Θεωρία τύπων τού Martin-Löf

Σημειώσεις παραδόσεων

Νίκος Ρήγας

Έκδοση 2021-01-16

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

2 Τύποι και αναδρομή

2.1 Οι φυσικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί παράγονται από το επαγωγικό σχήμα

1. το μηδέν είναι φυσικός αριθμός, και
2. ο επόμενος καθενός φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός.

Αυτή η επαγωγική περιγραφή προσδιορίζει τον τύπο Nat των φυσικών αριθμών. Γενικά, ένας *τύπος* προσδιορίζεται από ένα επαγωγικό σχήμα αποτελούμενο από μηδέν ή περισσότερες διαδικασίες κατασκευής, καθεμιά από τις οποίες ονομάζεται *ρήτρα* (clause) του επαγωγικού σχήματος ή *κατασκευαστής* (constructor) του αντίστοιχου τύπου. Καθετί που κατασκευάζεται με τη βοήθεια των κατασκευαστών ενός τύπου ονομάζεται *μέλος* (member) αυτού του τύπου. (Κάποιοι άλλοι όροι για μέλος είναι *στοιχείο* (element), *κάτοικος* (inhabitant) και *σημείο* (point) ενός τύπου). Οι τύποι συμβολίζονται με κεφαλαία λατινικά γράμματα $A, B, C, \ldots$, και τα μέλη τους με μικρά λατινικά γράμματα $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Για να δηλώσουμε ότι το a είναι μέλος τού τύπου A γράφουμε $a : A$.

Με αυτόν τον τυποθεωρητικό συμβολισμό, η παραπάνω επαγωγική περιγραφή των φυσικών αριθμών παίρνει τη μορφή

1. $\mathsf{0} : \mathrm{Nat}$,
2. εάν $n : \mathrm{Nat}$, τότε $\mathsf{s}(n) : \mathrm{Nat}$.

Επομένως, ο τύπος Nat έχει δύο κατασκευαστές, τον 0, που δεν έχει ορίσματα, και τον s, ο οποίος έχει ένα όρισμα που είναι με τη σειρά του μέλος τού Nat (οπότε είναι αναδρομικός κατασκευαστής). Αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι τα μέλη τού Nat είναι τα

$$\mathsf{0},\ \mathsf{s}(\mathsf{0}),\ \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})),\ \ldots,$$

τα οποία καλούμε 0, 1, 2 και λοιπά.

Ένα μέλος ενός τύπου A ενδέχεται να εξαρτάται παραμετρικά από ένα μέλος τού τύπου A' (οπότε δεν πρόκειται, αυστηρά μιλώντας, για ένα μέλος, αλλά για μία οικογένεια μελών τού A δεδειγμένη (indexed) από τον A', ή, στην ορολογία που θα υιοθετήσουμε, για έναν *μετασχηματισμό* μελών τού A' σε μέλη τού A)· γι΄ αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$(x : A')\ t(x) : A,$$

ή και $(x : A')\ t(x)$ εάν δε συντρέχει λόγος αναφοράς στον A. (Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε τον A από τη μορφή τού $t(x)$.) Ομοίως, η έκφραση

$$(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)\ t(x_1, \dots, x_n) : A$$

συμβολίζει έναν μετασχηματισμό με n το πλήθος ορίσματα. (Ένας μετασχηματισμός $()\ t() : A$ με μηδέν το πλήθος ορίσματα δεν είναι παρά ένα μέλος τού A.) Επειδή στην πράξη αυτός ο συμβολισμός των μετασχηματισμών καταντάει δύσχρηστος, θα εκμεταλλευόμαστε κάθε ευκαιρία που μας δίνεται για να γράφουμε απλώς t στη θέση τού $(x : A)\ t(x)$, και το ίδιο για άλλες περιπτώσεις μετασχηματισμών, έχοντας πάντοτε κατά νου ότι πρόκειται για κατάχρηση.

Τα ορίσματα ενός μετασχηματισμού μπορεί να είναι τα ίδια μετασχηματισμοί· αυτό αποτυπώνεται σε εκφράσεις όπως

$$(x : A, (y : B)\ z(y) : C)\ d(x, z) : D,$$

όπου ο σημαινόμενος μετασχηματισμός έχει δύο ορίσματα, εκ των οποίων το ένα είναι μέλος τού A και το άλλο είναι μετασχηματισμός μελών τού B σε μέλη τού C.

2.2 Αναδρομή στούς φυσικούς αριθμούς

Οι κύριες χρησιμότητες της επαγωγικής περιγραφής ενός τύπου είναι η διατύπωση ορισμών με αναδρομή και αποδείξεων με επαγωγή. Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση της αναδρομής· για την επαγωγή θα είμαστε σε θέση να μιλήσουμε μόλις εμπλουτίσουμε τη γλώσσα με οικογένειες τύπων.

Έστω C τυχών τύπος. Δοθέντων ενός $c_0 : C$ και ενός $(x : \mathrm{Nat}, y : C)\ c_{\mathsf{s}}(x, y) : C$ μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat})\ t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv c_{\mathsf{s}}(n, t(n)). \end{aligned}$$

Λέμε ότι ο t ορίζεται με *αναδρομή* (recursion) από τα c_0 και c_{s}· η δυνατότητα διατύπωσης τέτοιων ορισμών είναι η *αρχή τής αναδρομής για τον* Nat.

Ως πρώτο παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής αναδρομής, ας ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat})\ \mathsf{pred}(x) : \mathrm{Nat}$ που στέλνει το μηδέν στο μηδέν και καθέναν άλλο φυσικό αριθμό στον προηγούμενό του: Στην περίπτωση αυτή, ο τύπος C είναι ο Nat (ο μόνος τύπος που έχουμε αυτή τη στιγμή), και οι ορίζουσες σχέσεις έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathsf{pred}(0) &:\equiv 0, \\ \mathsf{pred}(\mathsf{s}(n)) &:\equiv n. \end{aligned}$$

Πρόκειται δηλαδή για το στιγμιότυπο του γενικού σχήματος τής αναδρομής όπου το c_0 είναι το $\mathsf{0}$ και το $c_{\mathsf{s}}(x, y)$ είναι το x.

Μπορούμε επίσης να ορίζουμε μετασχηματισμούς που έχουν περισσότερα από ένα ορίσματα, κάνοντας αναδρομή σε ένα από αυτά. Τέτοια περίπτωση είναι η πρόσθεση φυσικών αριθμών, την οποία θα ορίσουμε με αναδρομή στον δεξιό προσθετέο, αφήνοντας τον αριστερό να υπάρχει ως παράμετρος:

$$\begin{aligned} m + \mathsf{0} &:\equiv m, \\ m + \mathsf{s}(n) &:\equiv \mathsf{s}(m + n). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι το $m + n$ ορίζεται με αναδρομή από τα m και $(x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(y)$.

Ενίοτε δε θέλουμε να δώσουμε όνομα στον μετασχηματισμό που ορίζεται με αναδρομή· αυτό συμβαίνει π.χ. εάν θέλουμε να τον αποτιμήσουμε αμέσως ή όταν εμφανίζεται ως όρισμα κάποιου άλλου μετασχηματισμού. Επίσης, για τη μεταμαθηματική μελέτη τής θεωρίας τύπων είναι απαραίτητο να μπορούμε να διατυπώσουμε την αρχή τής αναδρομής με τρόπο που να μην προϋποθέτει την προσθήκη στη γλώσσα ενός συμβόλου για κάθε ορίσιμο μετασχηματισμό. Αυτό το επιτυγχάνουμε υποκαθιστώντας τήν αρχή τής αναδρομής με το ένα και μοναδικό στιγμιότυπό της στο οποίο τα ίδια τα c_0 και c_{s} έχουν περάσει μέσα στον συμβολισμό ως ορίσματα. Ορίζουμε λοιπόν τον *αναδρομέα (recursor)*

$$(z : C, (x : \mathrm{Nat}, y : C)\ w(x, y) : C, n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, n) : C$$

τού Nat μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, \mathsf{0}) &:\equiv z, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, \mathsf{s}(n)) &:\equiv w(n, \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, n)). \end{aligned}$$

Ο κύριος ρόλος τού αναδρομέα είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφραστεί κάθε αναδρομικός ορισμός. Ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού, λόγου χάριν, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\mathsf{pred}(n) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(\mathsf{0}, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ x, n),$$

ενώ το άθροισμα δύο φυσικών αριθμών,

$$m + n :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(m, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(y), n).$$

Άσκηση 2.1. Έχοντας την πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} m \cdot \mathsf{0} &:\equiv \mathsf{0}, \\ m \cdot \mathsf{s}(n) &:\equiv m \cdot n + m. \end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \cdot n$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού Nat. Προαιρετικά, συνεχίστε με τα m^n και $n!$.

2.3 Άλλα παραδείγματα τύπων

Λίστες

Οι λίστες μελών ενός τύπου A συγκροτούν έναν τύπο $\mathrm{List}(A)$, ο οποίος περιγράφεται από το επαγωγικό σχήμα

1. $\mathsf{nil}_A : \mathrm{List}(A)$, και

2. εάν $l : \mathrm{List}(A)$ και $a : A$, τότε $\mathsf{cons}_A(l, a) : \mathrm{List}(A)$,

όπου nil_A είναι η κενή λίστα και $\mathsf{cons}_A(l, a)$ είναι η προέκταση της l με την προσθήκη τού a. Στην πράξη, τα subscripts θα παραλείπονται όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με το ποιος είναι ο A.

Ο $\mathrm{List}(A)$ είναι παράδειγμα τύπου που εξαρτάται παραμετρικά από έναν προϋπάρχοντα τύπο. Όπως και στην περίπτωση του Nat, τα μέλη του παράγονται από μία διαδικασία προέκτασης· θα δούμε αργότερα ότι ο Nat είναι ειδική περίπτωση (spoiler: Πάρτε για A τον τύπο με ένα μέλος).

Η αρχή τής αναδρομής για τον $\mathrm{List}(A)$ έχει ως εξής: Εάν C είναι ένας οποιοσδήποτε τύπος, και μας έχουν δοθεί ένα $c_{\mathsf{nil}} : C$ και ένας μετασχηματισμός $(x : \mathrm{List}(A), y : A, z : C)\ c_{\mathsf{cons}}(x, y, z) : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{nil}) &:\equiv c_{\mathsf{nil}}, \\ t(\mathsf{cons}(l, a)) &:\equiv c_{\mathsf{cons}}(l, a, t(l)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{List}(A))\ t(x) : C$. Για παράδειγμα, το μήκος $\mathsf{len}(l)$ μιας λίστας l ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &:\equiv 0, \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(l, a)) &:\equiv \mathsf{s}(\mathsf{len}(l)), \end{aligned}$$

ενώ η συνένωση $k + l$ δύο λιστών k, l,

$$\begin{aligned} k + \mathsf{nil} &:\equiv k, \\ k + \mathsf{cons}(l, a) &:\equiv \mathsf{cons}(k + l, a). \end{aligned}$$

Όπως κάναμε και με τους φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να «πακετάρουμε» την αρχή τής αναδρομής τού $\mathrm{List}(A)$ σε έναν αναδρομέα

$$(v : C, (x : \mathrm{List}(A), y : A, z : C)\ w(x, y, z) : C, l : \mathrm{List}(A))\ \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, l) : C$$

οριζόμενο από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, \mathsf{nil}) &:\equiv v, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, \mathsf{cons}(l, a)) &:\equiv w(l, a, \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, l)), \end{aligned}$$

οπότε το μήκος μιας λίστας μπορεί εναλλακτικά να οριστεί ως

$$\mathsf{len}(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(0, (x : \mathrm{List}(A), y : A, z : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(z), l),$$

και η συνένωση δύο λιστών,

$$k + l :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(k, (x : \mathrm{List}(A), y : A, z : \mathrm{List}(A))\ \mathsf{cons}(z, y), l).$$

Άσκηση 2.2. Η συνένωση $\mathsf{cat}(L) : \mathrm{List}(A)$ μιας λίστας $L : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$ λιστών μελών ενός τύπου A έχει τον αναδρομικό ορισμό

$$\begin{aligned} \mathsf{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)}) &:\equiv \mathsf{nil}_A, \\ \mathsf{cat}(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(L, l)) &:\equiv \mathsf{cat}(L) + l. \end{aligned}$$

Γράψτε τό $\mathsf{cat}(L)$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού $\mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$.

Δέντρα

Ο τύπος BTree των δυαδικών δέντρων συλλαμβάνεται από το επαγωγικό σχήμα

1. $\mathsf{triv} : \mathrm{BTree}$,
2. εάν $r : \mathrm{BTree}$ και $s : \mathrm{BTree}$, τότε $\mathsf{join}(r, s) : \mathrm{BTree}$.

Στον BTree αντιστοιχεί η εξής αρχή αναδρομής: Δοθέντων ενός $c_{\mathsf{triv}} : C$ και ενός $(x{:}\mathrm{BTree}, y{:}\mathrm{BTree}, z{:}C, w{:}C)c_{\mathsf{join}}(x, y, z, w){:}C$, όπου C είναι τυχών τύπος, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{BTree})\ t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}) &:\equiv c_{\mathsf{triv}}, \\ t(\mathsf{join}(r, s)) &:\equiv c_{\mathsf{join}}(r, s, t(r), t(s)). \end{aligned}$$

Άσκηση 2.3. Περιγράψτε τή μορφή τού $\mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}$ και διατυπώστε τις ορίζουσες σχέσεις του.

Τα δυαδικά δέντρα είναι ειδική περίπτωση δέντρων δεδομένης διακλάδωσης. Ο τύπος $\mathrm{Tree}(A)$ των δέντρων με τύπο διακλάδωσης A ορίζεται από το επαγωγικό σχήμα

1. $\mathsf{triv}_A : \mathrm{Tree}(A)$,
2. εάν $(x : A)\ b(x) : \mathrm{Tree}(A)$, τότε $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x) : \mathrm{Tree}(A)$.

Σχηματικά, αυτό που λέει η δεύτερη ρήτρα είναι ότι εάν έχουμε ένα δέντρο $b(x)$ για κάθε $x : A$, μπορούμε να ενώσουμε αυτά τα δέντρα με μία καινούργια ρίζα και να φτιάξουμε ένα μεγάλο δέντρο $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x)$, το οποίο περιέχει όλα τα $b(x)$ ως άμεσα υποδέντρα. Για να επεκτείνουμε τον ορισμό ενός μετασχηματισμού t στο $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x)$, έχοντας ήδη διαθέσιμα τα $t(b(x))$ για $x : A$, χρειαζόμαστε έναν μετασχηματισμό

$$((x : A)\ y(x) : \mathrm{Tree}(A), (x : A)\ z(x) : C)\ c_{\mathsf{join}}(y, z) : C$$

οπότε, μαζί με ένα $c_{\mathsf{triv}} : C$ μπορούμε να ορίσουμε τον t θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}_A) &:\equiv c_{\mathsf{triv}}, \\ t(\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x)) &:\equiv c_{\mathsf{join}}((x : A)\ b(x), (x : A)\ t(b(x))). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο τύπος A εμφανίζεται αρνητικά στον κατασκευαστή join_A, οπότε αναμένεται ότι το $\mathrm{Tree}(A)$ συναρτάται ανταλλοίωτα με το A. Πράγματι, ένας μετασχηματισμός

$$(x : B)\ u(x) : A$$

επάγει έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathrm{Tree}(A))\ \mathrm{Tree}(u)(x) : \mathrm{Tree}(B)$$

με ορισμό

$$\begin{aligned} \mathrm{Tree}(u)(\mathsf{triv}_A) &:\equiv \mathsf{triv}_B, \\ \mathrm{Tree}(u)(\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x)) &:\equiv \mathsf{join}_B(y : B)\ \mathrm{Tree}(u)(b(u(y))). \end{aligned}$$

Άσκηση 2.4. Περιγράψτε τόν αναδρομέα τού $\mathrm{Tree}(A)$, και εκφράστε τόν $\mathrm{Tree}(u)$ με τη βοήθειά του.

Άσκηση 2.5. Στον ορισμό τού $\mathrm{List}(A)$, ο τύπος A εμφανίζεται θετικά. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ u(x) : B$, ορίστε, χρησιμοποιώντας τήν αρχή τής αναδρομής ή τον αναδρομέα τού $\mathrm{List}(A)$, τον μετασχηματισμό $(x : \mathrm{List}(A))\ \mathrm{List}(u)(x) : \mathrm{List}(B)$ ο οποίος απεικονίζει μία λίστα μελών τού A στη λίστα των εικόνων τους μέσω τού u.

Αληθοτιμές

Ο Bool είναι ο τύπος που έχει ακριβώς δύο μέλη false και true· επομένως, περιγράφεται από το επαγωγικό σχήμα

1. $\mathsf{false} : \mathrm{Bool}$,

2. $\mathsf{true} : \mathrm{Bool}$.

Η αρχή τής αναδρομής για τον Bool εκφράζει το γεγονός ότι προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό μελών τού Bool σε μέλη ενός τύπου C δεν έχουμε παρά να πούμε τι κάνει με το false και τι με το true· συγκεκριμένα, δοθέντων ενός $c_{\mathsf{false}} : C$ και ενός $c_{\mathsf{true}} : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{false}) &:\equiv c_{\mathsf{false}}, \\ t(\mathsf{true}) &:\equiv c_{\mathsf{true}} \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Bool})\, t(x) : C$. Όπως πάντα, έχουμε έναν αναδρομέα

$$(x : C, y : C, z : \mathrm{Bool})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{false}) &:\equiv x, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{true}) &:\equiv y. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε τον αληθοπίνακα της διάζευξης μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \mathsf{or}(b, \mathsf{false}) &:\equiv b, \\ \mathsf{or}(b, \mathsf{true}) &:\equiv \mathsf{true}, \end{aligned}$$

ή, εναλλακτικά, με τη βοήθεια του αναδρομέα τού Bool,

$$\mathsf{or}(b, c) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(b, \mathsf{true}, c).$$

Άσκηση 2.6. Ορίστε τούς αληθοπίνακες της σύζευξης και της συνεπαγωγής.

Η αρχή τής αναδρομής μάς παρέχει έναν τρόπο ορισμού μετασχηματισμών *από* τον Bool. Μια και στο επόμενο κεφάλαιο θα μιλήσουμε για λογική, ταιριάζει να κλείσουμε το κεφάλαιο της αναδρομής με κάποια παραδείγματα μετασχηματισμών *προς* τον Bool, δηλαδή αληθοσυναρτήσεων (αληθομετασχηματισμών, μάλλον, στην ορολογία μας). Με την ευκαιρία, θα πούμε δυο λόγια για πολλαπλή αναδρομή.

2.4 Πολλαπλή αναδρομή

Μέχρι τώρα είδαμε ποικίλα παραδείγματα ορισμού μετασχηματισμών, οι οποίοι είχαν περισσότερα από ένα ορίσματα, με αναδρομή σε ένα από αυτά. Υπάρχουν όμως καταστάσεις όπου χρειάζεται να κάνουμε αναδρομή σε δύο ή περισσότερα ορίσματα ταυτόχρονα. Αυτή η ανάγκη παρουσιάζεται, λόγου χάριν, στον ακόλουθο «ορισμό» τής αληθοσυνάρτησης $(x, y : \mathrm{Nat})\,\mathsf{isequal}(x, y) : \mathrm{Bool}$ της ισότητας φυσικών αριθμών:

$$\begin{aligned} \mathsf{isequal}(0,0) &:\equiv \mathsf{true}, \\ \mathsf{isequal}(0,\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{false}, \\ \mathsf{isequal}(\mathsf{s}(m),0) &:\equiv \mathsf{false}, \\ \mathsf{isequal}(\mathsf{s}(m),\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{isequal}(m,n). \end{aligned}$$

Η ιδέα εδώ είναι να αποπλέξουμε τη διπλή αναδρομή σε δύο επάλληλες (ή διαδοχικές) αναδρομές. Για να το πετύχουμε αυτό, γράφουμε το $\mathsf{isequal}(m, n)$ ως $\mathsf{isequal}_m(n)$. Με αυτόν τον συμβολισμό, οι δύο πρώτες σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{isequal}_0(0) &:\equiv \mathsf{true}, \\ \mathsf{isequal}_0(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{false} \end{aligned}$$

αποτελούν αναδρομικό ορισμό τού $\mathsf{isequal}_0$. Ομοίως, εάν έχουμε ορίσει τον $\mathsf{isequal}_m$, οι δύο άλλες σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{isequal}_{\mathsf{s}(m)}(0) &:\equiv \mathsf{false}, \\ \mathsf{isequal}_{\mathsf{s}(m)}(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{isequal}_m(n) \end{aligned}$$

ορίζουν τον $\mathsf{isequal}_{\mathsf{s}(m)}$. Δεν έχουμε τώρα παρά να βάλουμε αυτά τα δύο μαζί σε έναν αναδρομικό ορισμό τού $\mathsf{isequal}_m$, ή, εναλλακτικά, να επιστρατεύσουμε τον αναδρομέα των φυσικών αριθμών:

$$\mathsf{isequal}_m :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(c_0, (x, y)\ c_{\mathsf{s}}(x, y), m),$$

όπου

$$\begin{aligned} c_0 &:\equiv (n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(\mathsf{true}, (z : \mathrm{Nat}, w : \mathrm{Bool})\ \mathsf{false}, n), \\ c_{\mathsf{s}}(x, y) &:\equiv (n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(\mathsf{false}, (z : \mathrm{Nat}, w : \mathrm{Bool})\ y(z), n). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι εδώ χρησιμοποιούμε μία διαφορετική μορφή τού αναδρομέα από αυτή που έχουμε παρουσιάσει, καθώς τόσο το δεύτερο όρισμα του c_{s} όσο και το ίδιο το $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(c_0, (x, y)\ c_{\mathsf{s}}(x, y), m)$ είναι μετασχηματισμοί. Θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε τον rec κατάλληλα ώστε να συμπεριλάβουμε αυτή την περίπτωση· επειδή όμως σύντομα θα εισαγάγουμε τύπους συναρτήσεων, παρουσία τών οποίων αυτός ο γενικότερος αναδρομέας ορίζεται από τον ειδικότερο, δεν θα χρειαστεί να το κάνουμε. Από τη συζήτηση αυτή ας κρατήσουμε μόνο ότι μπορούμε, με τον ένα τρόπο ή με τον άλλο, να δίνουμε ορισμούς με πολλαπλή αναδρομή.

