί με τα εξής δεδομένα:*

1. *ένα* $p_0 : u(0) = c_0$*, και*
2. *έναν μετασχηματισμό* $(x : \mathrm{Nat})\ p_\mathsf{s}(x) : u(s(x)) = c_\mathsf{s}(x, u(x))$.

Τότε, υπάρχει ένας μετασχηματισμός

$$(x : \mathrm{Nat})\ p(x) : u(x) = t(x).$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τον p με επαγωγή. Η μία ρήτρα τού ορισμού είναι προφανής:

$$p(0) :\equiv p_0 : u(0) = c_0 \equiv t(0). \tag{6}$$

Όσον αφορά την άλλη, εάν $p(n) : u(n) = t(n)$, τότε παίρνουμε

$$p_\mathsf{s}(n) : u(\mathsf{s}(n)) = c_\mathsf{s}(n, u(n))$$

και

$$\mathsf{ap}_{(y : C)\ c_\mathsf{s}(n,y)}(p(n)) : c_\mathsf{s}(n, u(n)) = c_\mathsf{s}(n, t(n)) \equiv t(\mathsf{s}(n))$$

οπότε μπορούμε να επικαλεστούμε τη μεταβατικότητα της ισότητας και να θέσουμε

$$p(\mathsf{s}(n)) :\equiv p_\mathsf{s}(n) \cdot \mathsf{ap}_{(y : C)\ c_\mathsf{s}(n,y)}(p(n)) : u(\mathsf{s}(n)) = t(\mathsf{s}(n)). \tag{7}$$

Ο p ορίστηκε με επαγωγή από τις (6) και (7). □

Άσκηση 3.3. Διατυπώστε και αποδείξτε τό ανάλογο του θεωρήματος 5 για λίστες.

Άσκηση 3.4. Συμπληρώστε τήν απόδειξη της αντιμεταθετικότητας της πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, ορίστε, με επαγωγή στο m, μετασχηματισμούς

$$(m : \mathrm{Nat})\ p_0(m) : 0 + m = m$$

και

$$(n, m : \mathrm{Nat})\ p_\mathsf{s}(n, m) : \mathsf{s}(n) + m = \mathsf{s}(n + m)$$

και μετά εφαρμόστε το θεώρημα 5 για να συμπεράνετε, για οποιοδήποτε $m : \mathrm{Nat}$, την ύπαρξη ενός μετασχηματισμού

$$(n : \mathrm{Nat})\ p(n) : n + m = m + n.$$

3.4 Ασκήσεις

Άσκηση 3.5. Δείξτε ότι η πρόσθεση λιστών είναι προσεταιριστική, περιγράφοντας, για οποιαδήποτε $j, k, l : \mathrm{List}(A)$, ένα μέλος τού τύπου

$$(j + k) + l = j + (k + l).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο l.]

Λύση. Θα κάνουμε επαγωγή στο l. Αυτό σημαίνει ότι θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή τής επαγωγής τού τύπου $\mathrm{List}(A)$ για να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό

$$(l : \mathrm{List}(A))\ t(l) : (j + k) + l = j + (k + l).$$

Κατά πρώτον, πρέπει να ορίσουμε το

$$t(\mathsf{nil}) : (j + k) + \mathsf{nil} = j + (k + \mathsf{nil}).$$

Από τον ορισμό τής πρόσθεσης, όμως, παρατηρούμε ότι

$$(j + k) + \mathsf{nil} \equiv j + k \equiv j + (k + \mathsf{nil}),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{nil}) :\equiv \mathsf{refl}_{j+k}.$$

Κατά δεύτερον, ας υποθέσουμε ότι έχουμε το $t(l) : (j + k) + l = j + (k + l)$, και θέλουμε να ορίσουμε το

$$t(\mathsf{cons}(l, a)) : (j + k) + \mathsf{cons}(l, a) = j + (k + \mathsf{cons}(l, a)).$$

Οι υπολογισμοί των σκελών αυτής της ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned}(j + k) + \mathsf{cons}(l, a) &\equiv \mathsf{cons}((j + k) + l, a),\\ j + (k + \mathsf{cons}(l, a)) &\equiv j + \mathsf{cons}(k + l, a)\\ &\equiv \mathsf{cons}(j + (k + l), a).\end{aligned}$$

Εφ΄ όσον $t(l) : (j + k) + l = j + (k + l)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα 1 και να θέσουμε

$$t(\mathsf{cons}(l, a)) :\equiv \mathsf{ap}_{(x : \mathrm{List}(A))\, \mathsf{cons}(x,a)}(t(l)) : \mathsf{cons}((j + k) + l, a) = \mathsf{cons}(j + (k + l), a).$$

Από την αρχή τής επαγωγής τού $\mathrm{List}(A)$ λαμβάνουμε, για οποιαδήποτε λίστα $l : \mathrm{List}(A)$, ένα μέλος $t(l)$ τού $(j + k) + l = j + (k + l)$.

΄Ασκηση 3.6. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ u(x) : B$, δείξτε ότι, για οποιαδήποτε $k, l : \mathrm{List}(A)$,

$$\mathrm{List}(u)(k + l) = \mathrm{List}(u)(k) + \mathrm{List}(u)(l).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο l.]

΄Ασκηση 3.7 (Φυσικότητα του cat)**.** Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ u(x) : B$, δείξτε ότι, για οποιοδήποτε $L : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$,

$$\mathsf{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{cat}(L)).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο L.]

4 Λογική

Υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στη θεωρία τύπων και τη λογική, ιδιαίτερα τη θεωρία αποδείξεων. Μία πτυχή τής σχέσης αυτής, η οποία σκιαγραφήθηκε ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο, αφορά την ερμηνεία των προτάσεων ως τύπων, γνωστή και ως αντιστοιχία Curry-Howard. Ωστόσο, εδώ υποκρύπτεται ένα σημαντικά βαθύτερο γεγονός, που έχει να κάνει με την ανάγνωση της θεωρίας τύπων ως θεωρίας νοήματος των αναλυτικών προτάσεων. Το ζήτημα του προσδιορισμού των αναλυτικών προτάσεων έχει πλούσια ιστορία και συνδέεται με διάφορα άλλα εξαιρετικά ενδιαφέροντα φιλοσοφικά ερωτήματα, η πραγμάτευση των οποίων ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Θα προσπαθήσουμε μόνο να σκιαγραφήσουμε το σκεπτικό στη βάση τού οποίου οικοδομείται η σχέση μεταξύ λογικής και θεωρίας τύπων.

4.1 Η έννοια του τεκμηρίου αλήθειας

Η αποδεικτική διαδικασία έχει απολύτως κεντρική θέση στα μαθηματικά. Και δικαίως, αφού είναι ο τρόπος με τον οποίο αποκτούμε γνώση των μαθηματικών προτάσεων. Ποια είναι, όμως, η σχέση ανάμεσα στην απόδειξη και τη γνώση; Στο [2], ο Martin-Löf περιγράφει το αποδεικνύειν μία πρόταση ϕ ως την πρόσκτηση ή κατασκευή ή σύλληψη ενός τεκμηρίου αλήθειας της ϕ. Τότε, το γνωρίζειν την ϕ νοείται ως το έχειν αποδείξει την ϕ, δηλαδή ως η κατοχή ενός τεκμηρίου αλήθειας της ϕ.

Μία απόδειξη ενδέχεται, εκτός από συμπέρασμα, να έχει και υποθέσεις. Στην περίπτωση αυτή, η γνώση η οποία κομίζεται είναι κατά συνθήκη. Άλλως ειπείν, μία απόδειξη με υποθέσεις παρέχει σε κάποιον που γνωρίζει τις υποθέσεις έναν τρόπο να γνωρίσει το συμπέρασμα. Δοθέντος ότι το γνωρίζειν συνίσταται στην κατοχή ενός τεκμηρίου αλήθειας, οδηγούμαστε στην εξής

Διαπίστωση. *Μία απόδειξη παριστάνει έναν μετασχηματισμό των τεκμηρίων αλήθειας κάποιων προτάσεων (των υποθέσεων) σε τεκμήρια αλήθειας κάποιας πρότασης (του συμπεράσματος).*

Κατ΄ αυτόν τον τρόπο, έχουμε διευκρινίσει τη σχέση μεταξύ απόδειξης και γνώσης. Μένει ακόμα να πούμε ποια είναι τα τεκμήρια αλήθειας των προτάσεων. Σχετικά με αυτό, παρατηρήστε ότι το τι συνιστά τεκμήριο αλήθειας καθεμιάς πρότασης είναι ακριβώς ό,τι χρειάζεται να γνωρίζει κανείς προκειμένου να είναι σε θέση τόσο να διατυπώνει αποδείξεις, όσο και να κατανοεί τις αποδείξεις που διατυπώνουν άλλοι ως τέτοιες. Αυτή, όμως, είναι η λειτουργία τού νοήματος:

Ορισμός 6. *Αποδεικτικό ή θετικό νόημα* (ή, απλώς, νόημα) μιας πρότασης ονομάζεται το τι συνιστά τεκμήριο αλήθειας αυτής.

Το σκεπτικό αυτού του ορισμού είναι ότι στα μαθηματικά, αλλά και σε κάθε άλλο πεδίο στο οποίο η αποδεικτική διαδικασία έχει κεντρικό ρόλο, οι προτάσεις «κουβαλούν» το θετικό τους νόημα, καθώς αυτό είναι που προσδιορίζει τους τρόπους με τους οποίους συμμετέχουν σε αποδείξεις.

4.2 Προτασιακή λογική

Όσον αφορά τον προσδιορισμό τού νοήματος των διαφόρων προτάσεων, παρατηρήστε ότι ένας ορισμός είναι μία πράξη απόδοσης νοήματος σε ένα σύμβολο, έναν όρο ή μία οποιαδήποτε άλλη, ενδεχομένως σύνθετη, γλωσσική έκφραση. Αυτό σημαίνει, αντίστροφα, ότι η σχέση ανάμεσα σε μία γλωσσική έκφραση και στο νόημά της μπορεί να είναι αντικείμενο ορισμού, κι αυτό ισχύει ιδιαίτερα για προτάσεις[1]. Από την άλλη μεριά, ο προσδιορισμός τού νοήματος των προτάσεων μιας προϋπάρχουσας γλώσσας δε μπορεί να είναι αυθαίρετος, αλλά θα πρέπει να στηρίζεται σε μία νοηματική ανάλυση αυτής της γλώσσας. Προκειμένου για τη χρήση των λογικών σταθερών στα κατασκευαστικά μαθηματικά, η σχετική ανάλυση συνοψίζεται στην *ερμηνεία Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK)*, η οποία, για τους συνδέσμους, έχει ως εξής:

- Ένα τεκμήριο αλήθειας της $\phi \,\&\, \psi$ αποτελείται από ένα τεκμήριο αλήθειας της ϕ και ένα τεκμήριο αλήθειας της ψ.
- Τεκμήρια αλήθειας της $\phi \vee \psi$ είναι τα τεκμήρια αλήθειας της ϕ καθώς και εκείνα της ψ.
- Τεκμήριο αλήθειας της $\phi \supset \psi$ είναι ένας μετασχηματισμός τών τεκμηρίων αλήθειας της ϕ σε τεκμήρια αλήθειας της ψ.
- Η $\bot$ δεν έχει τεκμήρια αλήθειας.
- Η $\top$ έχει ένα τεκμήριο αλήθειας.

Τέλος, η άρνηση $\neg\phi$ μιας πρότασης ϕ ορίζεται ως η πρόταση $\phi \supset \bot$.

Η BHK διευκρινίζει τον τρόπο με τον οποίο οι λογικές σταθερές χρησιμοποιούνται στα κατασκευαστικά μαθηματικά. Το κάνει, δε, αυτό, περιγράφοντας το νόημα καθεμιάς σύνθετης πρότασης συναρτήσει των νοημάτων των απλούστερων προτάσεων από τις οποίες έχει συντεθεί. Μάλιστα, καθεμιά από τις ρήτρες τής BHK είναι ένα επαγωγικό σχήμα. Συνεπεία αυτού, μπορούμε να πούμε ότι το νόημα καθεμιάς πρότασης είναι ο τύπος των τεκμηρίων αλήθειας αυτής. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τυποθεωρητική ορολογία και τυποθεωρητικό συμβολισμό όταν μιλάμε για προτάσεις· μεταξύ άλλων, γράφουμε $x : \phi$ για να δηλώσουμε ότι το x είναι τεκμήριο αλήθειας της ϕ. Θα εξετάσουμε τους συνδέσμους κατά σειράν.

Σύζευξη

Στην BHK, οι κατασκευαστές των (τεκμηρίων αλήθειας των) διαφόρων προτάσεων έχουν αποσιωπηθεί. Ωστόσο, προς χάριν τής τυποθεωρητικής πραγμάτευσης, χρειάζεται να τους εμφανίσουμε. Έτσι, ορίζουμε την σύζευξη $\phi_1 \,\&\, \phi_2$ δύο προτάσεων ϕ_1 και ϕ_2 μέσω τού κατασκευαστή (τεκμηρίων αλήθειας)

- Εάν $a_1 : \phi_1$ και $a_2 : \phi_2$, τότε $\mathsf{pair}(a_1, a_2) : \phi_1 \,\&\, \phi_2$,

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{a_1 : \phi_1 \qquad a_2 : \phi_2}{\mathsf{pair}(a_1, a_2) : \phi_1 \,\&\, \phi_2} \quad .$$

[1] Ο όρος *πρόταση* αντιστοιχεί, στα αγγλικά, στους δύο όρους *sentence* και *proposition*, ο πρώτος εκ των οποίων αναφέρεται στην πρόταση ως γλωσσική έκφραση, ενώ ο δεύτερος στο νόημα ή τη σημασία μιας τέτοιας γλωσσικής έκφρασης· ισοδύναμα, μία πρόταση-proposition είναι ένα προτασιακό νόημα, και μία πρόταση-sentence είναι μία γλωσσική έκφραση ενός τέτοιου νοήματος. Όταν μιλάμε για το νόημα ή τον ορισμό μιας πρότασης εννοούμε, ξεκάθαρα, την πρόταση ως γλωσσική έκφραση.

Παραλείποντας τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαγωγής

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_1 \,\&\, \phi_2}\ \&\mathcal{I}$$

που εκφράζει το στοιχειώδες λογικό γεγονός ότι από δύο προτάσεις μπορούμε να συμπεράνουμε τη σύζευξή τους. Ο κανόνας αυτός ονομάζεται *κανόνας εισαγωγής (introduction rule)* τής σύζευξης, διότι περιγράφει τον (κανονικό) τρόπο με τον οποίο μία σύζευξη εμφανίζεται ως συμπέρασμα μιας απόδειξης.

Όπως κάθε τύπος, η σύζευξη ικανοποιεί μία αρχή αναδρομής, η οποία λέει ότι, δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x_1 : \phi_1, x_2 : \phi_2)\ c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2) : \theta$, η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ :\equiv\ c_{\mathsf{pair}}(a_1, a_2)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : \phi_1 \,\&\, \phi_2)\ t(x) : \theta$. Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$((x_1 : \phi_1, x_2 : \phi_2)\ z(x_1, x_2) : \theta, x : \phi_1 \,\&\, \phi_2)\ \mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}(z, x) : \theta$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{\begin{array}{c}(x_1 : \phi_1, x_2 : \phi_2)\\ \vdots \\ z(x_1, x_2) : \theta\end{array} \qquad x : \phi_1 \,\&\, \phi_2}{\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}(z, x) : \theta}\ ,$$

οριζόμενο από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}(z, \mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ :\equiv\ z(a_1, a_2).$$

Εάν από τον κανόνα σχηματισμού τού $\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}$ παραλείψουμε τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαγωγής

$$\frac{\begin{array}{c}(\phi_1, \phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi_1 \,\&\, \phi_2}{\theta}\ \&\mathcal{E}\ ,$$

ο οποίος εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο μία σύζευξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόθεση, και γι΄ αυτό λέγεται *κανόνας απαλοιφής* τής σύζευξης.

Διάζευξη

Όμοια, η διάζευξη έχει τον επαγωγικό ορισμό

$$\frac{a_1 : \phi_1}{\mathsf{in}_1(a_1) : \phi_1 \vee \phi_2} \qquad \frac{a_2 : \phi_2}{\mathsf{in}_2(a_2) : \phi_1 \vee \phi_2}\ .$$

Κι εδώ μπορούμε να παραλείψουμε τα τεκμήρια αλήθειας και να πάρουμε τους κανόνες εισαγωγής τής διάζευξης

$$\frac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \qquad \frac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2}\ \vee\mathcal{I}\ ,$$

οι οποίοι εκφράζουν το γεγονός ότι μπορούμε να συμπεράνουμε μία διάζευξη από εκάτερη των διαζευκτέων.

Η αρχή τής αναδρομής για τη διάζευξη έχει ως εξής: Δοθέντων δύο μετασχηματισμών $(x_1 : \phi_1)\ c_{\mathsf{in}_1}(x_1) : \theta$ και $(x_2 : \phi_2)\ c_{\mathsf{in}_2}(x_2) : \theta$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{in}_1(a_1)) &:\equiv c_{\mathsf{in}_1}(a_1), \\ t(\mathsf{in}_2(a_2)) &:\equiv c_{\mathsf{in}_2}(a_2) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \phi_1 \vee \phi_2)\ t(x) : \theta$. Ο αναδρομέας τής διάζευξης έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{matrix} (x_1 : \phi_1) \\ \vdots \\ z_1(x_1) : \theta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (x_2 : \phi_2) \\ \vdots \\ z_2(x_2) : \theta \end{matrix} \qquad x : \phi_1 \vee \phi_2}{\mathsf{rec}_{\phi_1 \vee \phi_2}(z_1, z_2, x) : \theta}$$

και ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\phi_1 \vee \phi_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_1(a_1)) &:\equiv z_1(a_1), \\ \mathsf{rec}_{\phi_1 \vee \phi_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_2(a_2)) &:\equiv z_2(a_2). \end{aligned}$$

Διαγράφοντας τα τεκμήρια αλήθειας από τον κανόνα σχηματισμού τού $\mathsf{rec}_{\phi_1 \vee \phi_2}$ παίρνουμε τον κανόνα απαλοιφής τής διάζευξης

$$\frac{\begin{matrix} (\phi_1) \\ \vdots \\ \theta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (\phi_2) \\ \vdots \\ \theta \end{matrix} \qquad \phi_1 \vee \phi_2}{\theta} \vee\mathcal{E} \ ,$$

ο οποίος περιγράφει την απόδειξη με διάκριση περιπτώσεων.

Συνεπαγωγή

Η περίπτωση της συνεπαγωγής παρουσιάζει λίγο μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Εδώ, ο ορισμός έχει τη μορφή

- Εάν ο $(x : \phi)\ b(x) : \psi$ είναι μετασχηματισμός των τεκμηρίων αλήθειας της ϕ σε τεκμήρια αλήθειας της ψ, τότε το $\lambda(x : \phi)\ b(x)$ είναι τεκμήριο αλήθειας της $\phi \supset \psi$.