Άσκηση 2.7. Τροποποιώντας τόν ορισμό τού $\mathsf{isequal}$ ορίστε, με πολλαπλή αναδρομή, έναν μετασχηματισμό $(m, n : \mathrm{Nat})\,\mathsf{isless}(m, n) : \mathrm{Bool}$ ο οποίος παίρνει τις τιμές true και false ανάλογα με το εάν ο m είναι ή δεν είναι μικρότερος του n.

2.5 Ασκήσεις

Άσκηση 2.8. Η πράξη (almost minus) $m \dot{-} n$ ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} m \dot{-} 0 &:\equiv m, \\ m \dot{-} \mathsf{s}(n) &:\equiv \mathsf{pred}(m \dot{-} n). \end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \dot{-} n$ χρησιμοποιώντας τόν $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}$.

Άσκηση 2.9. Η αντιστροφή λίστας ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned}\mathsf{inv}(\mathsf{nil}) &:\equiv \mathsf{nil},\\ \mathsf{inv}(\mathsf{cons}(l,a)) &:\equiv \mathsf{cons}(\mathsf{nil},a) + \mathsf{inv}(l).\end{aligned}$$

Γράψτε τό $\mathsf{inv}(l)$ με τη βοήθεια του $\mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}$.

Άσκηση 2.10 (insertion sort)**.** Ο μετασχηματισμός $(a:A,\, l:\mathrm{List}(A))\mathsf{insert}(a,l):\mathrm{List}(A)$ τής ένθεσης ενός μέλους σε μία (ταξινομημένη) λίστα ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned}\mathsf{insert}(a',\mathsf{nil}) &:\equiv \mathsf{cons}(\mathsf{nil},a'),\\ \mathsf{insert}(a',\mathsf{cons}(l,a)) &:\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(\mathsf{cons}(\mathsf{cons}(l,a),a'), \mathsf{cons}(\mathsf{insert}(a',l),a), \mathsf{isless}(a',a)).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήστε αυτόν τον μετασχηματισμό για να περιγράψετε τον αλγόριθμο ταξινόμησης insertion sort. (Πρόκειται για τον αλγόριθμο ο οποίος, προκειμένου να ταξινομήσει μία λίστα $\mathsf{cons}(l,a)$, ταξινομεί πρώτα την l και μετά κάνει insert το a.)

3 Οικογένειες τύπων και επαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε κάποιες αρχές αναδρομής, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να εκφράσουμε μετασχηματισμούς μεταξύ των διαφόρων τύπων. Αυτό που φτιάξαμε, εν ολίγοις, είναι μία απλή συναρτησιακή γλώσσα. Ενδιαφερόμαστε όμως επίσης για τις ιδιότητες αυτών των μετασχηματισμών. Σε αυτό το κεφάλαιο, και πολύ περισσότερο στο επόμενο, θα δούμε πώς μπορούμε, στο πλαίσιο της θεωρίας τύπων, να διατυπώνουμε και να αποδεικνύουμε προτάσεις.

Σε αντίθεση με άλλες μαθηματικές θεωρίες και θεμελιώσεις των μαθηματικών όπως η θεωρία συνόλων, στη θεωρία τύπων οι μαθηματικές προτάσεις, καθώς και οι αποδείξεις τους, είναι μαθηματικά αντικείμενα πρώτης κατηγορίας. Συγκεκριμένα, οι μαθηματικές προτάσεις αναπαρίστανται από τύπους, που μπορούν να θεωρηθούν ταυτόχρονα μαθηματικές δομές και μαθηματικοί ισχυρισμοί, μία σύλληψη γνωστή ως propositions as types. Υπό αυτή τη σκοπιά, τα μέλη ενός τύπου νοούνται ως *τεκμήρια* ή *μάρτυρες* αλήθειας τής αντίστοιχης πρότασης. (Μερικές φορές λέγονται επίσης αποδείξεις, αλλά αυτή η ορολογία μπορεί να είναι παραπλανητική, επομένως γενικά την αποφεύγουμε.) Μία άμεση μεθοδολογική συνέπεια είναι ότι προκειμένου να δείξουμε ότι μία πρόταση αληθεύει δεν έχουμε παρά να εμφανίσουμε ένα μέλος τού τύπου που αντιστοιχεί σε αυτή την πρόταση.

Ωστόσο, αυτή η οπτική σχετικά με τις αποδείξεις διαφέρει ουσιωδώς από τη συνήθη. Ο τρόπος με τον οποίο η λογική γίνεται αντιληπτή από τη θεωρία τύπων είναι ότι μια πρόταση δεν είναι απλώς αληθής ή ψευδής, αλλά μάλλον μπορεί να νοηθεί ως η συλλογή όλων των δυνατών τεκμηρίων αλήθειας της. Σύμφωνα με αυτήν τη σύλληψη, οι αποδείξεις δεν είναι μόνο το μέσο επικοινωνίας των μαθηματικών, αλλά αποτελούν και οι ίδιες αντικείμενο μελέτης ισότιμο με πιο οικεία αντικείμενα όπως οι αριθμοί και οι συναρτήσεις.

3.1 Οικογένειες τύπων

Θα μιλήσουμε τώρα για το ένα από τα δύο δομικά στοιχεία των προτάσεων, τα κατηγορήματα· το άλλο, οι λογικές σταθερές, είναι το αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

Μία *οικογένεια τύπων (type family)* είναι ένας μετασχηματισμός μελών κάποιων τύπων σε τύπους. Σε μία οικογένεια $(x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n)\ A(x_1, \ldots, x_n)$, οι $A_1, \ldots, A_n$

λέγονται τύποι δεικτών (indexing types), και οι επιμέρους τύποι $A(x_1, \dots, x_n)$ λέγονται στιγμιότυπα (instances) της οικογένειας.

Οι οικογένειες τύπων, που επίσης λέγονται εξαρτώμενοι τύποι (dependent types), ήσαν μία από τις σημαντικότερες καινοτομίες τής θεωρίας τύπων τού Martin-Löf. Τυπικά παραδείγματα οικογενειών τύπων αποτελούν τα διάφορα κατηγορήματα $(x, y : A)\ x = y$, $(x : \mathrm{Nat})\ \mathrm{Prime}(x)$ κ.λπ. που συναντάμε στα μαθηματικά. Ένα στοιχειώδες, αλλά σημαντικό, παράδειγμα οικογένειας είναι η σταθερή οικογένεια $(x : A)\ B$ όπου A και B είναι τύποι. Και βέβαια, μία οικογένεια $()\ A()$ με μηδέν το πλήθος ορίσματα δεν είναι παρά ένας τύπος.

3.2 Ισότητα

Ο απλούστερος τρόπος να ορίσουμε μία οικογένεια είναι προδιαγράφοντας κατασκευαστές στα διάφορα στιγμιότυπά της, όπως κάναμε και για μεμονωμένους τύπους. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον τρόπο για να ορίσουμε την πλέον κοινή και πλέον σημαντική σχέση στα μαθηματικά, την ισότητα.

Έστω $a : A$, όπου A τύπος. Η *ισότητα προς a* είναι η οικογένεια

$$(x : A)\ a =_A x$$

που ορίζεται από τη μοναδική ρήτρα

$$\mathsf{refl}_a : a =_A a.$$

Ως συνήθως, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης θα παραλείπουμε το subscript και θα γράφουμε απλούστερα $a = b$.

Η ισότητα προς a λέγεται επίσης *βασισμένη (based)* ισότητα, διότι το ένα σκέλος (το αριστερό στον συμβολισμό μας) κρατιέται σταθερό, σε αντιδιαστολή με την (απλώς) ισότητα που θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, η οποία είναι οικογένεια ως προς αμφότερα τα σκέλη. Οι δύο διαφέρουν όσον αφορά τη μορφή τού αναδρομέα, αλλά είναι ισοδύναμες· για τον λόγο αυτόν, όταν δεν συντρέχει λόγος διάκρισης θα λέμε απλώς ισότητα.

Σχετικά με την αρχή τής αναδρομής, παρατηρήστε ότι η ισότητα προς a είναι οικογένεια, οπότε αυτό που θα ορίσουμε είναι μετασχηματισμοί προς οικογένειες ως προς τον ίδιο τύπο δεικτών, και επίσης ότι έχουμε μόνο έναν κατασκευαστή, οπότε αρκεί να πούμε τι κάνει ένας τέτοιος μετασχηματισμός με αυτόν. Αναλυτικότερα, ας θεωρήσουμε ότι μας έχουν δοθεί

1. μία οικογένεια $(x : A)\ C(x)$ τύπων, και

2. ένα μέλος c_{refl_a} τού $C(a)$.

Τότε, η σχέση

$$t(a, \mathsf{refl}_a)\ :\equiv c_{\mathsf{refl}_a}$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : A, y : a = x)\ t(x, y) : C(x)$.

Παρατηρήστε ότι, σε σχέση με την περίπτωση των μεμονομένων τύπων, εδώ έχουμε ένα παραπάνω όρισμα, το οποίο χρησιμεύει στο να προσδιορίσει σε ποιο στιγμιότυπο βρισκόμαστε κάθε φορά. Ένας άλλος τρόπος να περιγραφεί αυτό είναι λέγοντας ότι αυτό που ορίζεται με αναδρομή στην ισότητα προς a είναι μία δέσμη

$$\begin{gathered}(y : a = b)\ t(b, y) : C(b),\\ (y : a = b')\ t(b', y) : C(b'),\\ (y : a = b'')\ t(b'', y) : C(b''),\\ \vdots\end{gathered}$$

αποτελούμενη από έναν μετασχηματισμό για κάθε μέλος τού τύπου δεικτών A.

Ο αναδρομέας τής ισότητας προς a είναι ο μετασχηματισμός

$$(x : A, c : C(a), p : a = x)\ \mathsf{rec}_{a=x}(c, p) : C(x) \tag{1}$$

που ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{rec}_{a=a}(c, \mathsf{refl}_a)\ :\equiv c. \tag{2}$$

Ένας άλλος τρόπος γραφής τού (1) είναι υπό μορφήν κανόνα:

$$\frac{x : A \qquad c : C(a) \qquad p : a = x}{\mathsf{rec}_{a=x}(c, p) : C(x)}\quad . \tag{3}$$

Αυτή η έκφραση ονομάζεται *κανόνας σχηματισμού* τού αναδρομέα τής ισότητας, διότι περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αυτός συντάσσεται, δηλαδή τη μορφή των ορισμάτων του και τον τύπο (ή τύπους στην προκειμένη περίπτωση) των τιμών του. Ανάλογοι κανόνες σχηματισμού μπορούν να γραφτούν για τους άλλους μετασχηματισμούς.

Άσκηση 3.1. Γράψτε τούς κανόνες σχηματισμού των κατασκευαστών τού $\mathrm{List}(A)$.

Εάν στον (3) βάλουμε, για λόγους συμμετρίας, στη θέση τού x ένα μέλος a' τού A και κρατήσουμε μόνο τους τύπους, παίρνουμε τον λογικό κανόνα

$$\frac{C(a) \qquad a = a'}{C(a')}\quad , \tag{4}$$

γνωστό και ως *indiscernibility of identicals*, ο οποίος εκφράζει το γεγονός ότι τα ίσα μοιράζονται τις ίδιες ιδιότητες.

Ένα άμεσο πόρισμα του κανόνα (4) είναι ότι η ισότητα διατηρείται από μετασχηματισμούς· προκειμένου για έναν μετασχηματισμό $(x : A)\ u(x) : B$, το ζητούμενο προκύπτει θέτοντας $C(x)\ :\equiv u(a) = u(x)$. Το επόμενο λήμμα εισάγει έναν χρήσιμο συμβολισμό.

Λήμμα 1. *Έστω $(x : A)\, u(x) : B$ μετασχηματισμός. Για οποιαδήποτε $a, a' : A$ και $p : a =_A a'$ υπάρχει ένα*

$$\mathsf{ap}_u(p) : u(a) =_B u(a')$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\mathsf{ap}_u(\mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_{u(a)}$.

Απόδειξη. Εδώ, όπως και στην πλειονότητα των αποδείξεων στη θεωρία τύπων, η εκφώνηση υποδεικνύει τον τρόπο δράσης. Συγκεκριμένα, η σχέση $\mathsf{ap}_u(\mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_{u(a)}$ μάς καθοδηγεί να ορίσουμε το $\mathsf{ap}_u(p)$ με αναδρομή στο p. Θεωρούμε λοιπόν την οικογένεια $(x : A)\ u(a) =_B u(x)$ και το μέλος $\mathsf{refl}_{u(a)}$ τού $u(a) =_B u(a)$, και ορίζουμε τον μετασχηματισμό $(x : A, y : a =_A x)\ t(x, y) : u(a) =_B u(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a, \mathsf{refl}_a)\ :\equiv \mathsf{refl}_{u(a)}.$$

Δεν έχουμε πλέον παρά να θέσουμε $\mathsf{ap}_u(p) :\equiv t(a', p)$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε απ΄ ευθείας τον ap_u επικαλούμενοι τον αναδρομέα τής ισότητας:

$$\mathsf{ap}_u(p) :\equiv \mathsf{rec}_{a=a'}(\mathsf{refl}_{u(a)}, p). \qquad \square$$

Όπως αναμένεται, η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. Το ακόλουθο λήμμα αποτελεί την τυποθεωρητική εκδοχή τής συμμετρίας.

Λήμμα 2. *Για οποιαδήποτε $a, a' : A$ υπάρχει ένας μετασχηματισμός*

$$(p : a = a')\; p^{-1} : a' = a$$

ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\mathsf{refl}_a{}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_a$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $(x : A)\; C(x)$, όπου $C(x) :\equiv x = a$, και ορίζουμε τον μετασχηματισμό $(x : A, y : a = x)\; t(x, y) : C(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv \mathsf{refl}_a.$$

Τέλος, θέτουμε $p^{-1} :\equiv t(a', p)$. Το δεύτερο ζητούμενο είναι άμεσο:

$$\mathsf{refl}_a{}^{-1} \equiv t(a, \mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_a. \qquad \square$$

Με τη βοήθεια του αναδρομέα τής ισότητας, το p^{-1} γράφεται

$$p^{-1} :\equiv \mathsf{rec}_{a=a'}(\mathsf{refl}_a, p).$$

Παρατηρήστε ότι η ομοιότητα του p^{-1} με το $\mathsf{ap}_{(x\,:\,A)\;x}(p)$ είναι μόνο φαινομενική: Στη μία περίπτωση η οικογένεια ως προς την οποία κάνουμε αναδρομή είναι η $(x : A) a = x$, ενώ στην άλλη η $(x : A) x = a$. Το δίδαγμα είναι ότι είναι σημαντικό, όταν δίνουμε έναν ορισμό με αναδρομή ή επικαλούμαστε τον αναδρομέα τής ισότητας, να αναφέρουμε την οικογένεια στην οποία ο οριζόμενος μετασχηματισμός παίρνει τιμές.

Για τη μεταβατικότητα έχουμε το ακόλουθο:

Λήμμα 3. *Για οποιαδήποτε $a, a', a'' : A$ υπάρχει ένας μετασχηματισμός*

$$(p : a = a', q : a' = a'')\; p \cdot q : a = a''$$

ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $\mathsf{refl}_a \cdot \mathsf{refl}_a \equiv \mathsf{refl}_a$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια $(x : A)\; a = x$, και ορίζουμε τον μετασχηματισμό $(x : A, y : a' = x)\; t(x, y) : a = x$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a', \mathsf{refl}_{a'}) :\equiv p.$$

Τέλος, θέτουμε $p \cdot q :\equiv t(a'', q)$. Στην περίπτωση που $a \equiv a' \equiv a''$, έχουμε

$$\mathsf{refl}_a \cdot \mathsf{refl}_a \equiv t(a, \mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_a. \qquad \square$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε το $p \cdot q$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τής ισότητας:

$$p \cdot q :\equiv \mathsf{rec}_{a'=a''}(p, q).$$

Για λόγους ομοιομορφίας, διατυπώνουμε και το τετριμμένο λήμμα που διευθετεί την ανακλαστικότητα:

Λήμμα 4. *Για οποιοδήποτε $a : A$ υπάρχει ένα*

$$1 : a = a$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $1 \equiv \mathsf{refl}_a$. $\square$

3.3 Επαγωγή

Η προσθήκη οικογενειών τύπων στη θεωρία μάς δίνει τη δυνατότητα να ισχυροποιήσουμε τις αρχές αναδρομής τών διαφόρων τύπων. Θα πάρουμε ως παράδειγμα τους φυσικούς αριθμούς: Η έννοια ενός αναδρομικού ορισμού

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv f_n(t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c : C$ και $(n : \mathrm{Nat}, x : C)\, f_n(x) : C$, είναι ότι ο t μπορεί να υπολογιστεί σε βήματα:

$$\begin{aligned} t(0) &\equiv c, \\ t(1) &\equiv f_0(t(0)), \\ t(2) &\equiv f_1(t(1)), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής. Σχηματικά, οι τιμές τού t λαμβάνονται «κυνηγώντας» τό c κατά μήκος τού διαγράμματος

$$C \xrightarrow{f_0} C \xrightarrow{f_1} C \xrightarrow{f_2} \cdots .$$

Η ίδια, όμως, διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται και στο γενικότερο διάγραμμα

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \cdots ,$$

όπου, αντί για έναν τύπο C, έχουμε μία οικογένεια τύπων $(n : \mathrm{Nat})\, C_n$. Οδηγούμαστε έτσι στην *αρχή τής επαγωγής* τού Nat: Δοθέντων

- μιας οικογένειας τύπων $(x : \mathrm{Nat})\, C(x)$,
- ενός $c_0 : C(0)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : \mathrm{Nat}, y : C(x))\, c_{\mathsf{s}}(x, y) : C(\mathsf{s}(x))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv c_{\mathsf{s}}(n, t(n)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathrm{Nat})\, t(x) : C(x).$$

Με ανάλογο τρόπο γενικεύονται οι αρχές αναδρομής των άλλων τύπων. Η αρχή τής επαγωγής για τον BTree, π.χ., διαμορφώνεται ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{BTree})\, C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{triv}} : C(\mathsf{triv})$, και
- ενός μετασχηματισμού

$$(x : \mathrm{BTree}, y : \mathrm{BTree}, z : C(x), w : C(y))\, c_{\mathsf{join}}(x, y, z, w) : C(\mathsf{join}(x, y)),$$

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}) &:\equiv c_{\mathsf{triv}}, \\ t(\mathsf{join}(r,s)) &:\equiv c_{\mathsf{join}}(r,s,t(r),t(s)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{BTree})\ t(x) : C(x)$.

Άσκηση 3.2. Διατυπώστε τις αρχές επαγωγής των $\mathrm{List}(A)$ και Bool.

Λύση. Διατυπώνουμε την αρχή επαγωγής για τον $\mathrm{List}(A)$: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{List}(A))\ C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{nil}} : C(\mathsf{nil})$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : \mathrm{List}(A), y : A, z : C(x))\ c_{\mathsf{cons}}(x,y,z) : C(\mathsf{cons}(x,y))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{nil}) &:\equiv c_{\mathsf{nil}}, \\ t(\mathsf{cons}(l,a)) &:\equiv c_{\mathsf{cons}}(l,a,t(l)), \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{List}(A))\ t(x) : C(x)$. □

Η αρχή τής επαγωγής τού Nat οφείλει την ονομασία της στο ότι εμπεριέχει την οικεία μέθοδο απόδειξης ιδιοτήτων των φυσικών με επαγωγή: Εάν $\phi(x)$ είναι μία ιδιότητα φυσικών αριθμών, από μία απόδειξη c_0 τής $\phi(0)$ και μία απόδειξη $c_{\mathsf{s}}(x,y)$ τής $\phi(\mathsf{s}(x))$ από την $\phi(x)$ λαμβάνουμε, μέσω τού μετασχηματισμού t που ορίζεται με επαγωγή από τα c_0 και c_{s}, μία απόδειξη $t(x)$ τής $\phi(x)$ για τυχόντα φυσικό αριθμό x.

Η γενίκευση του αναδρομέα για την αρχή τής επαγωγής ονομάζεται *επαγωγέας* και συμβολίζεται ind· για τους φυσικούς αριθμούς, έχει τη μορφή

$$(z : C(0), (x : \mathrm{Nat}, y : C(x))\ w(x,y) : C(\mathsf{s}(x)), n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{ind}_{\mathrm{Nat}}(z,w,n) : C(n).$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής επαγωγής, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόσθεση φυσικών αριθμών είναι αντιμεταθετική,

$$n + m = m + n,$$

με επαγωγή στο n. Αφ΄ ενός έχουμε να δείξουμε ότι $0 + m = m + 0$, το οποίο, δεδομένου ότι $m + 0 \equiv m$, γράφεται ισοδύναμα

$$0 + m = m. \tag{5}$$

Αφ΄ ετέρου, έχουμε να δείξουμε ότι εάν $n + m = m + n$, τότε $\mathsf{s}(n) + m = m + \mathsf{s}(n)$, το οποίο, δεδομένου ότι $m + \mathsf{s}(n) \equiv \mathsf{s}(m + n)$, και αξιοποιώντας τήν επαγωγική υπόθεση, γράφεται ισοδύναμα

$$\mathsf{s}(n) + m = \mathsf{s}(n + m). \tag{6}$$

Παρατηρήστε ότι οι σχέσεις (5) και (6) είναι οι ορίζουσες σχέσεις τής πρόσθεσης αντεστραμμένες· αυτό φαίνεται καλύτερα εάν θεσουμε $m +' n :\equiv n + m$:

$$\begin{aligned} m +' 0 &= m, \\ m +' \mathsf{s}(n) &= \mathsf{s}(m +' n). \end{aligned}$$

Αυτό που μόλις διαπιστώσαμε είναι ειδική περίπτωση του εξής αποτελέσματος.