Η ιδιαιτερότητα της (μοναδικής) ρήτρας αυτού τού ορισμού είναι ότι, σε αντίθεση με όλους τούς επαγωγικούς ορισμούς των άλλων συνδέσμων, εισάγει έναν κατασκευαστή, την *λ-αφαίρεση*, ο οποίος δέχεται ένα όρισμα που δεν είναι μέλος κάποιου τύπου, παρά είναι το ίδιο μετασχηματισμός. Αυτό αντανακλάται και στον αντίστοιχο κανόνα σχηματισμού, ο οποίος έχει τη μορφή

$$\frac{\begin{matrix} (x : \phi) \\ \vdots \\ b(x) : \psi \end{matrix}}{\lambda(x : \phi)\ b(x) : \phi \supset \psi} \ .$$

Τα τεκμήρια αλήθειας των συνεπαγωγών ονομάζονται *συναρτήσεις*. Θα ταίριαζε, επομένως, να γράφαμε $\mathsf{function}(x : \phi)\ b(x)$ αντί για $\lambda(x : \phi)\ b(x)$, μια και αυτό που δηλώνεται εδώ είναι μία συνάρτηση με όρισμα x και σώμα $b(x)$. Ωστόσο, το σύμβολο λ είναι καθιερωμένο στη λογική και τη θεωρία τύπων, και δε θα επιχειρήσουμε να το αλλάξουμε.

Παραλείποντας τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα εισαγωγής τής συνεπαγωγής

$$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi)\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi \supset \psi}\ \supset\mathcal{I}$$

ο οποίος, σε άλλες διατυπώσεις τής λογικής, είναι γνωστός ως θεώρημα απαγωγής.

Η αρχή τής αναδρομής για τη συνεπαγωγή αποτελεί λίγο μεγαλύτερη πρόκληση, γι΄ αυτό τη διατυπώνουμε αναλυτικά: Έστω θ τυχούσα πρόταση, και ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός $((x : \phi)\ y(x) : \psi)\ c_\lambda(y) : \theta$ ο οποίος δέχεται ως όρισμα έναν μετασχηματισμό τεκμηρίων αλήθειας της ϕ σε τεκμήρια αλήθειας της ψ και επιστρέφει ένα τεκμήριο αλήθειας της θ. Με αυτά τα δεδομένα, η σχέση

$$t(\lambda(x : \phi)\ b(x))\ :\equiv\ c_\lambda(b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : \phi \supset \psi)\ t(x) : \theta$.

Ώς συνήθως, ο αναδρομέας τής συνεπαγωγής λαμβάνεται εμφανίζοντας ως όρισμα την παράμετρο c_λ, οπότε έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{x : \phi}{y(x) : \psi}\right)\\ \vdots\\ z(y) : \theta\end{array} \qquad f : \phi \supset \psi}{\mathsf{rec}_{\phi\supset\psi}(z, f) : \theta}\ ,$$

και ορίζεται από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\phi\supset\psi}(z, \lambda(x : \phi)\ b(x))\ :\equiv\ z(b).$$

Και πάλι, διαγράφοντας τα τεκμήρια αλήθειας λαμβάνουμε τον κανόνα απαλοιφής τής συνεπαγωγής

$$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{\phi}{\psi}\right)\\ \vdots\\ \theta\end{array} \qquad \phi \supset \psi}{\theta}\ \supset\mathcal{E}\ .$$

Εάν συμβολίσουμε $\Sigma \vdash \theta$ το γεγονός ότι η θ έπεται (είναι λογική συνέπεια) των προτάσεων και κανόνων που ανήκουν στο σύνολο Σ, ο $(\supset\mathcal{E})$ λέει ότι εάν $\Sigma \cup \{\dfrac{\phi}{\psi}\} \vdash \theta$, τότε $\Sigma \cup \{\phi \supset \psi\} \vdash \theta$.

Ψευδές

Το ψευδές, μη έχοντας τεκμήρια αλήθειας, έχει τον τετριμμένο, ή κενό, επαγωγικό ορισμό που δεν περιέχει καμία ρήτρα· κατά συνέπεια δεν έχει και κανόνες εισαγωγής.

Εφ΄ όσον δεν έχει τεκμήρια αλήθειας, η αντίστοιχη αρχή αναδρομής λέει απλώς ότι για κάθε πρόταση θ ορίζεται ένας μετασχηματισμός τεκμηρίων αλήθειας της $\bot$ σε τεκμήρια αλήθειας της θ, που είναι και ο αναδρομέας

$$(x : \bot)\ \mathsf{rec}_\bot(x) : \theta$$

τού ψευδούς· υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x : \bot}{\mathsf{rec}_\bot(x) : \theta}\ .$$

Διαγράφοντας τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαλοιφής τού ψευδούς

$$\frac{\bot}{\theta}\ \bot\mathcal{E}\ ,$$

που είναι γνωστός και ως ex falso (sequitur) quodlibet.

Αληθές

Το αληθές έχει τον ορισμό

- $! : \top$,

η μοναδική ρήτρα τού οποίου γράφεται επίσης

$$\frac{}{! : \top}$$

και δίνει τον κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{\top}\ \top\mathcal{I}$$

που λέει, απλώς, ότι η $\top$ αληθεύει.

Προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό των τεκμηρίων αλήθειας του αληθούς δεν έχουμε παρά να πούμε πώς αυτός δρα στο μοναδικό τεκμήριο αλήθειας $! : \top$· αυτό ακριβώς εκφράζεται από την αρχή αναδρομής τού αληθούς: Δοθέντος ενός $c_! : \theta$, η σχέση

$$t(!)\ :\equiv c_!$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : \top)\ t(x) : \theta$. Έτσι και ο αναδρομέας τού αληθούς

$$(x : \theta, y : \top)\ \mathsf{rec}_\top(x, y) : \theta$$

ορίζεται από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_\top(x, !)\ :\equiv x.$$

Ο $\mathsf{rec}_\top$ έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{x : \theta \qquad y : \top}{\mathsf{rec}_\top(x, y) : \theta}\ ,$$

από τον οποίο αφαιρώντας τά τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαλοιφής τού αληθούς

$$\frac{\theta \qquad \top}{\theta}\ \top\mathcal{E}\ .$$

4.2.1 Ειδικοί κανόνες απαλοιφής

Εάν ένας σύνδεσμος έχει ακριβώς έναν κανόνα εισαγωγής, ο μοναδικός αυτός κανόνας εισαγωγής μπορεί επίσης να διαβαστεί από κάτω προς τα επάνω. Τα προϊόντα αυτής τής αντιστροφής λέγονται *ειδικοί (special) κανόνες απαλοιφής* (και, ενίοτε, για αντιδιαστολή, οι άλλοι κανόνες απαλοιφής ονομάζονται *γενικοί*). Προκειμένου για τη σύζευξη, αυτοί είναι οι

$$\frac{\phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\phi_1} \qquad \frac{\phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\phi_2}\ \&\mathcal{S}\ .$$

Για τη συνεπαγωγή έχουμε τον κανόνα

$$\frac{\phi \supset \psi \qquad \phi}{\psi}\ \supset\mathcal{S}\ ,$$

γνωστό και ως modus ponens. Τέλος, για το αληθές έχουμε μηδέν το πλήθος ειδικούς κανόνες απαλοιφής.

Για καθέναν από τους τρεις παραπάνω συνδέσμους, οι ειδικοί κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι με τον (γενικό) κανόνα απαλοιφής. Για να το δείξουμε αυτό για τη σύζευξη, θεωρούμε τους μετασχηματισμούς

$$\frac{x : \phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\mathsf{pr}_1(x) : \phi_1} \qquad \frac{x : \phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\mathsf{pr}_2(x) : \phi_2}\ ,$$

οι οποίοι ορίζονται μέσω των αναδρομών

$$\begin{aligned} \mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) &:\equiv a_1, \\ \mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) &:\equiv a_2. \end{aligned}$$

Όπως και κάθε άλλος μετασχηματισμός που ορίζεται με αναδρομή, οι pr_1 και pr_2 μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια του $\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}$· αντιστρόφως, ο $\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}$ ορίζεται από τους pr_1 και pr_2 μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}(z, x) :\equiv z(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)).$$

Άσκηση 4.1. Επαληθεύστε ότι ο έτσι ορισμένος $\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}$ ικανοποιεί τις ορίζουσες σχέσεις τού αναδρομέα τής σύζευξης.

Για να τακτοποιήσουμε τη συνεπαγωγή, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\frac{f : \phi \supset \psi \qquad x : \phi}{\mathsf{apply}_f(x) : \psi}\ .$$

ο οποίος ορίζεται μέσω της αναδρομής

$$\mathsf{apply}_{\lambda(x\,:\,\phi)\ b(x)}(a) :\equiv b(a).$$

Ο $\mathsf{rec}_{\phi \supset \psi}$ ορίζεται από τον apply μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{rec}_{\phi \supset \psi}(z, f) :\equiv z((x : \phi)\ \mathsf{apply}_f(x)).$$

Άσκηση 4.2. Επαληθεύστε ότι ο έτσι ορισμένος $\mathsf{rec}_{\phi \supset \psi}$ ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού αναδρομέα τής συνεπαγωγής.

Για την περίπτωση του αληθούς, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο $\mathsf{rec}_\top$ ορίζεται και χωρίς αναδρομή:

$$\mathsf{rec}_\top(x, y) :\equiv x.$$

Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι ο κανόνας απαλοιφής τού αληθούς είναι περιττός.

Άσκηση 4.3. Επαληθεύστε ότι ο έτσι ορισμένος $\mathsf{rec}_\top$ ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού αναδρομέα τού αληθούς.

Δυνάμει τού παραπάνω θεωρήματος, είναι καθιερωμένο στη φυσική απαγωγή να χρησιμοποιούνται οι ειδικοί κανόνες απαλοιφής όπου είναι διαθέσιμοι.