Θεώρημα 5 (μοναδικότητα του definiendum)**.** *Ας θεωρήσουμε τον αναδρομικό ορισμό*

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv c_{\mathsf{s}}(n, t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c_0 : C$ *και* $(x : \mathrm{Nat}, y : C)\ c_{\mathsf{s}}(x, y) : C$*, και ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός* $(x : \mathrm{Nat})\ u(x) : C$ *μαζί με τα εξής δεδομένα:*

1. *ένα* $p_0 : u(0) = c_0$*, και*
2. *έναν μετασχηματισμό* $(x : \mathrm{Nat})\ p_{\mathsf{s}}(x) : u(s(x)) = c_{\mathsf{s}}(x, u(x))$*.*

Τότε, υπάρχει ένας μετασχηματισμός

$$(x : \mathrm{Nat})\ p(x) : u(x) = t(x).$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τον p με επαγωγή. Η μία ρήτρα τού ορισμού είναι προφανής:

$$p(0) :\equiv p_0 : u(0) = c_0 \equiv t(0). \tag{7}$$

Όσον αφορά την άλλη, εάν $p(n) : u(n) = t(n)$, τότε παίρνουμε

$$p_{\mathsf{s}}(n) : u(\mathsf{s}(n)) = c_{\mathsf{s}}(n, u(n))$$

και

$$\mathsf{ap}_{(y\,:\,C)\ c_{\mathsf{s}}(n,y)}(p(n)) : c_{\mathsf{s}}(n, u(n)) = c_{\mathsf{s}}(n, t(n)) \equiv t(\mathsf{s}(n))$$

οπότε μπορούμε να επικαλεστούμε τη μεταβατικότητα της ισότητας και να θέσουμε

$$p(\mathsf{s}(n)) :\equiv p_{\mathsf{s}}(n) \cdot \mathsf{ap}_{(y\,:\,C)\ c_{\mathsf{s}}(n,y)}(p(n)) : u(\mathsf{s}(n)) = t(\mathsf{s}(n)). \tag{8}$$

Ο p ορίστηκε με επαγωγή από τις (7) και (8). □

Άσκηση 3.3. Διατυπώστε και αποδείξτε τό ανάλογο του θεωρήματος 5 για λίστες.

Άσκηση 3.4. Συμπληρώστε τήν απόδειξη της αντιμεταθετικότητας της πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, ορίστε, με επαγωγή στο m, μετασχηματισμούς

$$(m : \mathrm{Nat})\ p_0(m) : 0 + m = m$$

και

$$(n, m : \mathrm{Nat})\ p_{\mathsf{s}}(n, m) : \mathsf{s}(n) + m = \mathsf{s}(n + m)$$

και μετά εφαρμόστε το θεώρημα 5 για να συμπεράνετε, για οποιοδήποτε $m : \mathrm{Nat}$, την ύπαρξη ενός μετασχηματισμού

$$(n : \mathrm{Nat})\ p(n) : n + m = m + n.$$

3.4 Ασκήσεις

Άσκηση 3.5. Δείξτε ότι η πρόσθεση λιστών είναι προσεταιριστική, περιγράφοντας, για οποιαδήποτε $j, k, l : \mathrm{List}(A)$, ένα μέλος τού τύπου

$$(j + k) + l = j + (k + l).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο l.]

Λύση. Θα κάνουμε επαγωγή στο l. Αυτό σημαίνει ότι θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή τής επαγωγής τού τύπου $\mathrm{List}(A)$ για να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό

$$(l : \mathrm{List}(A))\ t(l) : (j + k) + l = j + (k + l).$$

Κατά πρώτον, πρέπει να ορίσουμε το

$$t(\mathsf{nil}) : (j + k) + \mathsf{nil} = j + (k + \mathsf{nil}).$$

Από τον ορισμό τής πρόσθεσης, όμως, παρατηρούμε ότι

$$(j + k) + \mathsf{nil} \equiv j + k \equiv j + (k + \mathsf{nil}),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{nil}) \ :\equiv \mathsf{refl}_{j+k}.$$

Κατά δεύτερον, ας υποθέσουμε ότι έχουμε το $t(l) : (j + k) + l = j + (k + l)$, και θέλουμε να ορίσουμε το

$$t(\mathsf{cons}(l, a)) : (j + k) + \mathsf{cons}(l, a) = j + (k + \mathsf{cons}(l, a)).$$

Οι υπολογισμοί των σκελών αυτής της ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned}(j + k) + \mathsf{cons}(l, a) &\equiv \mathsf{cons}((j + k) + l, a),\\ j + (k + \mathsf{cons}(l, a)) &\equiv j + \mathsf{cons}(k + l, a)\\ &\equiv \mathsf{cons}(j + (k + l), a).\end{aligned}$$

Εφ΄ όσον $t(l) : (j + k) + l = j + (k + l)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα 1 και να θέσουμε

$$t(\mathsf{cons}(l, a)) \ :\equiv \mathsf{ap}_{(x : \mathrm{List}(A))\, \mathsf{cons}(x,a)}(t(l)) : \mathsf{cons}((j + k) + l, a) = \mathsf{cons}(j + (k + l), a).$$

Από την αρχή τής επαγωγής τού $\mathrm{List}(A)$ λαμβάνουμε, για οποιαδήποτε λίστα $l : \mathrm{List}(A)$, το μέλος $t(l)$ τού $(j + k) + l = j + (k + l)$.

Άσκηση 3.6. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ u(x) : B$, δείξτε ότι, για οποιαδήποτε $k, l : \mathrm{List}(A)$,

$$\mathrm{List}(u)(k + l) = \mathrm{List}(u)(k) + \mathrm{List}(u)(l).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο l.]

Άσκηση 3.7 (Φυσικότητα του cat)**.** Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ u(x) : B$, δείξτε ότι, για οποιοδήποτε $L : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$,

$$\mathsf{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{cat}(L)).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο L.]

4 Λογική

Υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στη θεωρία τύπων και τη λογική, ιδιαίτερα τη θεωρία αποδείξεων. Μία πτυχή τής σχέσης αυτής, η οποία σκιαγραφήθηκε ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο, αφορά την ερμηνεία των προτάσεων ως τύπων, γνωστή και ως αντιστοιχία Curry-Howard. Ωστόσο, εδώ υποκρύπτεται ένα σημαντικά βαθύτερο γεγονός, που έχει να κάνει με την ανάγνωση της θεωρίας τύπων ως θεωρίας νοήματος των αναλυτικών προτάσεων. Το ζήτημα του προσδιορισμού των αναλυτικών προτάσεων έχει πλούσια ιστορία και συνδέεται με διάφορα άλλα εξαιρετικά ενδιαφέροντα φιλοσοφικά ερωτήματα, η πραγμάτευση των οποίων ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων. Θα προσπαθήσουμε μόνο να σκιαγραφήσουμε το σκεπτικό στη βάση τού οποίου οικοδομείται η σχέση μεταξύ λογικής και θεωρίας τύπων.

4.1 Η έννοια του τεκμηρίου αλήθειας

Η αποδεικτική διαδικασία έχει απολύτως κεντρική θέση στα μαθηματικά. Και δικαίως, αφού είναι ο τρόπος με τον οποίο αποκτούμε γνώση των μαθηματικών προτάσεων. Ποια είναι, όμως, η σχέση ανάμεσα στην απόδειξη και τη γνώση; Στο [3], ο Martin-Löf περιγράφει το αποδεικνύειν μία πρόταση ϕ ως την πρόσκτηση ή κατασκευή ή σύλληψη ενός τεκμηρίου αλήθειας της ϕ. Τότε, το γνωρίζειν την ϕ νοείται ως το έχειν αποδείξει την ϕ, δηλαδή ως η κατοχή ενός τεκμηρίου αλήθειας της ϕ.

Μία απόδειξη ενδέχεται, εκτός από συμπέρασμα, να έχει και υποθέσεις. Στην περίπτωση αυτή, η γνώση η οποία κομίζεται είναι κατά συνθήκη. Άλλως ειπείν, μία απόδειξη με υποθέσεις παρέχει σε κάποιον που γνωρίζει τις υποθέσεις έναν τρόπο να γνωρίσει το συμπέρασμα. Δοθέντος ότι το γνωρίζειν συνίσταται στην κατοχή ενός τεκμηρίου αλήθειας, οδηγούμαστε στην εξής

Διαπίστωση. *Μία απόδειξη παριστάνει έναν μετασχηματισμό των τεκμηρίων αλήθειας κάποιων προτάσεων (των υποθέσεων) σε τεκμήρια αλήθειας κάποιας πρότασης (του συμπεράσματος).*

Κατ΄ αυτόν τον τρόπο, έχουμε διευκρινίσει τη σχέση μεταξύ απόδειξης και γνώσης. Μένει ακόμα να πούμε ποια είναι τα τεκμήρια αλήθειας των προτάσεων. Σχετικά με αυτό, παρατηρήστε ότι το τι συνιστά τεκμήριο αλήθειας καθεμιάς πρότασης είναι ακριβώς ό,τι χρειάζεται να γνωρίζει κανείς προκειμένου να είναι σε θέση τόσο να διατυπώνει αποδείξεις, όσο και να κατανοεί τις αποδείξεις που διατυπώνουν άλλοι ως τέτοιες. Αυτή, όμως, είναι η λειτουργία τού νοήματος:

Ορισμός 6. *Αποδεικτικό ή θετικό νόημα* (ή, απλώς, νόημα) μιας πρότασης ονομάζεται το τι συνιστά τεκμήριο αλήθειας αυτής.

Το σκεπτικό αυτού του ορισμού είναι ότι στα μαθηματικά, αλλά και σε κάθε άλλο πεδίο στο οποίο η αποδεικτική διαδικασία έχει κεντρικό ρόλο, οι προτάσεις «κουβαλούν» το θετικό τους νόημα, καθώς αυτό είναι που προσδιορίζει τους τρόπους με τους οποίους συμμετέχουν σε αποδείξεις.

4.2 Προτασιακή λογική

Όσον αφορά τον προσδιορισμό τού νοήματος των διαφόρων προτάσεων, παρατηρήστε ότι ένας ορισμός είναι μία πράξη απόδοσης νοήματος σε ένα σύμβολο, έναν όρο ή μία οποιαδήποτε άλλη, ενδεχομένως σύνθετη, γλωσσική έκφραση. Αυτό σημαίνει, αντίστροφα, ότι η σχέση ανάμεσα σε μία γλωσσική έκφραση και στο νόημά της μπορεί να είναι αντικείμενο ορισμού, κι αυτό ισχύει ιδιαίτερα για προτάσεις[1]. Από την άλλη μεριά, ο προσδιορισμός τού νοήματος των προτάσεων μιας προϋπάρχουσας γλώσσας δε μπορεί να είναι αυθαίρετος, αλλά θα πρέπει να στηρίζεται σε μία νοηματική ανάλυση αυτής της γλώσσας. Προκειμένου για τη χρήση των λογικών σταθερών στα κατασκευαστικά μαθηματικά, η σχετική ανάλυση συνοψίζεται στην *ερμηνεία Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK)*, η οποία, για τους συνδέσμους, έχει ως εξής:

- Ένα τεκμήριο αλήθειας της $\phi \,\&\, \psi$ αποτελείται από ένα τεκμήριο αλήθειας της ϕ και ένα τεκμήριο αλήθειας της ψ.
- Τεκμήρια αλήθειας της $\phi \vee \psi$ είναι τα τεκμήρια αλήθειας της ϕ καθώς και εκείνα της ψ.
- Τεκμήριο αλήθειας της $\phi \supset \psi$ είναι ένας μετασχηματισμός τών τεκμηρίων αλήθειας της ϕ σε τεκμήρια αλήθειας της ψ.
- Η $\perp$ δεν έχει τεκμήρια αλήθειας.
- Η $\top$ έχει ένα τεκμήριο αλήθειας.

Τέλος, η άρνηση $\neg\phi$ μιας πρότασης ϕ ορίζεται ως η πρόταση $\phi \supset \perp$.

Η BHK διευκρινίζει τον τρόπο με τον οποίο οι λογικές σταθερές χρησιμοποιούνται στα κατασκευαστικά μαθηματικά. Το κάνει, δε, αυτό, περιγράφοντας το νόημα καθεμιάς σύνθετης πρότασης συναρτήσει των νοημάτων των απλούστερων προτάσεων από τις οποίες έχει συντεθεί. Μάλιστα, καθεμιά από τις ρήτρες τής BHK είναι ένα επαγωγικό σχήμα. Συνεπεία αυτού, μπορούμε να πούμε ότι το νόημα καθεμιάς πρότασης είναι ο τύπος των τεκμηρίων αλήθειας αυτής. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιούμε τυποθεωρητική ορολογία και τυποθεωρητικό συμβολισμό όταν μιλάμε για προτάσεις· μεταξύ άλλων, γράφουμε $x : \phi$ για να δηλώσουμε ότι το x είναι τεκμήριο αλήθειας της ϕ. Θα εξετάσουμε τους συνδέσμους κατά σειράν.

Σύζευξη

Στην BHK, οι κατασκευαστές των (τεκμηρίων αλήθειας των) διαφόρων προτάσεων έχουν αποσιωπηθεί. Ωστόσο, προς χάριν τής τυποθεωρητικής πραγμάτευσης, χρειάζεται να τους εμφανίσουμε. Έτσι, ορίζουμε την σύζευξη $\phi_1 \,\&\, \phi_2$ δύο προτάσεων ϕ_1 και ϕ_2 μέσω τού κατασκευαστή (τεκμηρίων αλήθειας)

- Εάν $a_1 : \phi_1$ και $a_2 : \phi_2$, τότε $\mathsf{pair}(a_1, a_2) : \phi_1 \,\&\, \phi_2$,

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{a_1 : \phi_1 \qquad a_2 : \phi_2}{\mathsf{pair}(a_1, a_2) : \phi_1 \,\&\, \phi_2}\quad .$$

[1] Ο όρος *πρόταση* αντιστοιχεί, στα αγγλικά, στους δύο όρους *sentence* και *proposition*, ο πρώτος εκ των οποίων αναφέρεται στην πρόταση ως γλωσσική έκφραση, ενώ ο δεύτερος στο νόημα ή τη σημασία μιας τέτοιας γλωσσικής έκφρασης· ισοδύναμα, μία πρόταση-proposition είναι ένα προτασιακό νόημα, και μία πρόταση-sentence είναι μία γλωσσική έκφραση ενός τέτοιου νοήματος. Όταν μιλάμε για το νόημα ή τον ορισμό μιας πρότασης εννοούμε, ξεκάθαρα, την πρόταση ως γλωσσική έκφραση.

Παραλείποντας τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαγωγής

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_1 \mathbin{\&} \phi_2} \;\&\mathcal{I}$$

που εκφράζει το στοιχειώδες λογικό γεγονός ότι από δύο προτάσεις μπορούμε να συμπεράνουμε τη σύζευξή τους. Ο κανόνας αυτός ονομάζεται *κανόνας εισαγωγής (introduction rule)* τής σύζευξης, διότι περιγράφει τον (κανονικό) τρόπο με τον οποίο μία σύζευξη εμφανίζεται ως συμπέρασμα μιας απόδειξης.

Όπως κάθε τύπος, η σύζευξη ικανοποιεί μία αρχή αναδρομής, η οποία λέει ότι, δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x_1 : \phi_1, x_2 : \phi_2)\ c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2) : \theta$, η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a_1, a_2)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : \phi_1 \mathbin{\&} \phi_2)\ t(x) : \theta$. Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$((x_1 : \phi_1, x_2 : \phi_2)\ z(x_1, x_2) : \theta, x : \phi_1 \mathbin{\&} \phi_2)\ \mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}(z, x) : \theta$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{\begin{array}{c}(x_1 : \phi_1, x_2 : \phi_2)\\ \vdots \\ z(x_1, x_2) : \theta\end{array} \qquad x : \phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}(z, x) : \theta} \ ,$$

οριζόμενο από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}(z, \mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ :\equiv z(a_1, a_2).$$

Εάν από τον κανόνα σχηματισμού τού $\mathsf{rec}_{\phi_1 \& \phi_2}$ παραλείψουμε τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαγωγής

$$\frac{\begin{array}{c}(\phi_1, \phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\theta} \;\&\mathcal{E} \ ,$$

ο οποίος εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο μία σύζευξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόθεση, και γι΄ αυτό λέγεται *κανόνας απαλοιφής (elimination rule)* τής σύζευξης.

Διάζευξη

Όμοια, η διάζευξη έχει τον επαγωγικό ορισμό

$$\frac{a_1 : \phi_1}{\mathsf{in}_1(a_1) : \phi_1 \vee \phi_2} \qquad \frac{a_2 : \phi_2}{\mathsf{in}_2(a_2) : \phi_1 \vee \phi_2} \ .$$

Κι εδώ μπορούμε να παραλείψουμε τα τεκμήρια αλήθειας και να πάρουμε τους κανόνες εισαγωγής τής διάζευξης

$$\frac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \qquad \frac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2} \;\vee\mathcal{I} \ ,$$

οι οποίοι εκφράζουν το γεγονός ότι μπορούμε να συμπεράνουμε μία διάζευξη από εκάτερη των διαζευκτέων.

Η αρχή τής αναδρομής για τη διάζευξη έχει ως εξής: Δοθέντων δύο μετασχηματισμών $(x_1 : \phi_1)\ c_{\mathsf{in}_1}(x_1) : \theta$ και $(x_2 : \phi_2)\ c_{\mathsf{in}_2}(x_2) : \theta$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{in}_1(a_1)) &:\equiv c_{\mathsf{in}_1}(a_1), \\ t(\mathsf{in}_2(a_2)) &:\equiv c_{\mathsf{in}_2}(a_2) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \phi_1 \vee \phi_2)\ t(x) : \theta$. Ο αναδρομέας τής διάζευξης έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{matrix} (x_1 : \phi_1) \\ \vdots \\ z_1(x_1) : \theta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (x_2 : \phi_2) \\ \vdots \\ z_2(x_2) : \theta \end{matrix} \qquad x : \phi_1 \vee \phi_2}{\mathsf{rec}_{\phi_1 \vee \phi_2}(z_1, z_2, x) : \theta}$$

και ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\phi_1 \vee \phi_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_1(a_1)) &:\equiv z_1(a_1), \\ \mathsf{rec}_{\phi_1 \vee \phi_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_2(a_2)) &:\equiv z_2(a_2). \end{aligned}$$

Διαγράφοντας τα τεκμήρια αλήθειας από τον κανόνα σχηματισμού τού $\mathsf{rec}_{\phi_1 \vee \phi_2}$ παίρνουμε τον κανόνα απαλοιφής τής διάζευξης

$$\frac{\begin{matrix} (\phi_1) \\ \vdots \\ \theta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (\phi_2) \\ \vdots \\ \theta \end{matrix} \qquad \phi_1 \vee \phi_2}{\theta}\ \vee\mathcal{E}\ ,$$

ο οποίος περιγράφει την απόδειξη με διάκριση περιπτώσεων.

Συνεπαγωγή

Η περίπτωση της συνεπαγωγής παρουσιάζει λίγο μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Εδώ, ο ορισμός έχει τη μορφή

- Εάν ο $(x : \phi)\ b(x) : \psi$ είναι μετασχηματισμός των τεκμηρίων αλήθειας της ϕ σε τεκμήρια αλήθειας της ψ, τότε το $\lambda(x : \phi)\ b(x)$ είναι τεκμήριο αλήθειας της $\phi \supset \psi$.

Η ιδιαιτερότητα της (μοναδικής) ρήτρας αυτού τού ορισμού είναι ότι, σε αντίθεση με όλους τούς επαγωγικούς ορισμούς των άλλων συνδέσμων, εισάγει έναν κατασκευαστή, την *λ-αφαίρεση*, ο οποίος δέχεται ένα όρισμα που δεν είναι μέλος κάποιου τύπου, παρά είναι το ίδιο μετασχηματισμός. Αυτό αντανακλάται και στον αντίστοιχο κανόνα σχηματισμού, ο οποίος έχει τη μορφή

$$\frac{\begin{matrix} (x : \phi) \\ \vdots \\ b(x) : \psi \end{matrix}}{\lambda(x : \phi)\ b(x) : \phi \supset \psi}\ .$$

Τα τεκμήρια αλήθειας των συνεπαγωγών ονομάζονται *συναρτήσεις*. Θα ταίριαζε, επομένως, να γράφαμε $\mathsf{function}(x : \phi)\ b(x)$ αντί για $\lambda(x : \phi)\ b(x)$, μια και αυτό που δηλώνεται εδώ είναι μία συνάρτηση με όρισμα x και σώμα $b(x)$. Ωστόσο, το σύμβολο λ είναι καθιερωμένο στη λογική και τη θεωρία τύπων, και δε θα επιχειρήσουμε να το αλλάξουμε.

Παραλείποντας τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα εισαγωγής τής συνεπαγωγής

$$\dfrac{\begin{matrix}(\phi)\\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \supset \psi}\ \supset\!\mathcal{I}$$

ο οποίος, σε άλλες διατυπώσεις τής λογικής, είναι γνωστός ως θεώρημα απαγωγής.

Η αρχή τής αναδρομής για τη συνεπαγωγή αποτελεί λίγο μεγαλύτερη πρόκληση, γι΄ αυτό τη διατυπώνουμε αναλυτικά: Έστω θ τυχούσα πρόταση, και ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός $((x : \phi)\ y(x) : \psi)\ c_\lambda(y) : \theta$ ο οποίος δέχεται ως όρισμα έναν μετασχηματισμό τεκμηρίων αλήθειας της ϕ σε τεκμήρια αλήθειας της ψ και επιστρέφει ένα τεκμήριο αλήθειας της θ. Με αυτά τα δεδομένα, η σχέση

$$t(\lambda(x : \phi)\ b(x))\ :\equiv\ c_\lambda(b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : \phi \supset \psi)\ t(x) : \theta$.

Ώς συνήθως, ο αναδρομέας τής συνεπαγωγής λαμβάνεται εμφανίζοντας ως όρισμα την παράμετρο c_λ, οπότε έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\dfrac{\begin{matrix}\left(\dfrac{x : \phi}{y(x) : \psi}\right)\\ \vdots \\ z(y) : \theta\end{matrix} \qquad f : \phi \supset \psi}{\mathsf{rec}_{\phi\supset\psi}(z, f) : \theta}\ ,$$

και ορίζεται από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\phi\supset\psi}(z, \lambda(x : \phi)\ b(x))\ :\equiv\ z(b).$$

Και πάλι, διαγράφοντας τα τεκμήρια αλήθειας λαμβάνουμε τον κανόνα απαλοιφής τής συνεπαγωγής

$$\dfrac{\begin{matrix}\left(\dfrac{\phi}{\psi}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \qquad \phi \supset \psi}{\theta}\ \supset\!\mathcal{E}\ .$$

Εάν συμβολίσουμε $\Sigma \vdash \theta$ το γεγονός ότι η θ έπεται (είναι λογική συνέπεια) των προτάσεων και κανόνων που ανήκουν στο σύνολο Σ, ο $(\supset\mathcal{E})$ λέει ότι εάν $\Sigma \cup \{\dfrac{\phi}{\psi}\} \vdash \theta$, τότε $\Sigma \cup \{\phi \supset \psi\} \vdash \theta$.

Ψευδές

Το ψευδές έχει τον τετριμμένο, ή κενό, επαγωγικό ορισμό που δεν περιέχει καμία ρήτρα· κατά συνέπεια δεν έχει και κανόνες εισαγωγής. Εφ΄ όσον δεν έχει τεκμήρια αλήθειας, η αντίστοιχη αρχή αναδρομής λέει απλώς ότι για κάθε πρόταση θ ορίζεται ένας μετασχηματισμός τεκμηρίων αλήθειας της $\perp$ σε τεκμήρια αλήθειας της θ, που είναι και ο αναδρομέας

$$(x : \perp)\ \mathsf{rec}_{\perp}(x) : \theta$$

τού ψευδούς· υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x : \perp}{\mathsf{rec}_{\perp}(x) : \theta} \quad .$$

Διαγράφοντας τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαλοιφής τού ψευδούς

$$\frac{\perp}{\theta}\ \perp\mathcal{E}\ ,$$

που είναι γνωστός και ως ex falso (sequitur) quodlibet.

Αληθές

Το αληθές έχει τον ορισμό

- $! : \top$,

η μοναδική ρήτρα τού οποίου γράφεται επίσης

$$\frac{}{! : \top}$$

και δίνει τον κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{\top}\ \top\mathcal{I}$$

που λέει, απλώς, ότι η $\top$ αληθεύει.

Προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό των τεκμηρίων αλήθειας του αληθούς δεν έχουμε παρά να πούμε πώς αυτός δρα στο μοναδικό τεκμήριο αλήθειας $! : \top$· αυτό ακριβώς εκφράζεται από την αρχή αναδρομής τού αληθούς: Δοθέντος ενός $c_! : \theta$, η σχέση

$$t(!)\ :\equiv c_!$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : \top)\ t(x) : \theta$. Έτσι και ο αναδρομέας τού αληθούς

$$(x : \theta, y : \top)\ \mathsf{rec}_{\top}(x, y) : \theta$$

ορίζεται από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\top}(x, !)\ :\equiv x.$$

Ο $\mathsf{rec}_{\top}$ έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{x : \theta \qquad y : \top}{\mathsf{rec}_{\top}(x, y) : \theta} \quad ,$$

από τον οποίο αφαιρώντας τά τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαλοιφής τού αληθούς

$$\frac{\theta \qquad \top}{\theta}\ \top\mathcal{E}\ .$$

4.2.1 Ειδικοί κανόνες απαλοιφής

Εάν ένας σύνδεσμος έχει ακριβώς έναν κανόνα εισαγωγής, ο μοναδικός αυτός κανόνας εισαγωγής μπορεί επίσης να διαβαστεί από κάτω προς τα επάνω. Τα προϊόντα αυτής τής αντιστροφής λέγονται *ειδικοί (special) κανόνες απαλοιφής* (και, ενίοτε, για αντιδιαστολή, οι άλλοι κανόνες απαλοιφής ονομάζονται *γενικοί*). Προκειμένου για τη σύζευξη, αυτοί είναι οι

$$\frac{\phi_1 \,\&\, \phi_2}{\phi_1} \qquad \frac{\phi_1 \,\&\, \phi_2}{\phi_2}\ \&\mathcal{S}\,.$$

Για τη συνεπαγωγή έχουμε τον κανόνα

$$\frac{\phi \supset \psi \qquad \phi}{\psi}\ \supset\!\mathcal{S}\,,$$

γνωστό και ως modus ponens. Τέλος, για το αληθές έχουμε μηδέν το πλήθος ειδικούς κανόνες απαλοιφής.

Για καθέναν από τους τρεις παραπάνω συνδέσμους, οι ειδικοί κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι με τον (γενικό) κανόνα απαλοιφής. Για να το δείξουμε αυτό για τη σύζευξη, θεωρούμε τους μετασχηματισμούς

$$\frac{x : \phi_1 \,\&\, \phi_2}{\mathsf{pr}_1(x) : \phi_1} \qquad \frac{x : \phi_1 \,\&\, \phi_2}{\mathsf{pr}_2(x) : \phi_2}\ ,$$

οι οποίοι ορίζονται μέσω των αναδρομών

$$\begin{aligned} \mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ &:\equiv a_1, \\ \mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ &:\equiv a_2. \end{aligned}$$

Όπως και κάθε άλλος μετασχηματισμός που ορίζεται με αναδρομή, οι pr_1 και pr_2 μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια του $\mathsf{rec}_{\phi_1\&\phi_2}$· αντιστρόφως, ο $\mathsf{rec}_{\phi_1\&\phi_2}$ ορίζεται από τους pr_1 και pr_2 μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{rec}_{\phi_1\&\phi_2}(z, x) \ :\equiv z(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)).$$

Άσκηση 4.1. Επαληθεύστε ότι ο έτσι ορισμένος $\mathsf{rec}_{\phi_1\&\phi_2}$ ικανοποιεί τις ορίζουσες σχέσεις τού αναδρομέα τής σύζευξης.

Για να τακτοποιήσουμε τη συνεπαγωγή, θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$\frac{f : \phi \supset \psi \qquad x : \phi}{\mathsf{apply}_f(x) : \psi}\ .$$

ο οποίος ορίζεται μέσω της αναδρομής

$$\mathsf{apply}_{\lambda(x\,:\,\phi)\ b(x)}(a) \ :\equiv b(a).$$

Ο $\mathsf{rec}_{\phi\supset\psi}$ ορίζεται από τον apply μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{rec}_{\phi\supset\psi}(z, f) \ :\equiv z((x : \phi)\ \mathsf{apply}_f(x)).$$

Άσκηση 4.2. Επαληθεύστε ότι ο έτσι ορισμένος $\mathsf{rec}_{\phi\supset\psi}$ ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού αναδρομέα τής συνεπαγωγής.

Για την περίπτωση του αληθούς, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο $\mathsf{rec}_\top$ ορίζεται και χωρίς αναδρομή:

$$\mathsf{rec}_\top(x, y) :\equiv x.$$

Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι ο κανόνας απαλοιφής τού αληθούς είναι περιττός.

Άσκηση 4.3. Επαληθεύστε ότι ο έτσι ορισμένος $\mathsf{rec}_\top$ ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού αναδρομέα τού αληθούς.

Δυνάμει τού παραπάνω θεωρήματος, είναι καθιερωμένο στη φυσική απαγωγή να χρησιμοποιούνται οι ειδικοί κανόνες απαλοιφής όπου είναι διαθέσιμοι.

4.2.2 Παραδείγματα

Ως πρώτο παράδειγμα, ας δούμε πώς από τις $\phi \supset \psi$ και $\psi \supset \theta$ μπορούμε να συμπεράνουμε την $\phi \supset \theta$:

$$\dfrac{\dfrac{\psi \supset \theta \qquad \dfrac{\phi \supset \psi \qquad (\phi)}{\psi}\supset\mathcal{S}}{\theta}\supset\mathcal{S}}{\phi \supset \theta}\supset\mathcal{I}\qquad.$$

Όπως συνηθίζεται στα μαθηματικά, γράψαμε την απόδειξη χωρίς να αναφέρουμε τα τεκμήρια αλήθειας των εμπλεκόμενων προτάσεων. Ωστόσο, ανατρέχοντας στους κανόνες σχηματισμού από τους οποίους προέρχονται οι διάφοροι λογικοί κανόνες, μπορούμε από μία απόδειξη να εκμαιεύσουμε τον μετασχηματισμό τον οποίο παριστάνει. Προκειμένου για την απόδειξη του παραδείγματος, ο μετασχηματισμός αυτός είναι ο

$$(f : \phi \supset \psi, g : \psi \supset \theta)\; g \circ f,$$

όπου

$$g \circ f :\equiv \lambda(x : \phi)\; \mathsf{apply}_g(\mathsf{apply}_f(x))$$

είναι η σύνθεση συναρτήσεων. Υπάρχουν επίσης ταυτοτικές συναρτήσεις:

$$\mathsf{id}_\phi :\equiv \dfrac{(x : \phi)}{\lambda(x : \phi)\; x : \phi \supset \phi}\supset\mathcal{I}\quad.$$

4.3 Κατηγορηματική λογική

Για τους ποσοδείκτες, οι σχετικές ρήτρες τής BHK είναι οι εξής:

- Ένα τεκμήριο αλήθειας της $\exists(x : A)\ \phi(x)$ αποτελείται από ένα μέλος a τού τύπου A και ένα τεκμήριο αλήθειας της πρότασης $\phi(a)$.
- Τεκμήριο αλήθειας της $\forall(x : A)\ \phi(x)$ είναι ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει καθένα μέλος a τού τύπου A σε ένα τεκμήρια αλήθειας της πρότασης $\phi(a)$.

Υπαρκτικός ποσοδείκτης

Έστω $(x : A)\ \phi(x)$ οικογένεια προτάσεων. Η πρόταση $\exists(x : A)\ \phi(x)$ έχει τον κατασκευαστή

- Εάν $a : A$ και $b : \phi(a)$, τότε $\mathsf{pair}(a, b) : \exists(x : A)\ \phi(x)$.

Χρησιμοποιούμε το ίδιο όνομα για τον κατασκευαστή τού υπαρκτικού ποσοδείκτη με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για τον κατασκευαστή τής σύζευξης. Αυτό είναι εσκεμμένο: Από τυποθεωρητική άποψη, η υπαρκτική ποσόδειξη δεν είναι παρά μία εξαρτώμενη (dependent) σύζευξη.

Ως κανόνας σχηματισμού, η ρήτρα τού παραπάνω ορισμού γράφεται

$$\frac{a : A \qquad b : \phi(a)}{\mathsf{pair}(a, b) : \exists(x : A)\ \phi(x)} \ .$$

Παραλείποντας τα τεκμήρια αλήθειας από τον παραπάνω κανόνα παίρνουμε τον κανόνα εισαγωγής τού υπαρκτικού ποσοδείκτη

$$\frac{a : A \qquad \phi(a)}{\exists(x : A)\ \phi(x)}\ \exists\mathcal{I}\ ,$$

ο οποίος μας λέει ότι δοθείσης τής $\phi(a)$ για κάποιο a μπορούμε να συμπεράνουμε την $\exists(x : A)\ \phi(x)$.

Η αρχή τής αναδρομής τού υπαρκτικού ποσοδείκτη λέει ότι, δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A, y : \phi(x))\ c_{\mathsf{pair}}(x, y) : \theta$, η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(a, b)) \ :\equiv\ c_{\mathsf{pair}}(a, b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(w : \exists(x : A)\ \phi(x))\ t(w) : \theta$. Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$((x : A, y : \phi(x))\ z(x, y) : \theta,\ w)\ \mathsf{rec}_{\exists(x : A)\ \phi(x)}(z, w) : \theta$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A, y : \phi(x))\\ \vdots\\ z(x, y) : \theta\end{array} \qquad w : \exists(x : A)\ \phi(x)}{\mathsf{rec}_{\exists(x : A)\ \phi(x)}(z, w) : \theta}\ ,$$

οριζόμενο από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\exists(x : A)\ \phi(x)}(z, \mathsf{pair}(a, b)) \ :\equiv\ z(a, b).$$

Εάν από τον κανόνα σχηματισμού τού $\mathsf{rec}_{\exists(x : A)\ \phi(x)}$ παραλείψουμε τα τεκμήρια αλήθειας παίρνουμε τον κανόνα απαλοιφής τού υπαρκτικού ποσοδείκτη

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A, \phi(x))\\ \vdots\\ \theta\end{array} \qquad \exists(x : A)\ \phi(x)}{\theta}\ \exists\mathcal{E}\ .$$

Καθολικός ποσοδείκτης

Έστω $(x : A)\ \phi(x)$ οικογένεια προτάσεων. Η πρόταση $\forall(x : A)\ \phi(x)$ έχει τον κατασκευαστή

- Εάν ο $(x : A)\ b(x) : \phi(x)$ είναι μετασχηματισμός, τότε το $\lambda(x : A)\ b(x)$ είναι τεκμήριο αλήθειας της $\forall(x : A)\ \phi(x)$.

Και στην περίπτωση του καθολικού ποσοδείκτη συμβολίζουμε τον κατασκευαστή όπως τον κατασκευαστή τής συνεπαγωγής: Η καθολική ποσόδειξη είναι η εξαρτώμενη (dependent) εκδοχή τής συνεπαγωγής.

Ο λ έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots\\ b(x) : \phi(x)\end{array}}{\lambda(x : A)\ b(x) : \forall(x : A)\ \phi(x)}\ ,$$

από τον οποίο παίρνουμε, παραλείποντας τα μέλη, τον κανόνα εισαγωγής τού καθολικού ποσοδείκτη:

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots\\ \phi(x)\end{array}}{\forall(x : A)\ \phi(x)}\ \forall\mathcal{I}\ .$$

Απο λογική άποψη, αυτός ο κανόνας λέει ότι από μία απόδειξη της $\phi(x)$ για τυχόν $x : A$ μπορούμε να συμπεράνουμε την $\forall(x : A)\ \phi(x)$.

Η αρχή τής αναδρομής για τον καθολικό ποσοδείκτη είναι επίσης γενίκευση της αντίστοιχης αρχής για την συνεπαγωγή: Εάν η θ είναι τυχούσα πρόταση, και μας έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός $((x : A)\ y(x) : \phi(x))\ c_\lambda(y) : \theta$, τότε η σχέση

$$t(\lambda(x : A)\ b(x)) \ :\equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(f : \forall(x : A)\ \phi(x))\ t(f) : \theta$. Ώς συνήθως, ο αναδρομέας τού καθολικού ποσοδείκτη λαμβάνεται εμφανίζοντας ως όρισμα την παράμετρο c_λ, οπότε έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{x : A}{y(x) : \phi(x)}\right)\\ \vdots\\ z(y) : \theta\end{array} \qquad f : \forall(x : A)\ \phi(x)}{\mathsf{rec}_{\forall(x : A)\ \phi(x)}(z, f) : \theta}\ ,$$

και ορίζεται με αναδρομή από τη σχέση

$$\mathsf{rec}_{\forall(x : A)\ \phi(x)}(z, \lambda(x : A)\ b(x)) \ :\equiv z(b).$$

Και πάλι, διαγράφοντας τα τεκμήρια αλήθειας λαμβάνουμε τον κανόνα απαλοιφής τού καθολικού ποσοδείκτη

$$\frac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{x : A}{\phi(x)}\right)\\ \vdots\\ \theta\end{array} \qquad \forall(x : A)\ \phi(x)}{\theta}\ \forall\mathcal{E}\ .$$

	Κανόνες εισαγωγής	Κανόνες απαλοιφής	(Ειδικοί)
&	$\dfrac{\phi_1 \quad \phi_2}{\phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi_1, \phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \quad \phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\theta}$	$\dfrac{\phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\phi_1} \qquad \dfrac{\phi_1 \mathbin{\&} \phi_2}{\phi_2}$
$\vee$	$\dfrac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \qquad \dfrac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi_1)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \quad \begin{array}{c}(\phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \quad \phi_1 \vee \phi_2}{\theta}$	
$\supset$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi)\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \supset \psi}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{\phi}{\psi}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \quad \phi \supset \psi}{\theta}$	$\dfrac{\phi \supset \psi \quad \phi}{\psi}$
$\bot$		$\dfrac{\bot}{\theta}$	
$\top$	$\dfrac{}{\top}$	$\dfrac{\theta \quad \top}{\theta}$	$\emptyset$
$\exists$	$\dfrac{a : A \quad \phi(a)}{\exists(x : A)\, \phi(x)}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(x : A, \phi(x))\\ \vdots \\ \theta\end{array} \quad \exists(x : A)\, \phi(x)}{\theta}$	
$\forall$	$\dfrac{\begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots \\ \phi(x)\end{array}}{\forall(x : A)\, \phi(x)}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{x : A}{\phi(x)}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \quad \forall(x : A)\, \phi(x)}{\theta}$	$\dfrac{\forall(x : A)\, \phi(x) \quad a : A}{\phi(a)}$
$=$	$\dfrac{}{a = a}$	$\dfrac{b : A \quad \phi(a) \quad a = b}{\phi(b)}$	

Πίνακας 1: Κανόνες φυσικής απαγωγής.

Ο καθολικός ποσοδείκτης έχει επίσης έναν ειδικό κανόνα απαλοιφής,

$$\frac{\forall(x : A)\ \phi(x) \qquad a : A}{\phi(a)}\ \forall\mathcal{S}\ ,$$

ο οποίος, όπως και στην περίπτωση της συνεπαγωγής, λαμβάνεται από τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{f : \forall(x : A)\ \phi(x) \qquad a : A}{\mathsf{apply}_f(a) : \phi(a)}$$

τού μετασχηματισμού apply που ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{apply}_{\lambda(x : A)\ b(x)}(a)\ :\equiv\ b(a).$$

Και πάλι, οι δύο κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι συνεπεία τού εναλλακτικού ορισμού

$$\mathsf{rec}_{\forall(x : A)\ \phi(x)}(z, f)\ :\equiv\ z((x : A)\ \mathsf{apply}_f(x))$$

τού αναδρομέα τού καθολικού ποσοδείκτη.

Ισότητα

Ελέγχεται κατά πόσον η ισότητα είναι λογική έννοια. Ωστόσο, έχει αρκετά λογικά χαρακτηριστικά ώστε να δικαιολογείται η θέση της στο κεφάλαιο της λογικής. Μια και για την ισότητα έχουμε μιλήσει ήδη στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορούμε να περάσουμε απ΄ ευθείας στο δια ταύτα.

Η ισότητα προς a έχει τον κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{a = a}\ {=}\mathcal{I}$$

και τον κανόνα απαλοιφής

$$\frac{b : A \qquad \phi(a) \qquad a = b}{\phi(b)}\ {=}\mathcal{E}\ ,$$

όπου η $(x : A)\ \phi(x)$ είναι οικογένεια προτάσεων.

Όλοι οι κανόνες φυσικής απαγωγής βρίσκονται συγκεντρωμένοι στον πίνακα 1.

5 Στοιχειώδης θεωρία τύπων

Η καθιερωμένη παλέτα τύπων τής MLTT περιλαμβάνει, εκτός από την ισότητα, διάφορους πεπερασμένους τύπους ($\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, κλπ.), γινόμενα $A \times B$ και αθροίσματα $A + B$ τύπων, τύπους συναρτήσεων $A \longrightarrow B$, αθροίσματα $\sum(x : A)\ B(x)$ και γινόμενα $\prod(x : A)\ B(x)$ οικογενειών, τύπους W, τον τύπο των φυσικών αριθμών, και, κατά περίπτωση, άλλους γειωμένους τύπους (τύπους λιστών κλπ.).

5.1 Ισότητα

Για την ισότητα έχουμε μιλήσει ήδη σε προηγούμενα κεφάλαια. Τώρα θα ορίσουμε πάλι την ισότητα, αυτή τη φορά ως οικογένεια ως προς αμφότερα τα σκέλη. Αυτός ο «συμμετρικός» ορισμός τής ισότητας, μολονότι είναι ισοδύναμος με τον άλλον, έχει περισσότερο τυποθεωρητικό νόημα.

Τύπος	Πρόταση
Μέλος	Τεκμήριο αλήθειας
Μετασχηματισμός	Απόδειξη
$\mathbf{0}$	$\perp$
$\mathbf{1}$	$\top$
$\times$	$\&$
$+$	$\vee$
$\rightarrow$	$\supset$
$\sum$	$\exists$
$\prod$	$\forall$
$=$	$=$

Πίνακας 2: Αντιστοιχία μεταξύ τυποθεωρητικών και λογικών εννοιών.

Έστω A τύπος. Η *ισότητα* του A είναι η οικογένεια

$$(x, y : A)\ x =_A y$$

που έχει τον κατασκευαστή

$$(x : A)\ \mathsf{refl}_x : x =_A x,$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x : A}{\mathsf{refl}_x : x =_A x.}$$

Από λογική άποψη, ο κανόνας αυτός λέει ότι η ισότητα είναι σχέση ανακλαστική.