4.2.2 Παραδείγματα

Ως πρώτο παράδειγμα, ας δούμε πώς από τις $\phi \supset \psi$ και $\psi \supset \theta$ μπορούμε να συμπεράνουμε την $\phi \supset \theta$:

$$\dfrac{\dfrac{\psi \supset \theta \qquad \dfrac{\phi \supset \psi \qquad (\phi)}{\psi}\supset\mathcal{S}}{\theta}\supset\mathcal{S}}{\phi \supset \theta}\supset\mathcal{I}\quad .$$

Όπως συνηθίζεται στα μαθηματικά, γράψαμε την απόδειξη χωρίς να αναφέρουμε τα τεκμήρια αλήθειας των εμπλεκόμενων προτάσεων. Ωστόσο, ανατρέχοντας στους κανόνες σχηματισμού από τους οποίους προέρχονται οι διάφοροι λογικοί κανόνες, μπορούμε από μία απόδειξη να εκμαιεύσουμε τον μετασχηματισμό τον οποίο παριστάνει. Προκειμένου για την απόδειξη του παραδείγματος, ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο

$$(f : \phi \supset \psi, g : \psi \supset \theta)\ g \circ f,$$

όπου

$$g \circ f :\equiv \lambda(x : \phi)\ \mathsf{apply}_g(\mathsf{apply}_f(x))$$

είναι η σύνθεση συναρτήσεων. Υπάρχουν επίσης ταυτοτικές συναρτήσεις:

$$\mathsf{id}_\phi :\equiv \dfrac{(x : \phi)}{\lambda(x : \phi)\ x : \phi \supset \phi}\supset\mathcal{I}\quad .$$

4.3 Κατηγορηματική λογική

Για τους ποσοδείκτες, οι σχετικές ρήτρες τής BHK είναι οι εξής:

- Ένα τεκμήριο αλήθειας της $\exists(x : A)\ \phi(x)$ αποτελείται από ένα μέλος a τού τύπου A και ένα τεκμήριο αλήθειας της πρότασης $\phi(a)$.
- Τεκμήριο αλήθειας της $\forall(x : A)\ \phi(x)$ είναι ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει καθένα μέλος a τού τύπου A σε ένα τεκμήρια αλήθειας της πρότασης $\phi(a)$.

Υπαρκτικός ποσοδείκτης

Έστω $(x : A)\ \phi(x)$ οικογένεια προτάσεων. Η πρόταση $\exists(x : A)\ \phi(x)$ έχει τον κατασκευαστή

- Εάν $a : A$ και $b : \phi(a)$, τότε $\mathsf{pair}(a, b) : \exists(x : A)\ \phi(x)$.

Χρησιμοποιούμε το ίδιο όνομα για τον κατασκευαστή τού υπαρκτικού ποσοδείκτη με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για τον κατασκευαστή τής σύζευξης. Αυτό είναι εσκεμμένο: Από τυποθεωρητική άποψη, η υπαρκτική ποσόδειξη δεν είναι παρά μία εξαρτώμενη (dependent) σύζευξη.

Ως κανόνας σχηματισμού, η ρήτρα τού παραπάνω ορισμού γράφεται

$$\frac{a : A \qquad b : \phi(a)}{\mathsf{pair}(a, b) : \exists(x : A)\ \phi(x)}\ .$$

Παραλείποντας τα τεκμήρια αλήθειας από τον παραπάνω κανόνα παίρνουμε τον κανόνα εισαγωγής τού υπαρκτικού ποσοδείκτη

$$\frac{a : A \qquad \phi(a)}{\exists(x : A)\ \phi(x)}\ \exists\mathcal{I}\ ,$$

ο οποίος μας λέει ότι δοθείσης τής $\phi(a)$ για κάποιο a μπορούμε να συμπεράνουμε την $\exists(x : A)\ \phi(x)$.

Η αρχή τής αναδρομής τού υπαρκτικού ποσοδείκτη λέει ότι, δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A, y : \phi(x))\ c_{\mathsf{pair}}(x, y) : \theta$, η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(a, b)) \ :\equiv\ c_{\mathsf{pair}}(a, b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(w : \exists(x : A)\ \phi(x))\ t(w) : \theta$. Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$((x : A, y : \phi(x))\ z(x, y) : \theta, w)\ \mathsf{rec}_{\exists(x : A)\ \phi(x)}(z, w) : \theta$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A, y : \phi(x))\\ \vdots\\ z(x, y) : \theta\end{array} \qquad w : \exists(x : A)\ \phi(x)}{\mathsf{rec}_{\exists(x : A)\ \phi(x)}(z, w) : \theta}\ ,$$

οριζόμενο από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\exists(x : A)\ \phi(x)}(z, \mathsf{pair}(a, b)) \ :\equiv\ z(a, b).$$

Εάν από τον κανόνα σχηματισμού τού $\mathsf{rec}_{\exists(x : A)\ \phi(x)}$ παραλείψουμε τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαλοιφής τού υπαρκτικού ποσοδείκτη

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A, \phi(x))\\ \vdots\\ \theta\end{array} \qquad \exists(x : A)\ \phi(x)}{\theta}\ \exists\mathcal{E}\ .$$

Καθολικός ποσοδείκτης

Έστω $(x : A)\ \phi(x)$ οικογένεια προτάσεων. Η πρόταση $\forall(x : A)\ \phi(x)$ έχει τον κατασκευαστή

- Εάν ο $(x : A)\ b(x) : \phi(x)$ είναι μετασχηματισμός, τότε το $\lambda(x : A)\ b(x)$ είναι τεκμήριο αλήθειας της $\forall(x : A)\ \phi(x)$.

Και στην περίπτωση του καθολικού ποσοδείκτη συμβολίζουμε τον κατασκευαστή όπως τον κατασκευαστή τής συνεπαγωγής: Η καθολική ποσόδειξη είναι η εξαρτώμενη (dependent) εκδοχή τής συνεπαγωγής.

Ο λ έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{matrix}(x : A)\\ \vdots \\ b(x) : \phi(x)\end{matrix}}{\lambda(x : A)\ b(x) : \forall(x : A)\ \phi(x)}\ ,$$

από τον οποίο παίρνουμε, παραλείποντας τα μέλη, τον κανόνα εισαγωγής τού καθολικού ποσοδείκτη:

$$\frac{\begin{matrix}(x : A)\\ \vdots \\ \phi(x)\end{matrix}}{\forall(x : A)\ \phi(x)}\ \forall\mathcal{I}\ .$$

Απο λογική άποψη, αυτός ο κανόνας λέει ότι από μία απόδειξη της $\phi(x)$ για τυχόν $x : A$ μπορούμε να συμπεράνουμε την $\forall(x : A)\ \phi(x)$.

Η αρχή τής αναδρομής για τον καθολικό ποσοδείκτη είναι επίσης γενίκευση της αντίστοιχης αρχής για την συνεπαγωγή: Εάν η θ είναι τυχούσα πρόταση, και μας έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός $((x : A)\ y(x) : \phi(x))\ c_\lambda(y) : \theta$, τότε η σχέση

$$t(\lambda(x : A)\ b(x))\ :\equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(f : \forall(x : A)\ \phi(x))\ t(f) : \theta$. Ώς συνήθως, ο αναδρομέας τού καθολικού ποσοδείκτη λαμβάνεται εμφανίζοντας ως όρισμα την παράμετρο c_λ, οπότε έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{matrix}\left(\dfrac{x : A}{y(x) : \phi(x)}\right)\\ \vdots \\ z(y) : \theta\end{matrix} \qquad f : \forall(x : A)\ \phi(x)}{\mathsf{rec}_{\forall(x : A)\ \phi(x)}(z, f) : \theta}\ ,$$

και ορίζεται με αναδρομή από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\forall(x : A)\ \phi(x)}(z, \lambda(x : A)\ b(x))\ :\equiv z(b).$$

Και πάλι, διαγράφοντας τα τεκμήρια αλήθειας λαμβάνουμε τον κανόνα απαλοιφής τού καθολικού ποσοδείκτη

$$\frac{\begin{matrix}\left(\dfrac{x : A}{\phi(x)}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \qquad \forall(x : A)\ \phi(x)}{\theta}\ \forall\mathcal{E}\ .$$

	Κανόνες εισαγωγής	Κανόνες απαλοιφής	(Ειδικοί)
$\&$	$\dfrac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_1 \,\&\, \phi_2}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi_1, \phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi_1 \,\&\, \phi_2}{\theta}$	$\dfrac{\phi_1 \,\&\, \phi_2}{\phi_1} \qquad \dfrac{\phi_1 \,\&\, \phi_2}{\phi_2}$
$\vee$	$\dfrac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \qquad \dfrac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi_1)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi_1 \vee \phi_2}{\theta}$	
$\supset$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi)\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \supset \psi}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{\phi}{\psi}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi \supset \psi}{\theta}$	$\dfrac{\phi \supset \psi \qquad \phi}{\psi}$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{\theta}$	
$\top$	$\dfrac{}{\top}$	$\dfrac{\theta \qquad \top}{\theta}$	$\varnothing$
$\exists$	$\dfrac{a : A \qquad \phi(a)}{\exists(x : A)\, \phi(x)}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(x : A, \phi(x))\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \exists(x : A)\, \phi(x)}{\theta}$	
$\forall$	$\dfrac{\begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots \\ \phi(x)\end{array}}{\forall(x : A)\, \phi(x)}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{x : A}{\phi(x)}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \forall(x : A)\, \phi(x)}{\theta}$	$\dfrac{\forall(x : A)\, \phi(x) \qquad a : A}{\phi(a)}$
$=$	$\dfrac{}{a = a}$	$\dfrac{b : A \qquad \phi(a) \qquad a = b}{\phi(b)}$	

Πίνακας 1: Κανόνες φυσικής απαγωγής.

Ο καθολικός ποσοδείκτης έχει επίσης έναν ειδικό κανόνα απαλοιφής,

$$\frac{\forall(x:A)\ \phi(x) \qquad a:A}{\phi(a)}\ \forall\mathcal{S}\ ,$$

ο οποίος, όπως και στην περίπτωση της συνεπαγωγής, λαμβάνεται από τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{f:\forall(x:A)\ \phi(x) \qquad a:A}{\mathsf{apply}_f(a):\phi(a)}$$

τού μετασχηματισμού apply που ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{apply}_{\lambda(x\,:\,A)\ b(x)}(a)\ :\equiv\ b(a).$$

Και πάλι, οι δύο κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι συνεπεία τού εναλλακτικού ορισμού

$$\mathsf{rec}_{\forall(x\,:\,A)\ \phi(x)}(z,f)\ :\equiv\ z((x:A)\ \mathsf{apply}_f(x))$$

τού αναδρομέα τού καθολικού ποσοδείκτη.

Ισότητα

Ελέγχεται κατά πόσον η ισότητα είναι λογική έννοια. Ωστόσο, έχει αρκετά λογικά χαρακτηριστικά ώστε να δικαιολογείται η θέση της στο κεφάλαιο της λογικής. Μια και για την ισότητα έχουμε μιλήσει ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να περάσουμε απ᾿ ευθείας στο δια ταύτα.

Η ισότητα προς a έχει τον κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{a=a}\ {=}\mathcal{I}$$

και τον κανόνα απαλοιφής

$$\frac{b:A \qquad \phi(a) \qquad a=b}{\phi(b)}\ {=}\mathcal{E}\ ,$$

όπου η $(x:A)\ \phi(x)$ είναι οικογένεια προτάσεων.

Όλοι οι κανόνες φυσικής απαγωγής βρίσκονται συγκεντρωμένοι στον πίνακα 1.

5 Θεωρία τύπων

Η καθιερωμένη παλέτα τύπων τής MLTT περιλαμβάνει, εκτός από την ισότητα, διάφορους πεπερασμένους τύπους ($\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, κλπ.), γινόμενα $A\times B$ και αθροίσματα $A+B$ τύπων, τύπους συναρτήσεων $A\longrightarrow B$, αθροίσματα $\sum(x:A)\ B(x)$ και γινόμενα $\prod(x:A)\ B(x)$ οικογενειών, τύπους W, τον τύπο των φυσικών αριθμών, και, κατά περίπτωση, άλλους γειωμένους τύπους (τύπους λιστών κλπ.).

5.1 Ισότητα

Για την ισότητα έχουμε μιλήσει ήδη σε προηγούμενα κεφάλαια. Τώρα θα ορίσουμε πάλι την ισότητα, αυτή τη φορά ως οικογένεια ως προς αμφότερα τα σκέλη. Αυτός ο «συμμετρικός» ορισμός τής ισότητας, μολονότι είναι ισοδύναμος με τον άλλον, έχει περισσότερο τυποθεωρητικό νόημα.

Τύπος	Πρόταση
Μέλος	Τεκμήριο αλήθειας
Μετασχηματισμός	Απόδειξη
$\mathbf{0}$	$\bot$
$\mathbf{1}$	$\top$
$\times$	$\&$
$+$	$\vee$
$\to$	$\supset$
$\sum$	$\exists$
$\prod$	$\forall$
$=$	$=$

Πίνακας 2: Αντιστοιχία μεταξύ τυποθεωρητικών και λογικών εννοιών.

Έστω A τύπος. Η *ισότητα* τού A είναι η οικογένεια

$$(x, y : A)\ x =_A y$$

που έχει τον κατασκευαστή

$$(x : A)\ \mathsf{refl}_x : x =_A x,$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x : A}{\mathsf{refl}_x : x =_A x.}$$

Από λογική άποψη, ο κανόνας αυτός λέει ότι η ισότητα είναι σχέση ανακλαστική.

Η αρχή τής αναδρομής για την ισότητα έχει ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x, y : A)\ C(x, y)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ c_{\mathsf{refl}}(x) : C(x, x)$,

η σχέση

$$t(a, a, \mathsf{refl}_a)\ :\equiv c_{\mathsf{refl}}(a)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x, y : A, p : x =_A y)\ t(x, y, p) : C(x, y)$. Ο ως άνω ορισμός γράφεται, εναλλακτικά,

$$t(a, b, p)\ :\equiv \mathsf{rec}^{C}_{a=b}(c_{\mathsf{refl}}, p),$$

αξιοποιώντας τόν σχετικό αναδρομέα

$$((x : A)\ y(x) : C(x, x), a, b : A, p : a =_A b)\ \mathsf{rec}^{C}_{a=b}(y, p) : C(a, b).$$

Ο αναδρομέας αυτός έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ y(x) : C(x, x)\end{array} \qquad a, b : A \qquad p : a =_A b}{\mathsf{rec}^{C}_{a=b}(y, p) : C(a, b)}\ ,$$

ο οποίος, αναγνωσμένος λογικά, λέει ότι η ισότητα είναι η μικρότερη ανακλαστική σχέση, και ορίζεται μέσω τής αναδρομής

$$\mathsf{rec}^{C}_{a=a}(y, \mathsf{refl}_a) \ :\equiv \ y(a).$$

Η ισότητα συνοδεύεται επίσης από μία αρχή επαγωγής, η οποία λέει ότι, δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x, y : A, p : x =_A y)\ C(x, y, p)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ c_{\mathsf{refl}}(x) : C(x, x, \mathsf{refl}_x)$,

η σχέση

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) \ :\equiv \ c_{\mathsf{refl}}(x)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x, y : A, p : x =_A y)\ t(x, y, p) : C(x, y, p)$. Έχουμε έναν επαγωγέα

$$((x : A)\ y(x) : C(x, x, \mathsf{refl}_x), a, b : A, p : a =_A b)\ \mathsf{ind}^{C}_{a=b}(y, p) : C(a, b, p),$$

ο οποίος έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ y(x) : C(x, x, \mathsf{refl}_x)\end{array} \qquad a, b : A \qquad p : a =_A b}{\mathsf{ind}^{C}_{a=b}(y, p) : C(a, b)},$$

και ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}^{C}_{a=a}(y, \mathsf{refl}_a) \ :\equiv \ y(a).$$

5.2 Τύποι συναρτήσεων

Δοθέντων δύο τύπων A και B, ο τύπος $A \longrightarrow B$ των *συναρτήσεων* με πεδίο ορισμού A και πεδίο τιμών B έχει τον κατασκευαστή

$$((x : A)\ b(x) : B)\ \lambda(b) : A \longrightarrow B,$$

ή, ως κανόνας σχηματισμού,

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ b(x) : B\end{array}}{\lambda(b) : A \longrightarrow B.}$$

Η αρχή επαγωγής τού $A \longrightarrow B$ είναι ένας τρόπος ορισμού μετασχηματισμών από τον $A \longrightarrow B$ προς οικογένειες τής μορφής $(f : A \longrightarrow B)\ C(f)$: Δοθέντος ενός μετασχηματισμού

$$((x : A)\ b(x) : B)\ c_{\lambda}(b) : C(\lambda(b))$$

η σχέση

$$t(\lambda(b)) \ :\equiv \ c_{\lambda}(b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(f : A \longrightarrow B)\ t(f) : C(f)$. Ο ορισμός αυτός μπορεί να εκφραστεί και με τη βοήθεια του επαγωγέα τού $A \longrightarrow B$:

$$t(f) \ :\equiv \ \mathsf{ind}^{C}_{A \longrightarrow B}(c_{\lambda}, f).$$

Ο $\mathsf{ind}^C_{A\to B}$ έχει τη μορφή

$$(((x:A)\ y(x):B)\ z(y):C(\lambda(y)), f:A\longrightarrow B)\ \mathsf{ind}^C_{A\to B}(z,f):C(f),$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{\left(\dfrac{x:A}{y(x):B}\right) \atop z(y):C(\lambda(y)) \qquad f:A\longrightarrow B}{\mathsf{ind}^C_{A\to B}(z,f):C(f)} \quad ,$$

και ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{ind}^C_{A\to B}(z,\lambda(b)) \ :\equiv z(b).$$

Ο $\mathsf{rec}^C_{A\to B}$ είναι η ειδική περίπτωση του $\mathsf{ind}^C_{A\to B}$ κατά την οποία η οικογένεια C είναι σταθερή.

Είπαμε ότι οι δύο εκδοχές τής ισότητας που έχουμε περιγράψει είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Το επόμενο θεώρημα αφορά τη μία κατεύθυνση της ισοδυναμίας: Ο αναδρομέας τής ισότητας προς a είναι εκφράσιμος από τον αναδρομέα τής ισότητας. (Η άλλη κατεύθυνση είναι αυτόματη, αλλά δε θα μας απασχολήσει· στο εξής θα έχουμε να κάνουμε μόνο με την ισότητα.)

Θεώρημα 7. *Εάν $(x:A)\ B(x)$ οικογένεια και $p:a=_A b$, τότε υπάρχει συνάρτηση*

$$p_*:B(a)\longrightarrow B(b).$$

Απόδειξη. Η p_* θα οριστεί με αναδρομή στο p. Θεωρούμε την οικογένεια τύπων $(x,y:A)\ C(x,y)$ με

$$C(x,y) \ :\equiv B(x)\longrightarrow B(y),$$

και θέτουμε

$$(\mathsf{refl}_a)_* \ :\equiv \lambda(x:B(a))\ x. \qquad \square$$

Κατά συνέπεια, τα λήμματα 1–4, οι αποδείξεις των οποίων χρησιμοποιούν την αρχή αναδρομής τής ισότητας προς a, εξακολουθούν να ισχύουν για την ισότητα.