Η αρχή τής αναδρομής για την ισότητα έχει ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x, y : A)\ C(x, y)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ c_{\mathsf{refl}}(x) : C(x, x)$,

η σχέση

$$t(a, a, \mathsf{refl}_a)\ :\equiv c_{\mathsf{refl}}(a)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x, y : A, p : x =_A y)\ t(x, y, p) : C(x, y)$. Ο ως άνω ορισμός γράφεται, εναλλακτικά,

$$t(a, b, p)\ :\equiv \mathsf{rec}^C_{a=b}(c_{\mathsf{refl}}, p),$$

αξιοποιώντας τόν σχετικό αναδρομέα

$$((x : A)\ y(x) : C(x, x), a, b : A, p : a =_A b)\ \mathsf{rec}^C_{a=b}(y, p) : C(a, b).$$

Ο αναδρομέας αυτός έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ y(x) : C(x, x)\end{array} \qquad a, b : A \qquad p : a =_A b}{\mathsf{rec}^C_{a=b}(y, p) : C(a, b)},$$

ο οποίος, αναγνωσμένος λογικά, λέει ότι η ισότητα είναι η μικρότερη ανακλαστική σχέση, και ορίζεται μέσω τής αναδρομής

$$\mathsf{rec}^{C}_{a=a}(y, \mathsf{refl}_a) \;:\equiv\; y(a).$$

Η ισότητα συνοδεύεται επίσης από μία αρχή επαγωγής, η οποία λέει ότι, δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x, y : A, p : x =_A y)\; C(x, y, p)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A)\; c_{\mathsf{refl}}(x) : C(x, x, \mathsf{refl}_x)$,

η σχέση

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) \;:\equiv\; c_{\mathsf{refl}}(x)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x, y : A, p : x =_A y)\; t(x, y, p) : C(x, y, p)$. Έχουμε έναν επαγωγέα

$$((x : A)\; y(x) : C(x, x, \mathsf{refl}_x), a, b : A, p : a =_A b)\; \mathsf{ind}^{C}_{a=b}(y, p) : C(a, b, p),$$

ο οποίος έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ y(x) : C(x, x, \mathsf{refl}_x)\end{array} \qquad a, b : A \qquad p : a =_A b}{\mathsf{ind}^{C}_{a=b}(y, p) : C(a, b)}$$

και ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}^{C}_{a=a}(y, \mathsf{refl}_a) \;:\equiv\; y(a).$$

5.2 Τύποι συναρτήσεων

Δοθέντων δύο τύπων A και B, ο τύπος $A \longrightarrow B$ των *συναρτήσεων* με πεδίο ορισμού A και πεδίο τιμών B έχει τον κατασκευαστή

$$((x : A)\; b(x) : B)\; \lambda(b) : A \longrightarrow B,$$

ή, ως κανόνας σχηματισμού,

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ b(x) : B\end{array}}{\lambda(b) : A \longrightarrow B.}$$

Η αρχή επαγωγής τού $A \longrightarrow B$ είναι ένας τρόπος ορισμού μετασχηματισμών από τον $A \longrightarrow B$ προς οικογένειες τής μορφής $(f : A \longrightarrow B)\; C(f)$: Δοθέντος ενός μετασχηματισμού

$$((x : A)\; b(x) : B)\; c_{\lambda}(b) : C(\lambda(b))$$

η σχέση

$$t(\lambda(b)) \;:\equiv\; c_{\lambda}(b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(f : A \longrightarrow B)\; t(f) : C(f)$. Ο ορισμός αυτός μπορεί να εκφραστεί και με τη βοήθεια του επαγωγέα τού $A \longrightarrow B$:

$$t(f) \;:\equiv\; \mathsf{ind}^{C}_{A\longrightarrow B}(c_{\lambda}, f).$$

Ο $\mathsf{ind}^C_{A\to B}$ έχει τη μορφή

$$(((x:A)\ y(x):B)\ z(y):C(\lambda(y)), f:A\longrightarrow B)\ \mathsf{ind}^C_{A\to B}(z,f):C(f),$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{\left(\dfrac{x:A}{y(x):B}\right) \quad \begin{matrix} \\ z(y):C(\lambda(y)) \qquad f:A\longrightarrow B\end{matrix}}{\mathsf{ind}^C_{A\to B}(z,f):C(f)},$$

και ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{ind}^C_{A\to B}(z,\lambda(b))\ :\equiv z(b).$$

Ο $\mathsf{rec}^C_{A\to B}$ είναι η ειδική περίπτωση του $\mathsf{ind}^C_{A\to B}$ κατά την οποία η οικογένεια C είναι σταθερή.

Είπαμε ότι οι δύο εκδοχές τής ισότητας που έχουμε περιγράψει είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. Το επόμενο θεώρημα αφορά τη μία κατεύθυνση της ισοδυναμίας: Ο αναδρομέας τής ισότητας προς a είναι εκφράσιμος από τον αναδρομέα τής ισότητας. (Η άλλη κατεύθυνση είναι αυτόματη, αλλά δε θα μας απασχολήσει· στο εξής θα έχουμε να κάνουμε μόνο με την ισότητα.)

Θεώρημα 7. *Εάν $(x:A)\ B(x)$ οικογένεια και $p:a=_A b$, τότε υπάρχει συνάρτηση*

$$p_*:B(a)\longrightarrow B(b).$$

Απόδειξη. Η p_* θα οριστεί με αναδρομή στο p. Θεωρούμε την οικογένεια τύπων $(x,y:A)\ C(x,y)$ με

$$C(x,y)\ :\equiv B(x)\longrightarrow B(y),$$

και θέτουμε

$$(\mathsf{refl}_a)_*\ :\equiv \lambda(x:B(a))\ x.$$

□

Η *εφαρμογή* $\mathsf{apply}_f(x)$ τής συνάρτησης $f:A\longrightarrow B$ στο όρισμα $x:A$ ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{apply}_{\lambda(b)}(x)\ :\equiv b(x).$$

Ιδιαίτερα, με τα δεδομένα τού θεωρήματος 7 ορίζεται ο μετασχηματισμός

$$\mathsf{transport}^B(p,x)\ :\equiv \mathsf{apply}_{p_*}(x),$$

ο οποίος ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση (2) τού αναδρομέα τής ισότητας προς a:

$$\mathsf{transport}^C(\mathsf{refl}_a,c)\equiv c. \tag{9}$$

Κατά συνέπεια, τα λήμματα 1–4, οι αποδείξεις των οποίων χρησιμοποιούν την αρχή αναδρομής τής ισότητας προς a, εξακολουθούν να ισχύουν για την ισότητα.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε παρατηρήσει ότι ο $\mathsf{rec}_{A\to B}$ θα μπορούσε να οριστεί μέσω τού apply. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός

$$\mathsf{rec}'_{A\to B}(z,f)\ :\equiv z(\mathsf{apply}_f)$$

ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{rec}_{A\to B}$,

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}'_{A\to B}(z,\lambda(b)) &\equiv z(\mathsf{apply}_{\lambda(b)})\\ &\equiv z(b).\end{aligned}$$

Η απόπειρα επέκτασης του γεγονότος αυτού στον $\mathsf{ind}_{A\to B}$ προσκρούει στο ότι υπάρχει ασυμφωνία τύπων:

$$\begin{aligned}z(\mathsf{apply}_f) &: C(\lambda(\mathsf{apply}_f)),\\ \mathsf{ind}_{A\to B}(z,f) &: C(f).\end{aligned}$$

Ο τρόπος να συσχετίσουμε αυτά τα δύο στιγμιότυπα της C μάς παρέχεται από το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 8. *Για οποιαδήποτε $f : A \longrightarrow B$ υπάρχει ένα*

$$\eta_{A\to B}(f) : \lambda(\mathsf{apply}_f) = f$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\eta_{A\to B}(\lambda(b)) \equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην f· εάν η f είναι τής μορφής $\lambda(b)$, τότε

$$\lambda(\mathsf{apply}_{\lambda(b)}) \equiv \lambda(b)$$

(από τον ορισμό τού apply), οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$\eta_{A\to B}(\lambda(b)) :\equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}.$$ □

Συνοψίζοντας, έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}\mathsf{apply}_{\lambda(b)} &\equiv b,\\ \lambda(\mathsf{apply}_f) &= f.\end{aligned}$$

Εφ΄ όσον έχουμε τον $\eta_{A\to B}$, μπορούμε πλέον να θέσουμε

$$\mathsf{ind}'_{A\to B}(z,f) :\equiv \mathsf{transport}^C(\eta_{A\to B}(f), z(\mathsf{apply}_f)).$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι ο $\mathsf{ind}'_{A\to B}$ ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{A\to B}$:

$$\mathsf{ind}'_{A\to B}(z,\lambda(b)) \equiv z(b).$$

Πόρισμα 9. *Ο $\mathsf{ind}_{A\to B}$ είναι ορίσιμος από τους apply και $\eta_{A\to B}$.* □

Εξ αιτίας αυτού, η συνήθης πρακτική κατά την παρουσίαση της θεωρίας τύπων είναι ο $\mathsf{ind}_{A\to B}$ να αποσιωπάται προς χάριν των apply και $\eta_{A\to B}$. Αυτά θα χρησιμοποιούμε κι εμείς στο εξής· μάλιστα, θα υιοθετήσουμε τον καθιερωμένο στα μαθηματικά συμβολισμό και θα γράφουμε, κάπως καταχρηστικά, απλώς $f(x)$ στη θέση τού $\mathsf{apply}_f(x)$.

Έχοντας εγκαθιδρύσει αυτόν τον συμβολισμό, ο apply_f γράφεται

$$(x : A)\, f(x).$$

Οι τιμές ενός μετασχηματισμού μπορούν να είναι μέλη διαφορετικών στιγμιοτύπων μιας οικογένειας. Αυτή είναι η περίπτωση με τους μετασχηματισμούς που ορίζονται με αναδρομή στην ισότητα (και σε οποιαδήποτε άλλη οικογένεια), όπως και με τους επαγωγείς των διαφόρων τύπων. Σε έναν τέτοιο μετασχηματισμό $(x : A)\, b(x) : B(x)$ αντιστοιχεί μία συνάρτηση f με $f(x) : B(x)$ για $x : A$. Οι συναρτήσεις με αυτή τη γενικότερη έννοια, οι οποίες λέγονται και «εξαρτώμενες» συναρτήσεις, συγκροτούν έναν τύπο, το *(εξαρτώμενο) γινόμενο* τής οικογένειας $(x : A)\, B(x)$, ο οποίος συμβολίζεται

$$\prod(x : A)\ B(x).$$

Ο τύπος αυτός έχει τον κατασκευαστή

$$((x : A)\ b(x) : B(x))\ \lambda(b) : \prod(x : A)\ B(x),$$

με κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ b(x) : B(x)\end{array}}{\lambda(b) : \prod(x : A)\ B(x).}$$

Είναι φανερό από την περιγραφή τού $\prod(x : A)\ B(x)$ ότι ο $A \longrightarrow B$ είναι η ειδική περίπτωση στην οποία η οικογένεια $(x : A)\ B(x)$ είναι σταθερή. Ισχύουν παρόμοια πράγματα με την περίπτωση των απλών συναρτήσεων· η αρχή τής επαγωγής, φερ΄ ειπείν, μας επιτρέπει να ορίζουμε μετασχηματισμούς τής μορφής

$$(f : \prod(x : A)\ B(x))\ t(f) : C(f),$$

όπου $(f : \prod(x : A)\ B(x))\ C(f)$ οικογένεια, θέτοντας

$$t(\lambda(b)) :\equiv c_\lambda(b)$$

για κάποιον κατάλληλο μετασχηματισμό $((x : A)\ b(x) : B(x))\ c_\lambda(b) : C(\lambda(b))$. Ο επαγωγέας

$$(((x : A)\ b(x) : B(x))\ z(b) : C(\lambda(b)), f : \prod(x : A)\ B(x))\ \mathsf{ind}^C_{\prod(x : A)\ B(x)}(z, f) : C(f)$$

έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\left(\dfrac{x : A}{b(x) : B(x)}\right) \atop z(b) : C(\lambda(b)) \qquad f : \prod(x : A)\ B(x)}{\mathsf{ind}^C_{\prod(x : A)\ B(x)}(z, f) : C(f)},$$

και την ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}^C_{\prod(x : A)\ B(x)}(z, \lambda(b)) :\equiv z(b).$$

Η εφαρμογή συνάρτησης σε όρισμα ορίζεται όπως και στην περίπτωση των απλών συναρτήσεων, και ισχύει το ανάλογο του λήμματος 8:

Λήμμα 10. *Για οποιαδήποτε $f : \prod(x : A)\ B(x)$ υπάρχει ένα*

$$\eta_{\prod(x : A)\ B(x)}(f) : \lambda(x : A)\, f(x) = f$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\eta_{\prod(x : A)\ B(x)}(\lambda(b)) \equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}$. □

5.3 Τύποι ζευγών

Τα ζεύγη τα αποτελούμενα από ένα μέλος τού τύπου A_1 και ένα τού τύπου A_2 αποτελούν έναν τύπο $A_1 \times A_2$, το *(καρτεσιανό) γινόμενο* των A_1 και A_2, ο οποίος έχει τον κατασκευαστή

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ \mathsf{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2,$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x_1 : A_1 \qquad x_2 : A_2}{\mathsf{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2.}$$

Από την παραπάνω περιγραφή συνάγεται η εξής αρχή επαγωγής για τον $A_1 \times A_2$: Δοθέντων μιας οικογένειας

$$(x : A_1 \times A_2)\ C(x)$$

και ενός μετασχηματισμού

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)),$$

μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : A_1 \times A_2)\ t(x) : C(x)$ θέτοντας

$$t(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a_1, a_2).$$

Από την αρχή επαγωγής λαμβάνεται ο επαγωγέας

$$((x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ z(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)), x : A_1 \times A_2)\ \mathsf{ind}^C_{A_1 \times A_2}(z, x) : C(x),$$

με κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\\ z(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2))\end{array} \qquad x : A_1 \times A_2}{\mathsf{ind}^C_{A_1 \times A_2}(z, x) : C(x)}$$

και ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}^C_{A_1 \times A_2}(z, \mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ :\equiv z(a_1, a_2).$$

Οι προβολές

$$(x : A_1 \times A_2)\ \mathsf{pr}_1(x) : A_1,$$
$$(x : A_1 \times A_2)\ \mathsf{pr}_2(x) : A_2$$

ορίζονται από τις αναδρομές

$$\mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ :\equiv a_1,$$
$$\mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) \ :\equiv a_2,$$

και, αντιστρόφως, ο αναδρομέας τού $A_1 \times A_2$ είναι ορίσιμος από αυτές:

$$\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}(z, x) \ :\equiv z(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)).$$

Όπως συνέβη και με τους τύπους συναρτήσεων, προκειμένου να πάρουμε πίσω τον $\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}$ από τις pr_1 και pr_2 χρειαζόμαστε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο έχει και ανεξάρτητη χρησιμότητα.

Λήμμα 11. *Για οποιοδήποτε $x : A_1 \times A_2$, υπάρχει ένα*

$$\eta_{A_1\times A_2}(x) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\eta_{A_1\times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1,x_2)}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο x, θέτοντας

$$\eta_{A_1\times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) \ :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1,x_2)}.$$

□

Άσκηση 5.1. Ορίστε, με τη βοήθεια των pr_i και $\eta_{A_1\times A_2}$, έναν μετασχηματισμό ο οποίος ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{A_1\times A_2}$.

Έχουμε, επίσης, τον τύπο $\mathbf{1}$ με ένα μέλος, ο οποίος έχει τον κατασκευαστή

$$0_{\mathbf{1}} : \mathbf{1},$$

και του οποίου ο επαγωγέας

$$(z : C(0_{\mathbf{1}}), x : \mathbf{1})\ \mathsf{ind}_{\mathbf{1}}^{C}(z, x) : C(x),$$

ο οποίος ορίζεται από την επαγωγή

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}^{C}(z, 0_{\mathbf{1}}) \ :\equiv z,$$

είναι κατάτι χρησιμότερος από τον αναδρομέα του.

Άσκηση 5.2. Για οποιοδήποτε $x : \mathbf{1}$, υπάρχει ένα

$$\eta_{\mathbf{1}}(x) : 0_{\mathbf{1}} = x$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\eta_{\mathbf{1}}(0_{\mathbf{1}}) \equiv \mathsf{refl}_{0_{\mathbf{1}}}$.

Λύση. Μπορούμε να γράψουμε απ΄ ευθείας ένα μέλος τού τύπου $0_{\mathbf{1}} = x$:

$$\eta_{\mathbf{1}}(x) \ :\equiv \mathsf{ind}_{\mathbf{1}}^{(x\,:\,1)\ 0_{\mathbf{1}}=x}(\mathsf{refl}_{0_{\mathbf{1}}}, x).$$

Η ζητούμενη σχέση είναι άμεση. □

Εφ΄ όσον ο $\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}$ ορίζεται (χωρίς αναδρομή), ο $\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}$ ορίζεται (μόνο) από τον $\eta_{\mathbf{1}}$ μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}^{C}(z, x) \ :\equiv \mathsf{transport}^{C}(\eta_{\mathbf{1}}(x), z).$$

Άσκηση 5.3. Δείξτε ότι ο έτσι ορισμένος $\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}$ ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση τού επαγωγέα τού $\mathbf{1}$.

Εάν έχουμε μία οικογένεια $(x : A)\ B(x)$, μπορούμε επίσης να σχηματίζουμε ζεύγη $\mathsf{pair}(a, b)$ με $a : A$ και $b : B(a)$. Αυτά τα ζεύγη, τα οποία ενίοτε καλούνται *εξαρτώμενα* ζεύγη, συγκροτούν έναν τύπο $\sum(x : A)\, B(x)$, το *(εξαρτώμενο) άθροισμα* της $(x : A)\, B(x)$, με κατασκευαστή

$$(x : A, y : B(x))\ \mathsf{pair}(x, y) : \textstyle\sum(x : A)\ B(x),$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x : A \qquad y : B(x)}{\mathsf{pair}(x, y) : \sum(x : A)\ B(x).}$$

Φυσικά, εάν η $(x : A)\ B(x)$ είναι σταθερή, αυτό που περιγράψαμε είναι το γινόμενο $A \times B$.

Έχουμε μία αρχή επαγωγής, που λέει ότι δοθέντων μιας οικογένειας

$$(w : \textstyle\sum(x : A)\ B(x))\ C(w)$$

και ενός μετασχηματισμού

$$(x : A, y : B(x))\ c_{\mathsf{pair}}(x, y) : C(\mathsf{pair}(x, y)),$$

η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(a, b)) \ :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a, b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό

$$(w : \textstyle\sum(x : A)\ B(x))\ t(w) : C(w).$$

Ορίζεται, επομένως, ένας επαγωγέας

$$((x : A, y : B(x))\ z(x, y) : C(\mathsf{pair}(x, y)), w : \textstyle\sum(x : A)\ B(x))\ \mathsf{ind}^{C}_{\sum(x : A)\ B(x)}(z, w) : C(w),$$

ο οποίος έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x : A, y : B(x))\\ z(x, y) : C(\mathsf{pair}(x, y))\end{array} \qquad w : \sum(x : A)\ B(x)}{\mathsf{ind}^{C}_{\sum(x : A)\ B(x)}(z, w) : C(w)},$$

και ορίζεται από την αναδρομή

$$\mathsf{ind}^{C}_{\sum(x : A)\ B(x)}(z, \mathsf{pair}(a, b)) \ :\equiv z(a, b).$$

Οι προβολές τώρα έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned}&(w : \textstyle\sum(x : A)\ B(x))\ \mathsf{pr}_1(w) : A,\\ &(w : \textstyle\sum(x : A)\ B(x))\ \mathsf{pr}_2(w) : B(\mathsf{pr}_1(w)),\end{aligned}$$

και ορίζονται όπως και στην περίπτωση των μη εξαρτώμενων ζευγών,

$$\begin{aligned}\mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(a, b)) \ &:\equiv a,\\ \mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(a, b)) \ &:\equiv b.\end{aligned}$$

Ο $\mathsf{ind}_{\sum(x : A)\ B(x)}$ μπορεί και εδώ να εκφραστεί μέσω των pr_i, με τη βοήθεια του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 12. *Για οποιοδήποτε $w : \sum(x : A)\ B(x)$, υπάρχει ένα*

$$\eta_{\sum(x : A)\ B(x)}(w) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(w), \mathsf{pr}_2(w)) = w$$

το οποίο ικανοποιεί τη σχέση $\eta_{\sum(x : A)\ B(x)}(\mathsf{pair}(x, y)) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x,y)}$.

Απόδειξη. Όπως στο λήμμα 11. □

5.4 Αθροίσματα

Το *άθροισμα* $A_1 + A_2$ δύο τύπων A_1 και A_2 είναι το τυποθεωρητικό ανάλογο της ξένης ένωσης στη θεωρία συνόλων, του συν-γινομένου στη θεωρία κατηγοριών και της διάζευξης στη λογική. Έχει δύο κατασκευαστές

$$(x_1 : A_1)\ \mathsf{in}_1(x_1) : A_1 + A_2,$$
$$(x_2 : A_2)\ \mathsf{in}_2(x_2) : A_1 + A_2,$$

με κανόνες σχηματισμού

$$\frac{x_1 : A_1}{\mathsf{in}_1(x_1) : A_1 + A_2} \qquad \frac{x_2 : A_2}{\mathsf{in}_2(x_2) : A_1 + A_2}.$$

Η αρχή τής επαγωγής για τον $A_1 + A_2$ είναι ο ορισμός με διάκριση περιπτώσεων: Δοθέντων μιας οικογένειας

$$(x : A_1 + A_2)\ C(x)$$

και μετασχηματισμών

$$(x_1 : A_1)\ c_{\mathsf{in}_1}(x) : C(\mathsf{in}_1(x)),$$
$$(x_2 : A_2)\ c_{\mathsf{in}_2}(x) : C(\mathsf{in}_2(x)),$$

μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : A_1 + A_2)\ t(x) : C(x)$ θέτοντας

$$t(\mathsf{in}_1(a_1)) \ :\equiv\ c_{\mathsf{in}_1}(a_1),$$
$$t(\mathsf{in}_2(a_2)) \ :\equiv\ c_{\mathsf{in}_2}(a_2).$$

Ο αναδρομέας

$$((x_1 : A_1)\, z_1(x_1) : C(\mathsf{in}_1(x_1)), (x_2 : A_2)\, z_2(x_2) : C(\mathsf{in}_2(x_2)), x : A_1 + A_2)\mathsf{ind}^C_{A_1+A_2}(z_1, z_2, x) : C(x)$$

τού $A_1 + A_2$ έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{\begin{array}{c}(x_1 : A_1)\\ z_1(x_1) : C(\mathsf{in}_1(x_1))\end{array} \quad \begin{array}{c}(x_2 : A_2)\\ z_2(x_2) : C(\mathsf{in}_2(x_2))\end{array} \quad x : A_1 + A_2}{\mathsf{ind}^C_{A_1+A_2}(z_1, z_2, x) : C(x)}$$

και ορίζουσες σχέσεις

$$\mathsf{ind}^C_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_1(a_1)) \ :\equiv\ z_1(a_1),$$
$$\mathsf{ind}^C_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_2(a_2)) \ :\equiv\ z_2(a_2).$$

Παρατήρηση. Η αλληλεπίδραση του αθροίσματος με ενδεχόμενες εξαρτήσεις θέτει την ακόλουθη πρόκληση: Ας θεωρήσουμε δύο οικογένειες $(x : A_1 + A_2)\ B(x)$ και $(x : A_1 + A_2)\ C(x)$, και δύο μετασχηματισμούς

$$(x_1 : A_1, y : B(\mathsf{in}_1(x_1)))\ c_1(x_1, y) : C(\mathsf{in}_1(x_1)),$$
$$(x_2 : A_2, y : B(\mathsf{in}_2(x_2)))\ c_2(x_2, y) : C(\mathsf{in}_2(x_2)),$$

και ας υποθέσουμε ότι αποπειρώμαστε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό

$$(x : A_1 + A_2, y : B(x))\ c(x, y) : C(x)$$

με επαγωγή στο πρώτο όρισμα:

$$\begin{aligned} c(\mathsf{in}_1(x_1), y) &:\equiv c_1(x_1, y), \\ c(\mathsf{in}_2(x_2), y) &:\equiv c_2(x_2, y). \end{aligned}$$

Εάν αντί για την αρχή τής επαγωγής τού $A_1 + A_2$ επιλέγαμε να χρησιμοποιήσουμε τον $\mathsf{ind}_{A_1+A_2}$, θα καταλήγαμε σε μία έκφραση της μορφής

$$\mathsf{ind}_{A_1+A_2}((x_1 : A_1)\ c_1(x_1, y), (x_2 : A_2)\ c_2(x_2, y), x).$$

Το πρόβλημα με αυτή την έκφραση είναι ότι οι μετασχηματισμοί $(x_i : A_i)\ c_i(x_i, y)$ δεν είναι καλά σχηματισμένοι, διότι το y εξαρτάται από το x_i και επομένως δε μπορεί να λειτουργήσει ως ανεξάρτητη παράμετρος. Η κατάσταση είναι ανάλογη με την περίπτωση της πολλαπλής αναδρομής. Η λύση, όπως και εκεί, είναι να εννοήσουμε τα ορίσματα του $\mathsf{ind}_{A_1+A_2}$ ως μετασχηματισμούς, οι τιμές των οποίων δύνανται να είναι με τη σειρά τους μετασχηματισμοί. Έχοντας κάνει αυτή τη συμφωνία μπορούμε να γράψουμε

$$c(x, y) :\equiv \mathsf{ind}_{A_1+A_2}((x_1 : A_1)\ d_1(x_1), (x_2 : A_2)\ d_2(x_2), x)(y),$$

όπου

$$\begin{aligned} d_1(x_1) &:\equiv (y : B(\mathsf{in}_1(x_1)))\ c_1(x_1, y), \\ d_2(x_2) &:\equiv (y : B(\mathsf{in}_2(x_2)))\ c_2(x_2, y). \end{aligned}$$

Φυσικά, μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις, εφ' όσον τις έχουμε.