Η *εφαρμογή* $\mathsf{apply}_f(x)$ τής συνάρτησης f στο όρισμα x ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{apply}_{\lambda(b)}(x) \ :\equiv b(x).$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε παρατηρήσει ότι ο $\mathsf{rec}_{A\to B}$ θα μπορούσε να οριστεί μέσω τού apply. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός

$$\mathsf{rec}'_{A\to B}(z,f) \ :\equiv z(\mathsf{apply}_f)$$

ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{rec}_{A\to B}$,

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}'_{A\to B}(z,\lambda(b)) &\equiv z(\mathsf{apply}_{\lambda(b)})\\ &\equiv z(b),\end{aligned}$$

και επομένως, με ένα επιχείρημα ανάλογο με αυτό τού θεωρήματος 5, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\mathsf{rec}_{A\to B}(z,f) = z(\mathsf{apply}_f)$$

για οποιαδήποτε z και f. Η απόπειρα επέκτασης του γεγονότος αυτού στον $\mathsf{ind}_{A\to B}$ προσκρούει στο ότι υπαρχει ασυμφωνία τύπων:

$$\begin{aligned} z(\mathsf{apply}_f) &: C(\lambda(\mathsf{apply}_f)), \\ \mathsf{ind}_{A\to B}(z,f) &: C(f). \end{aligned}$$

Ο τρόπος να συσχετίσουμε αυτά τα δύο στιγμιότυπα της C μάς παρέχεται από το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 8. *Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$ υπάρχει ένα*

$$\eta_{A\to B}(f) : \lambda(\mathsf{apply}_f) = f.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην f· εάν η f είναι τής μορφής $\lambda(b)$, τότε

$$\lambda(\mathsf{apply}_{\lambda(b)}) \equiv \lambda(b)$$

(από τον ορισμό τού apply), οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$\eta_{A\to B}(\lambda(b)) \;:\equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}.$$ □

Συνοψίζοντας, έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} \mathsf{apply}_{\lambda(b)} &\equiv b, \\ \lambda(\mathsf{apply}_f) &= f. \end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόπειρα: Από το θεώρημα 7, ο $\eta_{A\to B}(f)$ επάγει μία συνάρτηση

$$(\eta_{A\to B}(f))_* : C(\lambda(\mathsf{apply}_f)) \longrightarrow C(f),$$

οπότε ορίζεται ο μετασχηματισμός

$$\mathsf{ind}'_{A\to B}(z,f) \;:\equiv \mathsf{apply}_{(\eta_{A\to B}(f))_*}(z(\mathsf{apply}_f)).$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι ο $\mathsf{ind}'_{A\to B}$ ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{A\to B}$:

$$\mathsf{ind}'_{A\to B}(z,\lambda(b)) \equiv z(b).$$

Πόρισμα 9. *Ο $\mathsf{ind}_{A\to B}$ ορίζεται από τους apply και $\eta_{A\to B}$.* □

Εξ αιτίας αυτού, η συνήθης πρακτική κατά την παρουσίαση της θεωρίας τύπων είναι ο $\mathsf{ind}_{A\to B}$ να αποσιωπάται προς χάριν των apply και $\eta_{A\to B}$. Αυτά θα χρησιμοποιούμε κι εμείς στο εξής· μάλιστα, θα υιοθετήσουμε τον καθιερωμένο στα μαθηματικά συμβολισμό και θα γράφουμε, κάπως καταχρηστικά, απλώς $f(x)$ στη θέση τού $\mathsf{apply}_f(x)$.

Έχοντας εγκαθιδρύσει αυτόν τον συμβολισμό, ο apply_f γράφεται

$$(x : A)\, f(x).$$

Οι τιμές ενός μετασχηματισμού μπορούν να είναι μέλη διαφορετικών στιγμιοτύπων μιας οικογένειας. Αυτή είναι η περίπτωση με τους μετασχηματισμούς που ορίζονται με αναδρομή στην ισότητα (και σε οποιαδήποτε άλλη οικογένεια), όπως και με τους επαγωγείς των διαφόρων τύπων. Σε έναν τέτοιο μετασχηματισμό

$(x:A)\, b(x):B(x)$ αντιστοιχεί μία συνάρτηση f με $f(x):B(x)$ για $x:A$. Οι συναρτήσεις με αυτή τη γενικότερη έννοια, οι οποίες λέγονται και «εξαρτώμενες» συναρτήσεις, συγκροτούν έναν τύπο, το *(εξαρτώμενο) γινόμενο* τής οικογένειας $(x:A)\,B(x)$, ο οποίος συμβολίζεται

$$\prod(x:A)\ B(x).$$

Ο τύπος αυτός έχει τον κατασκευαστή

$$((x:A)\ b(x):B(x))\ \lambda(b):\prod(x:A)\ B(x),$$

με κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{matrix}(x:A)\\ b(x):B(x)\end{matrix}}{\lambda(b):\ \prod(x:A)\ B(x).}$$

Είναι φανερό από την περιγραφή τού $\prod(x:A)\ B(x)$ ότι ο $A \longrightarrow B$ είναι η ειδική περίπτωση στην οποία η οικογένεια $(x:A)\ B(x)$ είναι σταθερή. Ισχύουν παρόμοια πράγματα με την περίπτωση των απλών συναρτήσεων· η αρχή τής επαγωγής, φερ΄ ειπείν, μας επιτρέπει να ορίζουμε μετασχηματισμούς τής μορφής

$$(f:\prod(x:A)\ B(x))\ t(f):C(f),$$

όπου $(f:\prod(x:A)\ B(x))\ C(f)$ οικογένεια, θέτοντας

$$t(\lambda(b))\ :\equiv c_\lambda(b)$$

για κάποιον κατάλληλο μετασχηματισμό $((x:A)\ b(x):B(x))\ c_\lambda(b):C(\lambda(b))$. Ο επαγωγέας

$$(((x:A)\ b(x):B(x))\ z(b):C(\lambda(b)), f:\prod(x:A)\ B(x))\ \mathsf{ind}^C_{\prod(x:A)\ B(x)}(z,f):C(f)$$

έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{matrix}\left(\dfrac{x:A}{b(x):B(x)}\right)\\ z(b):C(\lambda(b)) \qquad f:\prod(x:A)\ B(x)\end{matrix}}{\mathsf{ind}^C_{\prod(x:A)\ B(x)}(z,f):C(f)}\ ,$$

και την ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}^C_{\prod(x:A)\ B(x)}(z,\lambda(b))\ :\equiv z(b).$$

Η εφαρμογή συνάρτησης σε όρισμα ορίζεται όπως και στην περίπτωση των απλών συναρτήσεων, και ισχύει το ανάλογο του λήμματος 8:

Λήμμα 10. *Για οποιαδήποτε $f:\prod(x:A)\ B(x)$ υπάρχει ένα*

$$\eta_{\prod(x:A)\ B(x)}(f):\lambda(x:A)\,f(x)=f.$$

5.3 Τύποι ζευγών

Τα ζεύγη τα αποτελούμενα από ένα μέλος τού τύπου A_1 και ένα του τύπου A_2 αποτελούν έναν τύπο $A_1 \times A_2$ (το *γινόμενο* των A_1 και A_2), ο οποίος έχει τον κατασκευαστή

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ \mathsf{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2,$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x_1 : A_1 \qquad x_2 : A_2}{\mathsf{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2.}$$

Από την παραπάνω περιγραφή συνάγεται η εξής αρχή επαγωγής για τον $A_1 \times A_2$: Δοθέντων μιας οικογένειας

$$(x : A_1 \times A_2)\ C(x)$$

και ενός μετασχηματισμού

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)),$$

μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : A_1 \times A_2)\ t(x) : C(x)$ θέτοντας

$$t(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a_1, a_2).$$

Από την αρχή επαγωγής λαμβάνεται ο επαγωγέας

$$((x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ z(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)), x : A_1 \times A_2)\ \mathsf{ind}^C_{A_1 \times A_2}(z, x) : C(x),$$

με κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{matrix}(x_1 : A_1, x_2 : A_2) & \\ z(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) & \quad x : A_1 \times A_2\end{matrix}}{\mathsf{ind}^C_{A_1 \times A_2}(z, x) : C(x)}$$

και ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}^C_{A_1 \times A_2}(z, \mathsf{pair}(a_1, a_2)) :\equiv z(a_1, a_2).$$

Οι προβολές ορίζονται από τις αναδρομές

$$\mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) :\equiv a_1,$$
$$\mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) :\equiv a_2.$$

Όπως συνέβη και με τους τύπους συναρτήσεων, προκειμένου να πάρουμε πίσω τον $\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}$ από τις pr_1 και pr_2 χρειαζόμαστε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο έχει και ανεξάρτητη χρησιμότητα.

Λήμμα 11. *Για οποιοδήποτε ζεύγος $x : A_1 \times A_2$, υπάρχει ένα*

$$\eta_{A_1 \times A_2}(x) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο x, θέτοντας

$$\eta_{A_1 \times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}.$$

□

Άσκηση 5.1. Ορίστε, με τη βοήθεια των pr_i και $\eta_{A_1\times A_2}$, έναν μετασχηματισμό ο οποίος ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{A_1\times A_2}$.

Έχουμε, επίσης, τον τύπο $\mathbf{1}$ με ένα μέλος, ο οποίος έχει τον κατασκευαστή

$$0_{\mathbf{1}} : \mathbf{1},$$

και του οποίου ο επαγωγέας

$$(z : C(0_{\mathbf{1}}), x : \mathbf{1})\ \mathsf{ind}_{\mathbf{1}}^{C}(z, x) : C(x),$$

ο οποίος ορίζεται από την επαγωγή

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}^{C}(z, 0_{\mathbf{1}})\ :\equiv z,$$

είναι κατάτι χρησιμότερος από τον αναδρομέα του.

Άσκηση 5.2. Για οποιοδήποτε $x : \mathbf{1}$, υπάρχει ένα

$$\eta_{\mathbf{1}}(x) : 0_{\mathbf{1}} = x.$$

Λύση. Μπορούμε να γράψουμε απ᾽ ευθείας ένα μέλος τού τύπου $0_{\mathbf{1}} = x$:

$$\eta_{\mathbf{1}}(x)\ :\equiv \mathsf{ind}_{\mathbf{1}}^{(x\,:\,\mathbf{1})\ 0_{\mathbf{1}}=x}(\mathsf{refl}_{0_{\mathbf{1}}}, x) : 0_{\mathbf{1}} = x. \qquad \square$$

Άσκηση 5.3. Δοθείσης τής $\eta_{\mathbf{1}} : \prod(x : \mathbf{1})\, 0_{\mathbf{1}} = x$, μπορούμε να ορίσουμε τον $\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}$ μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(z, x)\ :\equiv (\eta_{\mathbf{1}}(x))_*(z).$$

Δείξτε ότι ο έτσι ορισμένος $\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}$ ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού επαγωγέα τού $\mathbf{1}$.

Εάν έχουμε μία οικογένεια $(x : A)\ B(x)$, μπορούμε επίσης να σχηματίζουμε ζεύγη $\mathsf{pair}(a, b)$ με $a : A$ και $b : B(a)$. Αυτά τα ζεύγη, τα οποία ενίοτε καλούνται *εξαρτώμενα* ζεύγη, συγκροτούν έναν τύπο $\sum(x : A)\, B(x)$, το *(εξαρτώμενο) άθροισμα* της $(x : A)\, B(x)$, με κατασκευαστή

$$(x : A, y : B(x))\ \mathsf{pair}(x, y) : \textstyle\sum(x : A)\ B(x),$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x : A \qquad y : B(x)}{\mathsf{pair}(x, y) : \sum(x : A)\ B(x).}$$

Φυσικά, εάν η $(x : A)\ B(x)$ είναι σταθερή, αυτό που περιγράψαμε είναι το γινόμενο $A \times B$.

Έχουμε μία αρχή επαγωγής, που λέει ότι δοθέντων μιας οικογένειας

$$(y : \textstyle\sum(x : A)\ B(x))\ C(y)$$

και ενός μετασχηματισμού

$$(x : A, y : B(x))\ c_{\mathsf{pair}}(x, y) : C(\mathsf{pair}(x, y)),$$

η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(a, b))\ :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a, b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό

$$(y : \sum(x : A)\ B(x))\ t(y) : C(y).$$

Ορίζεται, επομένως, ένας επαγωγέας

$$((x : A, y : B(x))\ z(x, y) : C(\mathsf{pair}(x, y)), w : \sum(x : A)\ B(x))\ \mathsf{ind}^{C}_{\sum(x : A)\ B(x)}(z, w) : C(w),$$

ο οποίος έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A, y : B(x))\\ z(x, y) : C(\mathsf{pair}(x, y))\end{array} \qquad w : \sum(x : A)\ B(x)}{\mathsf{ind}^{C}_{\sum(x : A)\ B(x)}(z, x) : C(x)},$$

και ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{ind}^{C}_{\sum(x : A)\ B(x)}(z, \mathsf{pair}(a, b)) \ :\equiv\ z(a, b).$$

Ο $\mathsf{ind}_{\sum(x : A)\ B(x)}$ μπορεί και εδώ να εκφραστεί μέσω των προβολών, δυνάμει τού επόμενου λήμματος.

Λήμμα 12. *Για οποιοδήποτε $y : \sum(x : A)\ B(x)$, υπάρχει ένα*

$$\eta_{\sum(x : A)\ B(x)}(y) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(y), \mathsf{pr}_2(y)) = y.$$

Απόδειξη. Όπως στο λήμμα 11. □

5.4 Αθροίσματα

Το *άθροισμα* $A_1 + A_2$ δύο τύπων A_1 και A_2 είναι το τυποθεωρητικό ανάλογο της ξένης ένωσης στη θεωρία συνόλων, του συν-γινομένου στη θεωρία κατηγοριών και της διάζευξης στη λογική. Έχει δύο κατασκευαστές

$$\begin{aligned}(x_1 : A_1)\ \mathsf{in}_1(x_1) &: A_1 + A_2,\\ (x_2 : A_2)\ \mathsf{in}_2(x_2) &: A_1 + A_2,\end{aligned}$$

με κανόνες σχηματισμού

$$\frac{a_1 : A_1}{\mathsf{in}_1(a_1) : A_1 \vee A_2} \qquad \frac{a_2 : A_2}{\mathsf{in}_2(a_2) : A_1 \vee A_2}\ .$$

Η αρχή τής επαγωγής για τον $A_1 + A_2$ είναι ο ορισμός με διάκριση περιπτώσεων: Δοθέντων μιας οικογένειας

$$(x : A_1 + A_2)\ C(x)$$

και μετασχηματισμών

$$\begin{aligned}(x_1 : A_1)\ c_{\mathsf{in}_1}(x) &: C(\mathsf{in}_1(x)),\\ (x_2 : A_2)\ c_{\mathsf{in}_2}(x) &: C(\mathsf{in}_2(x)),\end{aligned}$$

μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : A_1 + A_2)\ t(x) : C(x)$ θέτοντας

$$\begin{aligned}t(\mathsf{in}_1(a_1)) &:\equiv c_{\mathsf{in}_1}(a_1),\\ t(\mathsf{in}_2(a_2)) &:\equiv c_{\mathsf{in}_2}(a_2).\end{aligned}$$

Ο αναδρομέας

$$((x_1 : A_1)\, z_1(x_1) : C(\mathsf{in}_1(x_1)), (x_2 : A_2)\, z_2(x_2) : C(\mathsf{in}_2(x_2)), x : A_1 + A_2)\, \mathsf{ind}^C_{A_1+A_2}(z_1, z_2, x) : C(x)$$

τού $A_1 + A_2$ έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x_1 : A_1)\\ z_1(x_1) : C(\mathsf{in}_1(x_1))\end{array} \qquad \begin{array}{c}(x_2 : A_2)\\ z_2(x_2) : C(\mathsf{in}_2(x_2))\end{array} \qquad x : A_1 + A_2}{\mathsf{ind}^C_{A_1+A_2}(z_1, z_2, x) : C(x)}$$

και ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathsf{ind}^C_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_1(a_1)) &:\equiv z_1(a_1),\\ \mathsf{ind}^C_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_2(a_2)) &:\equiv z_2(a_2).\end{aligned}$$

Παρατήρηση. Η αλληλεπίδραση του αθροίσματος με ενδεχόμενες εξαρτήσεις θέτει την ακόλουθη πρόκληση: Ας θεωρήσουμε δύο οικογένειες $(x : A_1 + A_2)\; B(x)$ και $(x : A_1 + A_2)\; C(x)$, και δύο μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned}&(x_1 : A_1, y : B(\mathsf{in}_1(x_1)))\; c_1(x_1, y) : C(\mathsf{in}_1(x_1)),\\ &(x_2 : A_2, y : B(\mathsf{in}_2(x_2)))\; c_2(x_2, y) : C(\mathsf{in}_2(x_2)),\end{aligned}$$

και ας υποθέσουμε ότι αποπειρώμαστε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό

$$(x : A_1 + A_2, y : B(x))\; c(x, y) : C(x)$$

με επαγωγή στο πρώτο όρισμα:

$$\begin{aligned}c(\mathsf{in}_1(x_1), y) &:\equiv c_1(x_1, y),\\ c(\mathsf{in}_2(x_2), y) &:\equiv c_2(x_2, y).\end{aligned}$$

Εάν αντί για την αρχή τής επαγωγής τού $A_1 + A_2$ επιλέγαμε να χρησιμοποιήσουμε τον $\mathsf{ind}_{A_1+A_2}$, θα καταλήγαμε σε μία έκφραση της μορφής

$$\mathsf{ind}_{A_1+A_2}((x_1 : A_1)\; c_1(x_1, y), (x_2 : A_2)\; c_2(x_2, y), x).$$

Το πρόβλημα με αυτή την έκφραση είναι ότι οι μετασχηματισμοί $(x_i : A_i)\; c_i(x_i, y)$ δεν είναι καλά σχηματισμένοι, διότι το y εξαρτάται από το x_i και επομένως δε μπορεί να λειτουργήσει ως ανεξάρτητη παράμετρος. Η κατάσταση είναι ανάλογη με την περίπτωση της πολλαπλής αναδρομής. Η λύση, όπως και εκεί, είναι να εννοήσουμε τα ορίσματα του $\mathsf{ind}_{A_1+A_2}$ ως μετασχηματισμούς, οι τιμές των οποίων δύνανται να είναι με τη σειρά τους μετασχηματισμοί. Έχοντας κάνει αυτή τη συμφωνία μπορούμε να γράψουμε

$$c(x, y) :\equiv \mathsf{ind}_{A_1+A_2}((x_1 : A_1)\; d_1(x_1), (x_2 : A_2)\; d_2(x_2), x)(y),$$

όπου

$$\begin{aligned}d_1(x_1) &:\equiv (y : B(\mathsf{in}_1(x_1)))\; c_1(x_1, y),\\ d_2(x_2) &:\equiv (y : B(\mathsf{in}_2(x_2)))\; c_2(x_2, y).\end{aligned}$$

Φυσικά, μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις, εφ᾽ όσον τις έχουμε.