Υπάρχει επίσης ένας τύπος $\mathbf{0}$ που δεν έχει κατασκευαστές (και επομένως δεν έχει μέλη), η αρχή επαγωγής τού οποίου δίνει, για οποιαδήποτε οικογένεια

$$(x : \mathbf{0})\ C(x)$$

έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathbf{0})\ t(x) : C(x)$$

χωρίς ορίζουσες σχέσεις (μια και δεν υπάρχει τίποτα στο οποίο να μπορεί να οριστεί). Αυτός ο μετασχηματισμός είναι και ο επαγωγέας

$$(x : \mathbf{0})\ \mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}(x) : C(x)$$

τού $\mathbf{0}$· ο κανόνας σχηματισμού τού $\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}$ έχει τη μορφή

$$\frac{x : \mathbf{0}}{\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}(x) : C(x).}$$

Εφ' όσον ο $\mathbf{0}$ δεν έχει κατασκευαστές, το αντίστοιχο λήμμα η είναι τετριμμένο: Για οποιοδήποτε $x : \mathbf{0}$, υπάρχει ένα $\eta_{\mathbf{0}}(x) : \mathbf{0}$. Αυτό, με τη σειρά του, σημαίνει ότι ο $\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}$ μπορεί να οριστεί από τον $\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}$. Πράγματι,

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}(x) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}^{C(x)}(x).$$

Ο τυπικός τρόπος για να δείξει κανείς ότι ένας τύπος A δεν έχει μέλη είναι να ορίσει έναν μετασχηματισμό

$$(x : A)\ t(x) : \mathbf{0}$$

(ή, ισοδύναμα, μία συνάρτηση $f : A \longrightarrow \mathbf{0}$): Η ύπαρξη ενός τέτοιου μετασχηματισμού σημαίνει ότι εάν ο A είχε ένα μέλος a, τότε ο $\mathbf{0}$ θα είχε το μέλος $t(a)$, άτοπο.

Άσκηση 5.4. Έστω E ο τύπος που έχει ως μοναδικό κατασκευαστή τον

$$(x : E)\ e(x) : E.$$

Δείξτε ότι ο E δεν έχει μέλη. [Υπόδειξη: Διατυπώστε πρώτα την αρχή αναδρομής τού E.]

Λύση. Θέλουμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : E)\ t(x) : \mathbf{0}$, και για τον σκοπό αυτόν θα χρειαστούμε την αρχή τής αναδρομής τού E: Δοθέντων

- ενός τύπου C, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : E, y : C)\ c_e(x, y) : C$,

η σχέση

$$t(e(x)) \ :\equiv\ c_e(x, t(x))$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : E)\ t(x) : C$.

Εάν πάρουμε για C τον τύπο $\mathbf{0}$, ο ζητούμενος μετασχηματισμός μπορεί να οριστεί από την αναδρομή

$$t(e(x)) \ :\equiv\ t(x)$$

(άλλως ειπείν, εφαρμόζουμε την αρχή τής αναδρομής, έχοντας θέσει $c_e(x, y) \ :\equiv\ y$).

5.5 Ο τύπος Bool

Ο Bool έχει δύο κατασκευαστές,

$$\mathsf{false}, \mathsf{true} : \mathrm{Bool}.$$

Ο Bool θα μπορούσε επίσης να οριστεί ως ο $\mathbf{1} + \mathbf{1}$, αλλά είναι χρήσιμο να τον έχουμε περιγράψει ανεξάρτητα. Αντιστρόφως, μπορούμε να ορίσουμε διμελή αθροίσματα από το $\sum$ και τον Bool (άσκηση 5.12).

Δοθέντων μιας οικογένειας $(x : \mathrm{Bool}) C(x)$, ενός $c_{\mathsf{false}} : C(\mathsf{false})$ και ενός $c_{\mathsf{true}} : C(\mathsf{true})$, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Bool})\ t(x) : C(x)$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\mathsf{false}) \ &:\equiv\ c_{\mathsf{false}}, \\ t(\mathsf{true}) \ &:\equiv\ c_{\mathsf{true}}. \end{aligned}$$

Αυτή η αρχή επαγωγής πακετάρεται στον επαγωγέα

$$(x : C(\mathsf{false}), y : C(\mathsf{true}), z : \mathrm{Bool})\ \mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(x, y, z) : C(z)$$

τού Bool, με κανόνα σχηματισμού

$$\frac{x : C(\mathsf{false}) \qquad y : C(\mathsf{true}) \qquad z : \mathrm{Bool}}{\mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(x, y, z) : C(z)}$$

και ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{false}) \ &:\equiv\ x, \\ \mathsf{ind}^C_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{true}) \ &:\equiv\ y. \end{aligned}$$

5.6 Ασκήσεις

Άσκηση 5.5. Περιγράψτε μία συνάρτηση

$$f : ((A_1 \to C) \times (A_2 \to C)) \to ((A_1 + A_2) \to C).$$

Λύση. Αρκεί να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό

$$(x : (A_1 \to C) \times (A_2 \to C))\ b(x) : (A_1 + A_2) \to C.$$

Γι΄ αυτό, αρκεί να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό

$$(x : (A_1 \to C) \times (A_2 \to C), y : A_1 + A_2)\ c(x, y) : C.$$

Ένας τέτοιος c μπορεί να οριστεί με αναδρομή στα x και y,

$$c(\mathsf{pair}(f_1, f_2), \mathsf{in}_i(y_i)) \ :\equiv f_i(y_i),\ \ i = 1, 2,$$

ή, ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τις προβολές και τον αναδρομέα τού $A_1 + A_2$:

$$c(x, y) \ :\equiv \mathsf{rec}_{A_1+A_2}(\mathsf{apply}_{\mathsf{pr}_1(x)}, \mathsf{apply}_{\mathsf{pr}_2(x)}, y).$$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f \ :\equiv \lambda(x : (A_1 \to C) \times (A_2 \to C))\ \lambda(y : A_1 + A_2)\ c(x, y).$$

Άσκηση 5.6. Περιγράψτε μία συνάρτηση

$$f : \prod(x : A_1 + A_2) \left[\left(\sum(x_1 : A_1)\ \mathsf{in}_1(x_1) = x\right) + \left(\sum(x_2 : A_2)\ \mathsf{in}_2(x_2) = x\right)\right].$$

Άσκηση 5.7. Ορίστε μία συνάρτηση

$$f : \left(\sum(x : \mathbf{1})\ A(x)\right) \to A(0_{\mathbf{1}})$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f(\mathsf{pair}(0_{\mathbf{1}}, a)) \equiv a.$$

Άσκηση 5.8. Χρησιμοποιήστε τόν $\mathsf{ind}_{\mathrm{Bool}}$ για να ορίσετε μία συνάρτηση

$$f : \prod(x : \mathrm{Bool})\ (\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x)$$

με $f(\mathsf{false}) \equiv \mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}})$ και $f(\mathsf{true}) \equiv \mathsf{in}_2(\mathsf{refl}_{\mathsf{true}})$.

Λύση. Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης από τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, αλλά εδώ μας ζητείται να την ορίσουμε απ΄ ευθείας. Θεωρούμε την οικογένεια $(x : \mathrm{Bool})\ C(x)$ με $C(x) \ :\equiv (\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x)$, και τα

$$\begin{aligned} c_{\mathsf{false}} \ &:\equiv \mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}}) : C(\mathsf{false}), \\ c_{\mathsf{true}} \ &:\equiv \mathsf{in}_2(\mathsf{refl}_{\mathsf{true}}) : C(\mathsf{true}), \end{aligned}$$

με τη βοήθεια των οποίων σχηματίζεται η συνάρτηση

$$\lambda(x : \mathrm{Bool})\ \mathsf{ind}^{C}_{\mathrm{Bool}}(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, x).$$

Άσκηση 5.9. Χρησιμοποιήστε τήν f τής προηγούμενης άσκησης για να ορίσετε τόν $\mathsf{ind}_{\mathrm{Bool}}$, και ελέγξτε ότι ο μετασχηματισμός που ορίσατε ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση του.

Λύση. Πρώτα ορίζουμε το

$$\mathsf{ind}^{C}_{\mathrm{Bool}}(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, x) : C(x),$$

όπου η $(x : \mathrm{Bool})\, C(x)$ είναι οικογένεια τύπων, $c_{\mathsf{false}} : C(\mathsf{false})$, $c_{\mathsf{true}} : C(\mathsf{true})$ και $x : \mathrm{Bool}$. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$(y : (\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x))\ t(y) : C(x)$$

που ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} t(\mathsf{in}_1(p)) &:\equiv \mathsf{transport}^{C}(p, c_{\mathsf{false}}), \\ t(\mathsf{in}_2(q)) &:\equiv \mathsf{transport}^{C}(q, c_{\mathsf{true}}), \end{aligned}$$

και θέτουμε

$$\mathsf{ind}^{C}_{\mathrm{Bool}}(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, x) :\equiv t(f(x)).$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιείται η ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{\mathrm{Bool}}$:

$$\begin{aligned} t(f(\mathsf{false})) &\equiv t(\mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}})) && (\text{ορισμός } f) \\ &\equiv \mathsf{transport}^{C}(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{false}}) && (\text{ορισμός } t) \\ &\equiv c_{\mathsf{false}} && (9) \end{aligned}$$

και όμοια για το true.

Άσκηση 5.10 (Ακολουθία Fibonacci)**.** Ορίστε έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathrm{Nat})\ \mathsf{fib}(x) : \mathrm{Nat}$$

ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις $\mathsf{fib}(0) = 0$, $\mathsf{fib}(1) = 1$, και $\mathsf{fib}(n+2) = \mathsf{fib}(n+1) + \mathsf{fib}(n)$.

Άσκηση 5.11 ([6, Άσκηση 1.4])**.** Μία ειδική περίπτωση του ορισμού με αναδρομή στον Nat είναι ο ορισμός με *επανάληψη* (iteration):

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv c_{\mathsf{s}}(t(n)), \end{aligned}$$

όπου C τύπος, $c_0 : C$ και $(x : C)\ c_{\mathsf{s}}(x) : C$. Αυτοί οι ορισμοί μπορούν, εναλλακτικά, να εκφραστούν με τη βοήθεια του *iterator* τού Nat, ο οποίος ορίζεται από την επανάληψη

$$\begin{aligned} \mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}(c_0, c_{\mathsf{s}}, 0) &:\equiv c_0, \\ \mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}(c_0, c_{\mathsf{s}}, \mathsf{s}(n)) &:\equiv c_{\mathsf{s}}(\mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}(c_0, c_{\mathsf{s}}, n)). \end{aligned}$$

Δοθέντων ενός τύπου C, ενός μέλους c_0 τού C, και ενός μετασχηματισμού $(x : \mathrm{Nat}, y : C)\ c_{\mathsf{s}}(x, y) : C$ ορίστε, χρησιμοποιώντας τόν $\mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}$ αντί τού $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}$, έναν μετασχηματισμό $(n : \mathrm{Nat})\ r(n) : C$ ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} r(0) &= c_0, \\ r(\mathsf{s}(n)) &= c_{\mathsf{s}}(n, r(n)), \end{aligned}$$

και συμπεράνετε ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n, $r(n) = \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(c_0, c_s, n)$. [Υπόδειξη: Πρώτα χρησιμοποιήστε τόν $\mathsf{iter}_{\mathrm{Nat}}$ για να ορίσετε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat} \times C)\ t(x) : \mathrm{Nat} \times C$, και εν συνεχεία εφαρμόστε ζεύγη και προβολές για να πάρετε τον r. Για τη δεύτερη ισότητα, κάντε επαγωγή στο n. Τέλος, χρησιμοποιήστε τό θεώρημα 5.]

Άσκηση 5.12 ([6, Άσκηση 1.5]). Εάν η $(x : \mathrm{Bool})\ A(x)$ είναι οικογένεια, δείξτε ότι ο τύπος $\sum(x : \mathrm{Bool})\ A(x)$ συμπεριφέρεται ως το άθροισμα των $A(\mathsf{false})$ και $A(\mathsf{true})$: Ορίστε μετασχηματισμούς in_1, in_2 και ind, και επαληθεύστε τις σχετικές ιδότητες.

Άσκηση 5.13 ([6, Άσκηση 1.6]). Εάν η $(x : \mathrm{Bool})\ A(x)$ είναι οικογένεια, ορίστε κατάλληλους μετασχηματισμούς

$$(x_{\mathsf{false}} : A(\mathsf{false}), x_{\mathsf{true}} : A(\mathsf{true}))\ \mathsf{pair}(x_{\mathsf{false}}, x_{\mathsf{true}}) : \prod(x : \mathrm{Bool})\ A(x),$$

και

$$(y : \prod(x : \mathrm{Bool})\ A(x))\ \mathsf{pr}_1(y) : A(\mathsf{false}),$$
$$(y : \prod(x : \mathrm{Bool})\ A(x))\ \mathsf{pr}_2(y) : A(\mathsf{true}),$$

και επαληθεύστε ότι ικανοποιούν τις προβλεπόμενες ορίζουσες σχέσεις.

6 Σύμπαντα

Σε μία πρώτη ανάγνωση, τα σύμπαντα είναι για τους τύπους ό,τι οι τύποι συναρτήσεων για τους μετασχηματισμούς. Τα μέλη ενός τύπου συναρτήσεων κωδικοποιούν κάποιους μετασχηματισμούς, και η αποκωδικοποίηση πραγματοποιείται από τον apply· τα μέλη ενός σύμπαντος κωδικοποιούν κάποιους τύπους, και η αποκωδικοποίηση πραγματοποιείται από ένα κατηγόρημα T. Ωστόσο, η αναλογία τελειώνει κάπου εδώ. Θα ξεκινήσουμε με κάποια πράγματα που μπορούμε να κάνουμε, ή θα θέλαμε να μπορούμε να κάνουμε, στη θεωρία τύπων.

6.1 Μεγάλη αναδρομή

Η αρχή αναδρομής ενός τύπου μάς επιτρέπει να ορίζουμε μετασχηματισμούς αξιοποιώντας τόν τρόπο με τον οποίο τα μέλη του παράγονται από τους διάφορους κατασκευαστές. Τίποτα δε χρησιμοποιείται από, ή προϋποτίθεται για, το πεδίο τιμών τού οριζόμενου μετασχηματισμού. Μπορούμε, επομένως, να άρουμε τον περιορισμό ότι το πεδίο τιμών είναι ένας τύπος, και να θεωρήσουμε γενικότερες μορφές μετασχηματισμών. Ένα είδος μετασχηματισμού που μας ενδιαφέρει είναι οι οικογένειες τύπων. Οι αναδρομές που ορίζουν οικογένειες ονομάζονται «μεγάλες» (“large”) αναδρομές. Στην περίπτωση του Bool έχουν την εξής μορφή: Δοθέντων δύο τύπων C_{false} και C_{true}, οι σχέσεις

$$C(\mathsf{false}) :\equiv C_{\mathsf{false}},$$
$$C(\mathsf{true}) :\equiv C_{\mathsf{true}},$$

ορίζουν μία οικογένεια $(x : \mathrm{Bool})\ C(x)$. Αυτή η αναδρομή συνοψίζεται στον λεγόμενο «μεγάλο» αναδρομέα $\mathrm{Rec}_{\mathrm{Bool}}$, με ορίζουσες σχέσεις

$$\mathrm{Rec}_{\mathrm{Bool}}(C_{\mathsf{false}}, C_{\mathsf{true}}, \mathsf{false}) :\equiv C_{\mathsf{false}},$$
$$\mathrm{Rec}_{\mathrm{Bool}}(C_{\mathsf{false}}, C_{\mathsf{true}}, \mathsf{true}) :\equiv C_{\mathsf{true}}.$$

Η άσκηση 5.8 χαρακτηρίζει τα μέλη τού Bool κατά το ήμισυ: κάθε μέλος τού Bool είναι ίσο με ένα εκ των false και true. Εφ΄ όσον έχουμε στη διάθεσή μας την μεγάλη αναδρομή, μπορούμε να συμπληρώσουμε αυτή την εικόνα δείχνοντας ότι αυτά τα δύο δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

Θεώρημα 13. *Υπάρχει μετασχηματισμός*

$$(p : \mathsf{true} = \mathsf{false})\ t(p) : \mathbf{0}.$$

Επομένως, $\mathsf{true} \neq \mathsf{false}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$(x : \mathrm{Bool})\ C(x)$$

που ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} C(\mathsf{false}) &:\equiv \mathbf{0}, \\ C(\mathsf{true}) &:\equiv \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$(p : \mathsf{true} = \mathsf{false})\ \mathsf{transport}^{C}(p, 0_1). \qquad \square$$

Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να συναγάγουμε όλες τις αναμενόμενες ανισότητες· για παράδειγμα,

Πόρισμα 14 (4ο αξίωμα του Peano)**.** *Για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n,* $\mathsf{s}(n) \neq \mathsf{0}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό που ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} t(\mathsf{0}) &:\equiv \mathsf{false}, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{true}. \end{aligned}$$

Εάν για κάποιον n, $\mathsf{s}(n) = \mathsf{0}$, τότε $\mathsf{true} = \mathsf{false}$, άτοπο. $\square$

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε την οικογένεια $(n : \mathrm{Nat})\ F_n$ των πεπερασμένων τύπων, όπου ο τύπος F_n έχει ακριβώς n μέλη, μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} F_{\mathsf{0}} &:\equiv \mathbf{0}, \\ F_{\mathsf{s}(n)} &:\equiv F_n + \mathbf{1}, \end{aligned}$$

ή χρησιμοποιώντας τόν μεγάλο αναδρομέα τού Nat:

$$F_n :\equiv \mathrm{Rec}_{\mathrm{Nat}}(\mathbf{0}, (X, Y)\ Y + \mathbf{1}, n).$$

Το επόμενο παράδειγμα έχει λογικό ενδιαφέρον, και θα μας οδηγήσει στο αντικείμενο του κεφαλαίου. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε έναν τύπο, τα μέλη τού οποίου αναπαριστούν τις προτάσεις τής γλώσσας τής κατηγορηματικής λογικής με ισότητα. Θα χρειαστεί πρώτα απ΄ όλα να διευθετήσουμε το θέμα των μεταβλητών (individual variables). Στις γλώσσες πρώτης τάξης, οι μεταβλητές έχουν πεδία διακύμανσης, τα λεγόμενα sorts. Συνήθως υπάρχει μόνο ένα sort, οπότε αυτό αποσιωπάται, καθώς δε συνεισφέρει κάτι στη διατύπωση. Η θεωρία των διανυσματικών χώρων, όμως, έχει δύο sorts, το Scalar για τα στοιχεία τού σώματος, και το Vector για τα στοιχεία τού διανυσματικού χώρου. Εμείς εδώ θα πραγματευθούμε τη γενική περίπτωση, οπότε θα θεωρήσουμε ότι μας έχει δοθεί ένας τύπος Sort, τα μέλη τού οποίου είναι τα σύμβολα της γλώσσας για τα διάφορα sorts, και επιπλέον, για κάθε $k : \mathrm{Sort}$, ένας τύπος $T_{\mathrm{Sort}}(k)$ που είναι το πεδίο διακύμανσης των μεταβλητών τού sort k. Αυτό θα μας επιτρέψει να περιγράψουμε τις προτάσεις απ΄ ευθείας, χρησιμοποιώντας τόν διαθέσιμο μηχανισμό τής περιβάλλουσας θεωρίας τύπων για να αναπαραστήσουμε τις φόρμουλες ως μετασχηματισμούς.

Για να μην προκληθεί σύγχυση με την ισότητα της θεωρίας τύπων, η ισότητα της γλώσσας θα συμβολίζεται eq. Ο τύπος Sent των τυπικών προτάσεων έχει τους κατασκευαστές

- $(r, s : \mathrm{Sent})\ r \,\&\, s : \mathrm{Sent}$,
- $(r, s : \mathrm{Sent})\ r \vee s : \mathrm{Sent}$,
- $(r, s : \mathrm{Sent})\ r \supset s : \mathrm{Sent}$,
- $\perp : \mathrm{Sent}$,
- $\top : \mathrm{Sent}$,
- $(k : \mathrm{Sort}, (x : T_{\mathrm{Sort}}(k))\ t(x) : \mathrm{Sent})\ \forall(k, t) : \mathrm{Sent}$,
- $(k : \mathrm{Sort}, (x : T_{\mathrm{Sort}}(k))\ t(x) : \mathrm{Sent})\ \exists(k, t) : \mathrm{Sent}$,
- $(k : \mathrm{Sort}, a, b : T_{\mathrm{Sort}}(k))\ \mathsf{eq}(k, a, b) : \mathrm{Sent}$.

Υπάρχουν πολλά πράγματα που θα μπορούσαμε να κάνουμε με την παραπάνω περιγραφή. Ωστόσο, ο σκοπός μας εδώ δεν είναι να κάνουμε λογική. Αυτό που μας ενδιαφέρει πρωτίστως είναι η ερμηνεία των τυπικών προτάσεων. Ορίζουμε λοιπόν την οικογένεια τύπων, ή κατηγόρημα,

$$(s : \mathrm{Sent})\ T(s)$$

μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned}
T(r \,\&\, s) &:\equiv T(r) \times T(s),\\
T(r \vee s) &:\equiv T(r) + T(s),\\
T(r \supset s) &:\equiv T(r) \longrightarrow T(s),\\
T(\perp) &:\equiv \mathbf{0},\\
T(\top) &:\equiv \mathbf{1},\\
T(\forall(k, t)) &:\equiv \textstyle\prod(x : T_{\mathrm{Sort}}(k))\ t(x),\\
T(\exists(k, t)) &:\equiv \textstyle\sum(x : T_{\mathrm{Sort}}(k))\ t(x),\\
T(\mathsf{eq}(k, a, b)) &:\equiv a =_{T_{\mathrm{Sort}}(k)} b.
\end{aligned}$$

Το T αποτελεί ανάθεση τεκμηρίων αλήθειας, ή απόδοση νοήματος, στις τυπικές προτάσεις. Σε πιο παραδοσιακή φιλοσοφική ορολογία, και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι οι τύποι είναι αναγνώσιμοι ως (ερμηνευμένες) προτάσεις, το $T(s)$ μπορεί να νοηθεί ως η πραγματική πρόταση που εκφράζει τις συνθήκες αλήθειας της τυπικής πρότασης s. Για τον λόγο αυτόν, αφ΄ ότου εισήχθη από τον Tarski στο [5], το T ονομάζεται το *κατηγόρημα της αλήθειας* του Sent.

6.2 Σύμπαντα κατά Tarski

Θα θέλαμε να μιμηθούμε την παραπάνω κατασκευή για να ορίσουμε έναν τύπο U, τα μέλη τού οποίου θα αναπαριστούν, με τη βοήθεια ενός κατηγορήματος T, κάποιους από τους τύπους. Τώρα δεν υπάρχει η διάκριση μεταξύ Sort και Sent, και τα U και T χρειάζεται να οριστούν από το μηδέν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην είναι πλέον εφικτός ο διαχωρισμός ανάμεσα στον ορισμό τού U και εκείνον τού T. Για παράδειγμα, ο κατασκευαστής που αντιστοιχεί στο εξαρτώμενο γινόμενο έχει τη μορφή

$$(a : U, (x : T(a))\ b(x) : U)\ \pi(a, b) : U,$$

ή, ως κανόνας σχηματισμού,

$$\frac{a : U \qquad \begin{array}{c}(x : T(a))\\ b(x) : U\end{array}}{\pi(a, b) : U},$$

όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι προκειμένου να σχηματίσουμε το $\pi(a, b)$ πρέπει ήδη να γνωρίζουμε το $T(a)$. Παρόμοια είναι η κατάσταση με το εξαρτώμενο άθροισμα και την ισότητα. Ο πλήρης αμοιβαίος ορισμός των U και T έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
(a, b : U)\ \mathsf{sum}(a, b) : U \qquad & T(\mathsf{sum}(a, b)) :\equiv T(a) + T(b),\\
\mathsf{zero} : U \qquad & T(\mathsf{zero}) :\equiv \mathbf{0},\\
\mathsf{one} : U \qquad & T(\mathsf{one}) :\equiv \mathbf{1},\\
(a : U, (x : T(a))\ b(x) : U)\ \pi(a, b) : U \qquad & T(\pi(a, b)) :\equiv \textstyle\prod(x : T(a))\ T(b(x)),\\
(a : U, (x : T(a))\ b(x) : U)\ \sigma(a, b) : U \qquad & T(\sigma(a, b)) :\equiv \textstyle\sum(x : T(a))\ T(b(x)),\\
(a : U, b, c : T(a))\ \mathsf{eq}(a, b, c) : U \qquad & T(\mathsf{eq}(a, b, c)) :\equiv b =_{T(a)} c.
\end{aligned}$$

Κάθε ρήτρα τού παραπάνω ορισμού αποτελείται από έναν κατασκευαστή τού U και την ορίζουσα σχέση τού T που αντιστοιχεί σε αυτόν τον κατασκευαστή, εις τρόπον ώστε οι κατασκευαστές τού U να μπορούν να αναφέρονται στον T. Οι ορισμοί αυτής της μορφής ονομάζονται *επαγωγικοαναδρομικοί (inductive-recursive)* ορισμοί, και τα ζεύγη (U, T) που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο ονομάζονται *σύμπαντα κατά Tarski*. Κατά τη συνήθη μαθηματική πρακτική, θα αναφερόμαστε στον U ως το σύμπαν, αντί τού (U, T).

Εάν $a : U$ με $T(a) \equiv A$, λέμε ότι το a είναι η *ανάκλαση* τού A στο U, και (εάν υπάρχει τέτοιο a) ότι ο A *ανακλάται* στο U. Στο παράδειγμα, οι τύποι που ανακλώνται στο σύμπαν είναι τα αθροίσματα (ανακλασμένων) τύπων, οι τύποι $\mathbf{0}$ και $\mathbf{1}$, τα εξαρτώμενα γινόμενα και αθροίσματα, και οι ισότητες. Ισοδύναμα, λέμε ότι το σύμπαν είναι *κλειστό* ως προς τους παραπάνω τρόπους σχηματισμού τύπων.

Η επιλογή των τύπων στον παραπάνω ορισμό είναι ενδεικτική. Θα μπορούσαμε, φερ΄ ειπείν, να προσθέσουμε ένα μέλος που να αναπαριστά τους φυσικούς αριθμούς:

$$\mathsf{nat} : U \qquad\qquad T(\mathsf{nat}) :\equiv \mathrm{Nat}.$$

Μπορούμε επίσης να ανακλάσουμε ένα σύμπαν U μέσα σε ένα (ευρύτερο) σύμπαν U', εντάσσοντας στον ορισμό τού U' τη ρήτρα

$$\mathsf{u} : U' \qquad\qquad T'(\mathsf{u}) :\equiv U.$$

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να σχηματίσουμε μία ολόκληρη ακολουθία

$$U_0, U_1, U_2, \ldots$$

συμπάντων, καθένα από τα οποία ανακλά όλα τα προηγούμενα. Εν συνεχεία, μπορούμε να ανακλάσουμε το ίδιο το σχήμα

$$(U)\,U'$$

σε ένα σύμπαν U_ω το οποίο, κατά συνέπεια, ανακλά όλα τα U_n. Και δεν υπάρχει λόγος να σταματήσουμε εδώ.

6.3 Σύμπαντα κατά Russell

Είναι εξαιρετικά βολικό, στην πράξη, να παραλείπουμε το T και να γράφουμε απ΄ ευθείας

$$A : U$$

αντί για

$$a : U, \text{ με } T(a) \equiv A.$$

Εάν αυτό το κάνουμε συστηματικά, οδηγούμαστε στην έννοια τού σύμπαντος κατά Russell: Ένα *σύμπαν κατά Russell* είναι ένας τύπος, τα μέλη τού οποίου είναι τύποι. Στην περίπτωση αυτή, για λόγους διάκρισης, χρησιμοποιούμε το καλλιγραφικό $\mathcal{U}$. Όπως στη θεωρία συνόλων, δεν μπορούμε να έχουμε ένα σύμπαν $\mathcal{U}_\infty$ που να περιέχει όλους τούς τύπους, συμπεριλαμβανομένου τού εαυτού του ($\mathcal{U}_\infty : \mathcal{U}_\infty$)· κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε παράδοξα (και, αισίως, δεν υπάρχει τρόπος να οριστεί ένα τέτοιο σύμπαν). Αντ΄ αυτού έχουμε, όπως στην περίπτωση των συμπάντων κατά Tarski, μία ιεραρχία

$$\mathcal{U}_0 : \mathcal{U}_1 : \mathcal{U}_2 : \cdots,$$

όπου κάθε σύμπαν $\mathcal{U}_n$ είναι μέλος τού επόμενου σύμπαντος $\mathcal{U}_{n+1}$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι η ιεραρχία αυτή είναι *συσσωρευτική*, δηλαδή κάθε μέλος τού $\mathcal{U}_n$ είναι επίσης μέλος τού $\mathcal{U}_{n+1}$. Αυτό μας απομακρύνει από την καθαρή θεωρία τύπων (συμπεριλαμβανομένων των συμπάντων κατά Tarski), όπου δεν τίθεται θέμα ένα μέλος ενός τύπου να είναι επίσης μέλος κάποιου άλλου τύπου, αλλά διευκολύνει πάρα πολύ τις διατυπώσεις και, σε κάθε περίπτωση, μπορούμε, αν θέλουμε, να το δούμε ως απλή κατάχρηση συμβολισμού. Επίσης, θα μπορούσαμε να προεκτείνουμε την ιεραρχία στο υπερπεπερασμένο, θεωρώντας ένα σύμπαν $\mathcal{U}_\omega$ που να περιέχει όλα τα $\mathcal{U}_n$ κ.ο.κ., αλλά αυτό είναι πια εσωτερικό θέμα τής θεωρίας τύπων χωρίς πρακτική χρησιμότητα. Όταν δεν έχει σημασία σε ποιο σύμπαν αναφερόμαστε, θα λέμε απλά $\mathcal{U}$ και θα εννοούμε κάποιο από τα $\mathcal{U}_n$.

Η κύρια χρησιμότητα των συμπάντων είναι ότι μας επιτρέπουν να κάνουμε με τύπους ό,τι μπορούμε να κάνουμε με τα μέλη ενός τύπου. Για παράδειγμα, μία οικογένεια μπορεί να γραφτεί ως μετασχηματισμός

$$(x : A)\,B(x) : \mathcal{U}$$

με τιμές σε ένα σύμπαν. Μπορούμε επίσης να θεωρούμε οικογένειες επί ενός σύμπαντος, π.χ.,

$$(A, B : \mathcal{U})\,A + B : \mathcal{U}.$$

Η οικογένεια F_n των πεπερασμένων τύπων μπορεί τώρα να οριστεί με τη βοήθεια του (μικρού) αναδρομέα τού Nat:

$$F_n \;:\equiv \mathsf{rec}^{\mathcal{U}}_{\mathrm{Nat}}(\mathbf{0}, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathcal{U})\ y + \mathbf{1}, n).$$

Μπορούμε επίσης να σχηματίζουμε γινόμενα και αθροίσματα τέτοιων οικογενειών· το άθροισμα όλων των τύπων που ανήκουν σε ένα σύμπαν $\mathcal{U}$ γράφεται

$$\sum(A : \mathcal{U})\, A$$

(και, για την περίπτωση που υπάρχει αμφιβολία, *δεν* είναι μέλος τού $\mathcal{U}$).

7 Ομοτοπική θεωρία τύπων[2]

Η κεντρική ιδέα στην ομοτοπική θεωρία τύπων είναι ότι μπορούμε να αντιληφθούμε τους τύπους ως χώρους στη θεωρία ομοτοπίας. Στην κλασική θεωρία ομοτοπίας, ένας χώρος X αναπαρίσταται από ένα σύνολο σημείων εφοδιασμένο με μία τοπολογία, και ένα μονοπάτι μεταξύ των σημείων x και y τού X αναπαρίσταται από μία συνεχή απεικόνιση $p : [0, 1] \longrightarrow X$, όπου $p(0) = x$ και $p(1) = y$. Από πολλές απόψεις, η αυστηρή (δηλαδή, κατά σημείο) ισότητα μονοπατιών είναι υπερβολικά λεπτή σχέση. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να ορίσει τις πράξεις τής συνένωσης μονοπατιών (αν το p είναι μονοπάτι από το x στο y και το q είναι μονοπάτι από το y στο z, τότε η συνένωση $p \cdot q$ είναι μονοπάτι από το x στο z) και της αντιστροφής (το p^{-1} είναι μονοπάτι από το y στο x). Ωστόσο, υπάρχουν φυσικές εξισώσεις μεταξύ αυτών των πράξεων που δεν ισχύουν για την αυστηρή ισότητα: Για παράδειγμα, το μονοπάτι $p \cdot p^{-1}$ (το οποίο πηγαίνει από το x στο y και πάλι πίσω) δεν είναι αυστηρά ίσο με το σταθερό μονοπάτι στο x.

Η λύση είναι να θεωρήσουμε μία αδρότερη έννοια ισότητας μονοπατιών που ονομάζεται *ομοτοπία*. Μία ομοτοπία μεταξύ των συνεχών απεικονίσεων $f : X_1 \longrightarrow X_2$ και $g : X_1 \longrightarrow X_2$ είναι μία συνεχής απεικόνιση $H : X_1 \times [0, 1] \longrightarrow X_2$ με $H(x, 0) = f(x)$ και $H(x, 1) = g(x)$. Προκειμένου για δύο μονοπάτια p και q από το x στο y, μία ομοτοπία είναι μία συνεχής απεικόνιση $H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$ με $H(s, 0) = p(s)$ και $H(s, 1) = q(s)$ για όλα τα $s \in [0, 1]$. Σε αυτήν την περίπτωση απαιτούμε επίσης ότι $H(0, t) = x$ και $H(1, t) = y$ για όλα τα $t \in [0, 1]$, ούτως ώστε για κάθε t η απεικόνιση $H(\_, t)$ να είναι και πάλι μονοπάτι από το x στο y· μία ομοτοπία αυτού τού είδους λέμε ότι *διατηρεί τα άκρα*. Δεδομένου ότι το $[0, 1] \times [0, 1]$ είναι διδιάστατο, μιλάμε επίσης για την H ως διδιάστατο *μονοπάτι μεταξύ μονοπατιών*.

Για παράδειγμα, επειδή το $p \cdot p^{-1}$ φεύγει και επιστρέφει κατά μήκος τής ίδιας διαδρομής, γνωρίζουμε ότι μπορούμε να συρρικνώσουμε συνεχώς το $p \cdot p^{-1}$ στο σταθερό μονοπάτι—δε θα πιαστεί, για παράδειγμα, γύρω από μία τρύπα στον χώρο. Η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας, και πράξεις όπως η συνένωση, η αντιστροφή, κ.λπ. την σέβονται. Επιπλέον, οι κλάσεις ισοδυναμίας των ομοτοπικών βρόχων (loops) σε κάποιο σημείο x_0 (όπου δύο βρόχοι p και q εξισώνονται όταν υπάρχει μία *βασισμένη* ομοτοπία μεταξύ τους, δηλαδή μία ομοτοπία H όπως παραπάνω που ικανοποιεί επιπλέον $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ για όλα τα t) σχηματίζουν μία ομάδα που ονομάζεται *θεμελιώδης ομάδα*. Αυτή η ομάδα είναι μία *αλγεβρική αναλλοίωτη* ενός χώρου, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διερευνηθεί εάν δύο χώροι είναι *ομοτοπικά ισοδύναμοι* (υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις εκατέρωθεν, οι συνθέσεις των οποίων είναι ομοτοπικές προς τις ταυτοτικές), επειδή οι ισοδύναμοι χώροι έχουν ισομορφικές θεμελιώδεις ομάδες.

Επειδή οι ομοτοπίες είναι οι ίδιες ένα είδος διδιάστατου μονοπατιού, υπάρχει μία φυσική έννοια τριδιάστατης *ομοτοπίας μεταξύ ομοτοπιών*, και, στη συνέχεια, *ομοτοπίας μεταξύ ομοτοπιών μεταξύ ομοτοπιών*, και ούτω καθεξής. Αυτός ο άπειρος πύργος

[2] Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο [6, κεφάλαιο 2].

σημείων, μονοπατιών, ομοτοπιών, ομοτοπιών μεταξύ ομοτοπιών, ..., εφοδιασμένος με αλγεβρικές πράξεις όπως η θεμελιώδης ομάδα, είναι στιγμιότυπο μιας αλγεβρικής δομής που ονομάζεται (ασθενές) ∞-*ομαδοειδές*. Ένα ∞-ομαδοειδές αποτελείται από μία συλλογή αντικειμένων, μία συλλογή *μορφισμών* μεταξύ αντικειμένων, και στη συνέχεια *μορφισμών μεταξύ μορφισμών*, και ούτω καθεξής, εφοδιασμένων με κάποια περίπλοκη αλγεβρική δομή· ένας μορφισμός στο επίπεδο k ονομάζεται k-μορφισμός. Οι μορφισμοί σε κάθε επίπεδο έχουν ταυτοτικούς, σύνθεση και αντιστροφή, τα οποία είναι ασθενή με την έννοια ότι ικανοποιούν τους νόμους τού ομαδοειδούς (η σύνθεση είναι προσεταιριστική, οι ταυτοτικοί είναι ουδέτερα στοιχεία για τη σύνθεση, τα αντίστροφα απλοποιούνται) μόνο κατά προσέγγιση μορφισμών στο επόμενο επίπεδο, και αυτό δημιουργεί περαιτέρω δομή. Για παράδειγμα, επειδή η προσεταιριστικότητα της σύνθεσης μορφισμών $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$ είναι η ίδια μορφισμός ανώτερης διάστασης, χρειάζονται πρόσθετες πράξεις που να συσχετίζουν τις διάφορες αποδείξεις προσεταιριστικότητας: Οι διάφοροι τρόποι συσχετισμού τού $p \cdot (q \cdot (r \cdot s))$ με το $((p \cdot q) \cdot r) \cdot s$ δημιουργούν το πεντάγωνο του Mac Lane.

Στην ομοτοπική θεωρία τύπων, κάθε τύπος έχει τη δομή ενός ∞-ομαδοειδούς. Θυμηθείτε ότι για οποιονδήποτε τύπο A και οποιαδήποτε $x, y : A$ έχουμε έναν τύπο ισότητας $x = y$. Λογικά, μπορούμε να σκεφτούμε τα μέλη τού $x = y$ ως τεκμήρια ότι τα x και y είναι ίσα ή ως ταυτίσεις τού x με το y. Επιπλέον, η θεωρία τύπων (σε αντίθεση, ας πούμε, με τη λογική πρώτης τάξης) μάς επιτρέπει να θεωρήσουμε τα μέλη τού $x = y$ επίσης ως άτομα που μπορούν να είναι αντικείμενο περαιτέρω προτάσεων. Επομένως, μπορούμε να *επαναλάβουμε* την ισότητα: Μπορούμε να σχηματίσουμε τον τύπο $p =_{x=y} q$ των ταυτίσεων μεταξύ των ταυτίσεων p και q, και του τύπου $r =_{p=_{x=y}q} s$, και ούτω καθεξής. Η δομή αυτού τού πύργου ισοτήτων αντιστοιχεί ακριβώς σε αυτή των συνεχών μονοπατιών και (ανώτερων) ομοτοπιών μεταξύ τους σε έναν χώρο, ή σε ένα ∞-ομαδοειδές.

Έτσι, θα αναφερόμαστε συχνά σε ένα μέλος $p : x = y$ ως μονοπάτι από το x στο y· καλούμε τα x και y πέρατα του μονοπατιού. Δύο μονοπάτια $p, q : x = y$ με τα ίδια πέρατα λέγεται ότι είναι παράλληλα, οπότε ένα μέλος $r : p =_{x=y} q$ μπορεί να νοηθεί ως ομοτοπία· θα το αναφέρουμε συχνά ως διδιάστατο μονοπάτι. Παρομοίως, ο $r =_{p=_{x=y}q} s$ είναι ο τύπος των τριδιάστατων μονοπατιών μεταξύ δύο παράλληλων διδιάστατων μονοπατιών, και ούτω καθεξής. Εάν ο τύπος A είναι «σύνολο», όπως ο Nat, αυτοί οι επαναλαμβανόμενοι τύποι ισότητας δε θα έχουν ενδιαφέρον, αλλά στη γενική περίπτωση μπορούν να αναπαριστούν μη τετριμμένους τύπους ομοτοπίας.

Μία σημαντική διαφορά μεταξύ τής ομοτοπικής θεωρίας τύπων και της κλασικής θεωρίας τής ομοτοπίας είναι ότι η ομοτοπική θεωρία τύπων παρέχει μία *συνθετική* περιγραφή των χώρων, με την εξής έννοια. Η συνθετική γεωμετρία είναι η γεωμετρία στο στυλ τού Ευκλείδη: Ξεκινά από κάποιες βασικές έννοιες (σημεία και ευθείες), κατασκευές (μία ευθεία που συνδέει δύο σημεία) και αξιώματα (όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες), και συνάγει τις λογικές τους συνέπειες. Αυτό αντιδιαστέλλεται με την αναλυτική γεωμετρία, όπου έννοιες όπως σημεία και ευθείες ερμηνεύονται συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^n$—οι ευθείες είναι σύνολα σημείων—και οι βασικές κατασκευές και αξιώματα συνάγονται από αυτήν την αναπαράσταση. Ενώ η κλασική θεωρία τής ομοτοπίας είναι αναλυτική (οι χώροι και τα μονοπάτια αποτελούνται από σημεία), η ομοτοπική θεωρία τύπων είναι συνθετική: τα σημεία, τα μονοπάτια και τα μονοπάτια μεταξύ μονοπατιών είναι βασικές, αδιαίρετες, αρχικές έννοιες.

Επιπλέον, ένα από τα καταπληκτικά πράγματα σχετικά με την ομοτοπική θεωρία τύπων είναι ότι όλες οι βασικές κατασκευές και αξιώματα—όλη η ανώτερη δομή ομαδοειδούς—προκύπτει αυτόματα από την αρχή επαγωγής για την ισότητα. Αυτή η αρχή επαγωγής εφοδιάζει κάθε τύπο με τη δομή ενός ∞-ομαδοειδούς, και κάθε μετασχηματισμό μεταξύ δύο τύπων με τη δομή ενός μορφισμού μεταξύ δύο τέτοιων ομαδοειδών. Αυτό είναι ενδιαφέρον από μαθηματική άποψη, επειδή δίνει έναν νέο τρόπο εργασίας με ∞-ομαδοειδή. Είναι ενδιαφέρον από τυποθεωρητική άποψη, επειδή αποκαλύπτει νέες πράξεις που συνδέονται με κάθε τύπο και μετασχηματισμό.