Υπάρχει επίσης ένας τύπος $\mathbf{0}$ που δεν έχει κατασκευαστές (και επομένως δεν έχει μέλη), η αρχή επαγωγής τού οποίου δίνει, για οποιαδήποτε οικογένεια

$$(x : \mathbf{0})\ C(x)$$

έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathbf{0})\ t(x) : C(x)$$

χωρίς ορίζουσες σχέσεις (μια και δεν υπάρχει τίποτα στο οποίο να μπορεί να οριστεί). Αυτός ο μετασχηματισμός είναι και ο επαγωγέας

$$(x : \mathbf{0})\ \mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}(x) : C(x)$$

τού $\mathbf{0}$· ο κανόνας σχηματισμού τού $\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}$ έχει τη μορφή

$$\frac{x : \mathbf{0}}{\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}(x) : C(x)}\ .$$

Παρατήρηση. Εφ᾽ όσον ο $\mathbf{0}$ δεν έχει μέλη, το αντίστοιχο λήμμα η είναι τετριμμένο: Για οποιοδήποτε $x : \mathbf{0}$, υπάρχει ένα $\eta_{\mathbf{0}}(x) : \mathbf{0}$. Αυτό, με τη σειρά του, σημαίνει ότι ο $\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}$ μπορεί να οριστεί από τον $\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}$. Πράγματι,

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}(x) \ :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}^{C(x)}(x).$$

Ο τυπικός τρόπος για να δείξει κανείς ότι ένας τύπος A δεν έχει μέλη είναι να ορίσει έναν μετασχηματισμό

$$(x : A)\ t(x) : \mathbf{0}$$

(ή, ισοδύναμα, μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbf{0}$). Η ύπαρξη ενός τέτοιου μετασχηματισμού σημαίνει ότι εάν ο A είχε ένα μέλος a, τότε ο $\mathbf{0}$ θα είχε το μέλος $t(a)$.

Άσκηση 5.4. Έστω E ο τύπος που έχει ως μοναδικό κατασκευαστή τον

$$(x : E)\ e(x) : E.$$

Δείξτε ότι ο E δεν έχει μέλη. [Υπόδειξη: Διατυπώστε πρώτα την αρχή αναδρομής τού E.]

5.5 Ο τύπος Bool

Ο Bool έχει δύο κατασκευαστές,

$$\mathsf{false}, \mathsf{true} : \mathrm{Bool}.$$

Ο Bool θα μπορούσε επίσης να οριστεί ως ο $\mathbf{1} + \mathbf{1}$, αλλά είναι χρήσιμο να τον έχουμε περιγράψει ανεξάρτητα. Αντιστρόφως, μπορούμε να ορίσουμε διμελή αθροίσματα από το $\sum$ και τον Bool (άσκηση 5.11).

Δοθέντων μιας οικογένειας $(x : \mathrm{Bool})\,C(x)$, ενός $c_{\mathsf{false}} : C(\mathsf{false})$ και ενός $c_{\mathsf{true}} : C(\mathsf{true})$, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Bool})\ t(x) : C(x)$ θέτοντας

$$t(\mathsf{false}) \ :\equiv c_{\mathsf{false}},$$
$$t(\mathsf{true}) \ :\equiv c_{\mathsf{true}}.$$

Αυτή η αρχή επαγωγής πακετάρεται στον επαγωγέα

$$(x : C(\mathsf{false}), y : C(\mathsf{true}), z : \mathrm{Bool})\ \mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(x, y, z) : C(z),$$

τού Bool, με *κανόνα σχηματισμού*

$$\frac{x : C(\mathsf{false}) \qquad y : C(\mathsf{true}) \qquad z : \mathrm{Bool}}{\mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(x, y, z) : C(z)},$$

και *ορίζουσες σχέσεις*

$$\begin{aligned} \mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{false}) &:\equiv x, \\ \mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{true}) &:\equiv y. \end{aligned}$$

5.6 Ασκήσεις

Άσκηση 5.5. Περιγράψτε μία συνάρτηση

$$f : ((A_1 \longrightarrow C) \times (A_2 \longrightarrow C)) \longrightarrow ((A_1 + A_2) \longrightarrow C).$$

Άσκηση 5.6. Περιγράψτε μία συνάρτηση

$$f : \prod(x : A_1 + A_2) \Big(\big(\sum(x_1 : A_1)\ \mathsf{in}_1(x_1) = x\big) + \big(\sum(x_2 : A_2)\ \mathsf{in}_2(x_2) = x\big) \Big).$$

Άσκηση 5.7. Ορίστε μία συνάρτηση

$$f : \big(\sum(x : \mathbf{1})\ A(x)\big) \longrightarrow A(0_{\mathbf{1}})$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(\mathsf{pair}(0_{\mathbf{1}}, a)) \equiv a.$$

Άσκηση 5.8. Χρησιμοποιήστε τόν $\mathsf{ind}_{\mathrm{Bool}}$ για να ορίσετε μία συνάρτηση

$$f : \prod(x : \mathrm{Bool})\ (\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x).$$

Λύση. Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης από τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, αλλά εδώ μας ζητείται να την ορίσουμε απ΄ ευθείας. Θεωρούμε την οικογένεια $(x : \mathrm{Bool})\ C(x)$ με $C(x) :\equiv (\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x)$, και τα

$$\begin{aligned} c_{\mathsf{false}} &:\equiv \mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}}) : C(\mathsf{false}), \\ c_{\mathsf{true}} &:\equiv \mathsf{in}_2(\mathsf{refl}_{\mathsf{true}}) : C(\mathsf{true}), \end{aligned}$$

με τη βοήθεια των οποίων σχηματίζεται η συνάρτηση

$$\lambda(x : \mathrm{Bool})\ \mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, x).$$ □

Άσκηση 5.9. Δοθείσης μιας $f : \prod(x : \mathrm{Bool})(\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x)$, ορίστε τόν $\mathsf{ind}_{\mathrm{Bool}}$.

Άσκηση 5.10 ([4, Άσκηση 1.4])**.** Μία ειδική περίπτωση του ορισμού με αναδρομή στον Nat είναι ο ορισμός με *επανάληψη* (iteration):

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv c_{\mathsf{s}}(t(n)), \end{aligned}$$

όπου C τύπος, $c_0 : C$ και $(x : C)\ c_\mathsf{s}(x) : C$. Αυτοί οι ορισμοί μπορούν, εναλλακτικά, να εκφραστούν με τη βοήθεια του *iterator* τού Nat, ο οποίος ορίζεται από την επανάληψη

$$\begin{aligned}\mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}(c_0, c_\mathsf{s}, 0) &:\equiv c_0,\\ \mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}(c_0, c_\mathsf{s}, \mathsf{s}(n)) &:\equiv c_\mathsf{s}(\mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}(c_0, c_\mathsf{s}, n)).\end{aligned}$$

Δοθέντων ενός τύπου C, ενός μέλους c_0 τού C, και ενός μετασχηματισμού $(x : \mathrm{Nat}, y : C)\ c_\mathsf{s}(x, y) : C$ ορίστε, χρησιμοποιώντας τόν $\mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}$ αντί τού $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}$, έναν μετασχηματισμό $(n : \mathrm{Nat})\ r(n) : C$ ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned}r(0) &= c_0,\\ r(\mathsf{s}(n)) &= c_\mathsf{s}(n, r(n)),\end{aligned}$$

και συμπεράνετε ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n, $r(n) = \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(c_0, c_\mathsf{s}, n)$. [Υπόδειξη: Πρώτα χρησιμοποιήστε τόν $\mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}$ για να ορίσετε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat} \times C)\ t(x) : \mathrm{Nat} \times C$, και εν συνεχεία εφαρμόστε ζεύγη και προβολές για να πάρετε τον r. Για τη δεύτερη ισότητα, κάντε επαγωγή στο n. Τέλος, χρησιμοποιήστε τό θεώρημα 5.]

Άσκηση 5.11 ([4, Άσκηση 1.5])**.** *Εάν η $(x : \mathrm{Bool})\ A(x)$ είναι οικογένεια, δείξτε ότι ο τύπος $\sum(x : \mathrm{Bool})\ A(x)$ συμπεριφέρεται ως το άθροισμα των $A(\mathsf{false})$ και $A(\mathsf{true})$: Ορίστε μετασχηματισμούς in_1, in_2 και ind, και επαληθεύστε τις σχετικές ιδότητες.*

Άσκηση 5.12 ([4, Άσκηση 1.6])**.** *Εάν η $(x : \mathrm{Bool})\ A(x)$ είναι οικογένεια, ορίστε κατάλληλους μετασχηματισμούς*

$$(x_\mathsf{false} : A(\mathsf{false}), x_\mathsf{true} : A(\mathsf{true}))\ \mathsf{pair}(x_\mathsf{false}, x_\mathsf{true}) : \prod(x : \mathrm{Bool})\ A(x),$$

και

$$\begin{aligned}&(y : \prod(x : \mathrm{Bool})\ A(x))\ \mathsf{pr}_1(y) : A(\mathsf{false}),\\ &(y : \prod(x : \mathrm{Bool})\ A(x))\ \mathsf{pr}_2(y) : A(\mathsf{true}),\end{aligned}$$

και επαληθεύστε ότι ικανοποιούν τις προβλεπόμενες ορίζουσες σχέσεις.

Αναφορές

[1] Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, Academic Press, New York, 1967.

[2] Per Martin-Löf, *On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws*, Nordic journal of philosophical logic **1** (1996), no. 1, 11–60.

[3] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Aurora: Dover Modern Math Originals, Dover Publications, 2017. Downloadable from `http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf` and from `https://web.math.rochester.edu/people/faculty/doug/otherpapers/Riehl-CTC.pdf`.

[4] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, `https://homotopytypetheory.org/book/`. Institute for Advanced Study, 2013.