7.1 Η δομή ομαδοειδούς των τύπων

Θυμηθείτε (λήμματα 2–4) ότι ένας οποιοσδήποτε τύπος A φέρει την εξής δομή:

- Για $x : A$, ένα $\mathsf{refl}_x : x = x$. Καλούμε το refl_x το *σταθερό μονοπάτι (constant path)* στο x.
- Για $x, y : A$ και $p : x = y$, ένα $p^{-1} : y = x$ με $(\mathsf{refl}_x)^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$. Καλούμε το p^{-1} το *αντίστροφο (inverse)* του p.
- Για $x, y, z : A$, $p : x = y$ και $q : y = z$, ένα $p \cdot q : x = z$ με $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$. Καλούμε το $p \cdot q$ την *συνένωση (concatenation)* των p και q.

Τα παραπάνω προέκυψαν από την απόδειξη ότι η ισότητα του A είναι σχέση ισοδυναμίας. Ωστόσο, δε θα μείνουμε σ΄ αυτό. Από ομοτοπική άποψη, οι πράξεις αυτές αποτελούν το πρώτο επίπεδο της δομής ομαδοειδούς τού A—χρειαζόμαστε επίσης συνθήκες συνοχής (coherence conditions) για τις πράξεις αυτές, καθώς και ανάλογες πράξεις σε ανώτερες διαστάσεις. Για παράδειγμα, θέλουμε να ξέρουμε ότι τα σταθερά μονοπάτια είναι ουδέτερα ως προς συνένωση, ότι το p^{-1} είναι αντίστροφο του p ως προς συνένωση, και ότι η συνένωση είναι προσεταιριστική.

Λήμμα 15. *Έστω A τύπος.*

1. *Για οποιαδήποτε $x, y : A$ και $p : x = y$, $\mathsf{refl}_x \cdot p = p$ και $p \cdot \mathsf{refl}_y = p$.*
2. *Για οποιαδήποτε $x, y : A$ και $p : x = y$, $p \cdot p^{-1} = \mathsf{refl}_x$ και $p^{-1} \cdot p = \mathsf{refl}_y$.*
3. *Για οποιαδήποτε $x, y, z, w : A$, $p : x = y$, $q : y = z$ και $r : z = w$, $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.*

Απόδειξη. Σε όλες τις περιπτώσεις, θα επιστρατεύσουμε την αρχή επαγωγής τής ισότητας προκειμένου να αναγάγουμε το γενικό αποδεικτέο στο ειδικό στο οποίο όλα τα μονοπάτια είναι σταθερά.

1. Δείχνουμε την πρώτη ισότητα. Πλήρως διατυπωμένο, το ζητούμενο είναι να ορίσουμε ένα
$$\mathsf{lu}(x, y, p) : \mathsf{refl}_x \cdot p = p.$$
Θεωρούμε την οικογένεια $(x, y{:}A, p{:}x = y)C(x, y, p)$ με $C(x, y, p) :\equiv \mathsf{refl}_x{\cdot}p = p$. Τότε,
$$\begin{aligned} C(x, x, \mathsf{refl}_x) &\equiv (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x) \\ &\equiv (\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x). \end{aligned}$$
Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε το $\mathsf{lu}(x, y, p)$ με επαγωγή στο p, θέτοντας
$$\mathsf{lu}(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}.$$
Όμοια ορίζεται ένα
$$\mathsf{ru}(x, y, p) : p \cdot \mathsf{refl}_y = p.$$

2. Για την πρώτη ισότητα, θεωρούμε την οικογένεια $(x, y : A, p : x = y)\ C(x, y, p)$ με $C(x, y, p) :\equiv p \cdot p^{-1} = \mathsf{refl}_x$. Τότε,

$$\begin{aligned} C(x, x, \mathsf{refl}_x) &\equiv (\mathsf{refl}_x \cdot (\mathsf{refl}_x)^{-1} = \mathsf{refl}_x) \\ &\equiv (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x) \\ &\equiv (\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x). \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε ένα

$$\mathsf{ri}(x, y, p) : C(x, y, p)$$

μέσω τής επαγωγής

$$\mathsf{ri}(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}.$$

Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται παρομοίως.

3. Θα κανουμε διαδοχικά επαγωγή στα r, q, και p. Θεωρούμε την οικογένεια $(x, y : A, p : x = y, z : A, q : y = z, w : A, r : z = w)\ C(x, y, p, z, q, w, r)$ με

$$C(x, y, p, z, q, w, r) :\equiv (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r).$$

Κατ΄ αρχάς έχουμε

$$(\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$$

και

$$\mathsf{refl}_x \cdot (\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$$

και επομένως

$$\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x} : C(x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x).$$

Μπορούμε επομένως να ορίσουμε, με επαγωγή στο r, ένα

$$u(x, w, r) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x, w, r)$$

με

$$u(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}.$$

Εν συνεχεία ορίζουμε, με επαγωγή στο q, ένα

$$v(x, z, q, w, r) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q, w, r)$$

με

$$v(x, x, \mathsf{refl}_x, w, r) :\equiv u(x, w, r).$$

Τέλος ορίζουμε, με επαγωγή στο p, τον επιθυμητό μετασχηματισμό

$$\mathsf{assoc}(x, y, p, z, q, w, r) : C(x, y, p, z, q, w, r)$$

με

$$\mathsf{assoc}(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q, w, r) :\equiv v(x, z, q, w, r).$$ □

Μπορούμε να δώσουμε τους εξής γενικούς ορισμούς από την κλασική θεωρία ομοτοπίας:

Ορισμός 16. Ένας *τύπος με διακεκριμένο σημείο (pointed type)* είναι ένας τύπος A μαζί με ένα σημείο $a : A$, το οποίο καλείται *βασικό σημείο (basepoint)* αυτού. □

Ορισμός 17. Ο *τύπος των βρόχων (loop type)* ενός τύπου με διακεκριμένο σημείο (A, a) είναι ο τύπος με διακεκριμένο σημείο

$$\Omega(A, a) :\equiv (a = a, \mathsf{refl}_a).$$

Τα σημεία του ονομάζονται *βρόχοι (loops)* στο a. Ο n-οστός τύπος των βρόχων τού (A, a) ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned}\Omega^0(A, a) &:\equiv (A, a),\\ \Omega^{n+1}(A, a) &:\equiv \Omega(\Omega^n(A, a)).\end{aligned}$$ □

Το επόμενο αποτέλεσμα προέρχεται από την κλασική θεωρία ομοτοπίας, και έχει ως βασικό πόρισμα ότι οι ανώτερες ομάδες ομοτοπίας ενός χώρου είναι αβελιανές.

Θεώρημα 18 (Eckman-Hilton)**.** *Στον δεύτερο τύπο των βρόχων $\Omega^2(A, a)$, η πράξη τής συνένωσης μονοπατιών είναι αντιμεταθετική: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ για οποιαδήποτε $\alpha, \beta : \Omega^2(A, a)$.*

Απόδειξη. [6, θεώρημα 2.1.6]. □

Όπως φανερώνει το παραπάνω θεώρημα, η άλγεβρα των τύπων μονοπατιών ανώτερης διάστασης δεν εξαντλείται στη δομή ομαδοειδούς σε κάθε διάσταση.

Συνεχίζοντας, θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά των συναρτήσεων στα μονοπάτια. Θα δούμε ότι όπως οι τύποι είναι αυτομάτως (∞-)ομαδοειδή, έτσι και οι συναρτήσεις είναι αυτομάτως ομομορφισμοί ομαδοειδών. Πρώτα πρέπει να ορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο μία συνάρτηση δρα επί ενός μονοπατιού.

Ορισμός 19. Έστω $f : A \longrightarrow B$ συνάρτηση. Η δράση τής f επί ενός μονοπατιού $p : a = b$ στον A ορίζεται ως το μονοπάτι

$$f(p) :\equiv \mathsf{ap}_{\mathsf{apply}_f}(p) : f(a) = f(b)$$

στον B.

Αυστηρά μιλώντας, ο συμβολισμός αυτός είναι διφορούμενος, αλλά γενικά δεν προκαλεί σύγχυση. Ακολουθεί την καθιερωμένη στη θεωρία κατηγοριών πρακτική τής χρήσης τού ίδιου συμβόλου για την εφαρμογή ενός συναρτητή σε αντικείμενα και σε μορφισμούς.

Λήμμα 20. *Η δράση τής $f : A \longrightarrow B$ στα μονοπάτια τού A είναι ομομορφική:*

1. $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q)$,
2. $f(\mathsf{refl}_x) = \mathsf{refl}_{f(x)}$,
3. $f(p^{-1}) = f(p)^{-1}$.

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς παρατηρήστε ότι, για $x : A$,

$$f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{ap}_{\mathsf{apply}_f}(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{apply}_f(x)} \equiv \mathsf{refl}_{f(x)}.$$

1. Μπορούμε να κάνουμε επαγωγή σε οποιοδήποτε από τα p και q, ή σε αμφότερα· στην τελευταία περίπτωση, που είναι και η ενδεδειγμένη, θεωρούμε την οικογένεια $(x, y : A, p : x = y, z : A, q : y = z)\ C(x, y, p, z, q)$ με

$$C(x, y, p, z, q) :\equiv f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q).$$

   Έχουμε

$$f(\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x) \equiv f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(y)}$$

   και

$$f(\mathsf{refl}_x) \cdot f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(y)} \cdot \mathsf{refl}_{f(y)} \equiv \mathsf{refl}_{f(y)}$$

   και επομένως

$$\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{f(x)}} : C(x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x).$$

   Άρα μπορούμε να ορίσουμε, για $x, z : A$ και $q : x = z$, ένα

$$u(x, z, q) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q)$$

   με την επαγωγή

$$u(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{f(x)}}.$$

   Εν συνεχεία ορίζουμε, με επαγωγή στο p, ένα

$$v(x, y, p, z, q) : C(x, y, p, z, q)$$

   θέτοντας

$$v(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q) :\equiv u(x, z, q)$$

   που είναι και το ζητούμενο.

2. Άμεσο.

3. Θεωρούμε την οικογένεια $(x, y : A, p : x = y)\ C(x, y, p)$ με

$$C(x, y, p) :\equiv f(p^{-1}) = f(p)^{-1}.$$

   Οι υπολογισμοί δίνουν

$$f(\mathsf{refl}_x^{-1}) \equiv f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(x)},$$

   και

$$f(\mathsf{refl}_x)^{-1} \equiv \mathsf{refl}_{f(x)}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_{f(x)},$$

   οπότε έχουμε

$$\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{f(x)}} : C(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

   Μπορούμε επομένως να ορίσουμε ένα

$$t(x, y, p) : C(x, y, p)$$

   θέτοντας

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{f(x)}},$$

   που είναι το ζητούμενο. □

Το επόμενο λήμμα βεβαιώνει ότι ο παραπάνω ορισμός τής δράσης τής f στα μονοπάτια είναι «συναρτητικός». Ας θυμηθούμε τις βασικές κατηγορικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \mathsf{id}_A &:\equiv \lambda(x:A)\, x, \\ g\circ f &:\equiv \lambda(x:A)\, g(f(x)). \end{aligned}$$

Λήμμα 21. *1.* $\mathsf{id}_A(p) = p$,

2. $(g\circ f)(p) = g(f(p))$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο p, αρκεί να ελέγξουμε καθεμία από τις ισότητες στην περίπτωση που το p είναι ένα σταθερό μονοπάτι. Για την πρώτη έχουμε

$$\mathsf{id}_A(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{id}_A(x)} \equiv \mathsf{refl}_x,$$

ενώ για τη δεύτερη,

$$\begin{aligned} (g\circ f)(\mathsf{refl}_x) &\equiv \mathsf{refl}_{(g\circ f)(x)} \equiv \mathsf{refl}_{g(f(x))}, \\ g(f(\mathsf{refl}_x)) &\equiv g(\mathsf{refl}_{f(x)}) \equiv \mathsf{refl}_{g(f(x))}. \end{aligned}$$ □

Εφ΄ όσον οι εξαρτώμενοι μετασχηματισμοί αποτελούν ουσιώδες συστατικό τής θεωρίας τύπων, θα χρειαστούμε επίσης μια εκδοχή τού λήμματος 1 για αυτές. Ωστόσο, αυτό δεν είναι τόσο απλό να διατυπωθεί, επειδή εάν $(x : A)\ u(x) : B(x)$ και $p : x = y$, τότε τα $u(x) : B(x)$ και $u(y) : B(y)$ είναι μέλη διαφορετικών τύπων, έτσι ώστε a priori να μην μπορούμε καν να ρωτήσουμε αν είναι ίσα. Η λύση είναι ότι το ίδιο το p μάς δίνει έναν τρόπο να συσχετίσουμε τους τύπους $B(x)$ και $B(y)$.

Λήμμα 22. *Έστω $(x : A)\ u(x) : B(x)$ μετασχηματισμός. Για οποιδήποτε $p : x = y$ στον A υπάρχει*

$$\mathsf{apd}_u(p) : p_*(u(x)) = u(y).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο p, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση των σταθερών μονοπατιών, οπότε το ζητούμενο ανάγεται στο

$$(\mathsf{refl}_x)_*(u(x)) = u(x),$$

το οποίο ισχύει από τον ορισμό τού p_*. □

Η μεταφορά κατά μήκος τής συνένωσης δύο μονοπατιών είναι η σύνθεση των επιμέρους μεταφορών:

Λήμμα 23. *Έστω $(x : A)\, B(x)$ οικογένεια. Εάν $p : x = y$ και $q : y = z$ στον A και $w : B(x)$, τότε*

$$q_*(p_*(w)) = (p\cdot q)_*(w).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στα p και q, το ζητούμενο περιορίζεται στο να δείξουμε, για οποιοδήποτε $w : B(x)$,

$$\mathsf{transport}^B(\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x, w) = \mathsf{transport}^B(\mathsf{refl}_x, \mathsf{transport}^B(\mathsf{refl}_x, w)).$$

Αυτό όμως είναι άμεση συνέπεια της σχέσης (9). □

Το επόμενο αποτέλεσμα θα μας χρειαστεί παρακάτω.

Λήμμα 24. *Για $a : A$ θεωρούμε την οικογένεια $(x : A)\, B(x)$ με $B(x) :\equiv a = x$. Εάν $p : a = b$ και $q : b = c$, τότε $\mathsf{transport}^B(q, p) = p\cdot q$.*

Απόδειξη. Κάνουμε επαγωγή στο q. Εφ᾽ όσον $\mathsf{transport}^B(\mathsf{refl}_b, p) \equiv p$, το ζητούμενο ανάγεται στο

$$p = p \cdot \mathsf{refl}_b,$$

το οποίο γνωρίζουμε ήδη (λήμμα 15). □

7.2 Ομοτοπία

Ορισμός 25. Ας θεωρήσουμε μία οικογένεια $(x : A)\ B(x)$ και δύο συναρτήσεις $f, g : \prod(x : A)\ B(x)$. Μία *ομοτοπία* από την f στην g είναι ένα μέλος τού τύπου

$$f \sim g \ :\equiv \prod(x : A)\ (f(x) = g(x)).$$ □

Λήμμα 26. *Η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η ανακλαστικότητα είναι προφανής:

$$\lambda(x : A)\ \mathsf{refl}_{f(x)} : f \sim f.$$

Για τη συμμετρία: Εάν $H : f \sim g$, τότε

$$\lambda(x : A)\ H(x)^{-1} : g \sim f.$$

Τέλος, για τη μεταβατικότητα, εάν $H : f \sim g$ και $I : g \sim h$, τότε

$$\lambda(x : A)\ H(x) \cdot I(x) : f \sim h.$$ □

Επίσης, η σύνθεση συναρτήσεων σέβεται την ομοτοπία.

Λήμμα 27. *Για $e : A \longrightarrow B$, $f_1, f_2 : B \longrightarrow C$, $g : C \longrightarrow D$, και $H : f_1 \sim f_2$,*

1. *$\lambda(x : A)\ H(e(x)) : f_1 \circ e \sim f_2 \circ e$,*
2. *$\lambda(y : B)\ g(H(y)) : g \circ f_1 \sim g \circ f_2$.* □

Ορισμός 28. *Αντίστροφη* μιας συνάρτησης $f : A \longrightarrow B$ είναι μία τριάδα (g, α, β) αποτελούμενη από μία συνάρτηση $g : B \longrightarrow A$ και ομοτοπίες $\alpha : f \circ g \sim \mathsf{id}_B$ και $\beta : g \circ f \sim \mathsf{id}_A$.

Στην πράξη θα συγχέουμε την (g, α, β) με την g, και θα αναφερόμαστε στην g ως αντίστροφη της f. Ο τύπος των αντιστρόφων μιας συνάρτησης $f : A \longrightarrow B$ είναι ο

$$\mathrm{QInv}(f) \ :\equiv \sum(g : B \longrightarrow A)\ \big[(f \circ g \sim \mathsf{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathsf{id}_A)\big].$$

Μία συνάρτηση που έχει αντίστροφη λέγεται *ισομορφισμός*. Ο τύπος των ισομορφισμών από τον A στον B είναι ο

$$A \cong B \ :\equiv \sum(f : A \longrightarrow B)\ \mathrm{QInv}(f).$$

Ο ισομορφισμός τύπων είναι σχέση ισοδυναμίας:

Λήμμα 29.

1. *Η αντίστροφη τής id_A είναι η id_A.*
2. *Εάν η g είναι αντίστροφη της f, τότε η f είναι αντίστροφη της g.*
3. *Εάν η g είναι αντίστροφη της f, και η g' είναι αντίστροφη της f', και ορίζεται η σύνθεση $f' \circ f$, τότε η $g \circ g'$ είναι αντίστροφη της $f' \circ f$.* □

Λήμμα 30. *Εάν $(x : A)\,B(x)$ οικογένεια και $p : a = b$ στον A, τότε η συνάρτηση μεταφοράς*

$$p_* : B(a) \longrightarrow B(b)$$

είναι ισομορφισμός.

Πρώτη απόδειξη. Από τον ορισμό τής p_* έχουμε, για $a : A$, $(\mathsf{refl}_a)_* \equiv \mathsf{id}_{B(a)}$, που είναι ισομορφισμός από το προηγούμενο λήμμα. Το ζητούμενο έπεται με επαγωγή στο p.

Δεύτερη απόδειξη. Από το λήμμα 23 έχουμε, για $p : x = y$ και $q : y = z$, $(p \cdot q)_* \sim q_* \circ p_*$, οπότε $(p^{-1})_* \circ p_* \sim \mathsf{id}_{B(a)}$ και $p_* \circ (p^{-1})_* \sim \mathsf{id}_{B(b)}$. Άρα, η p_* έχει αντίστροφη. □

7.3 Χαρακτηρισμός τής ισότητας

Τύποι ζευγών

Ας θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο $A_1 \times A_2$ δύο τύπων A_1 και A_2. Για οποιαδήποτε $x, y : A_1 \times A_2$ και $p : x = y$ λαμβάνουμε μονοπάτια $\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p) : \mathsf{pr}_1(x) = \mathsf{pr}_1(y)$ και $\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p) : \mathsf{pr}_2(x) = \mathsf{pr}_2(y)$. Ορίζεται επομένως συνάρτηση

$$f : (x = y) \longrightarrow (\mathsf{pr}_1(x) = \mathsf{pr}_1(y)) \times (\mathsf{pr}_2(x) = \mathsf{pr}_2(y))$$

με

$$f(p) \equiv \mathsf{pair}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p)).$$

Θεώρημα 31. *Για οποιαδήποτε $x, y : A_1 \times A_2$, η f είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Δυνάμει τής αρχής επαγωγής για το $A_1 \times A_2$, αρκεί η αντίστροφη να οριστεί στην περίπτωση κατά την οποία αμφότερα τα x και y είναι κάποια ζεύγη $\mathsf{pair}(x_1, x_2)$ και $\mathsf{pair}(y_1, y_2)$ αντίστοιχα. Χρειαζόμαστε επομένως μία

$$g : (x_1 = y_1) \times (x_2 = y_2) \longrightarrow (\mathsf{pair}(x_1, x_2) = \mathsf{pair}(y_1, y_2)).$$

Για $z_1 : x_1 = y_1$ και $z_2 : x_2 = y_2$ ορίζουμε, με επαγωγή στα z_1 και z_2, το

$$c_{\mathsf{pair}}(z_1, z_2) : \mathsf{pair}(x_1, x_2) = \mathsf{pair}(y_1, y_2)$$

θέτοντας

$$c_{\mathsf{pair}}(\mathsf{refl}_{x_1}, \mathsf{refl}_{x_2}) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}. \tag{10}$$

Με τη βοήθεια του c_{pair} ορίζουμε, για $z : (x_1 = y_1) \times (x_2 = y_2)$, το

$$t(z) : \mathsf{pair}(x_1, x_2) = \mathsf{pair}(y_1, y_2)$$

μέσω τής επαγωγής

$$t(\mathsf{pair}(z_1, z_2)) :\equiv c_{\mathsf{pair}}(z_1, z_2). \tag{11}$$

Η ζητούμενη συνάρτηση θα είναι η

$$g :\equiv \lambda(z : (x_1 = y_1) \times (x_2 = y_2))\, t(z).$$

Από τις (10) και (11) παίρνουμε τη χαρακτηριστική ιδιότητα της g:

$$g(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{x_1}, \mathsf{refl}_{x_2})) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}. \tag{12}$$

Έχουμε ακόμη να δείξουμε ότι οι f και g είναι αντίστροφες μεταξύ τους. Παρατηρήστε κατ᾽ αρχάς ότι η f ικανοποιεί τη σχέση

$$\begin{aligned} f(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1,x_2)}) &\equiv \mathsf{pair}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1,x_2)}), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1,x_2)})) \\ &\equiv \mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{x_1}, \mathsf{refl}_{x_2}). \end{aligned} \tag{13}$$

Προκειμένου για την $f(g(z)) = z$, με επαγωγή στο z αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(g(\mathsf{pair}(z_1, z_2))) = \mathsf{pair}(z_1, z_2).$$

Μία ακόμα επαγωγή στα z_1 και z_2 ανάγει το ζητούμενο στο

$$f(g(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{x_1}, \mathsf{refl}_{x_2}))) = \mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{x_1}, \mathsf{refl}_{x_2}),$$

το οποίο είναι άμεση απόρροια των (12) και (13). Για να δείξουμε ότι $g(f(p)) = p$ κάνουμε πρώτα επαγωγή στο p, οπότε το ζητούμενο περιορίζεται στην περίπτωση που το p είναι το refl_x,

$$g(f(\mathsf{refl}_x)) = \mathsf{refl}_x,$$

και μετά στο x, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το x είναι ένα ζεύγος $\mathsf{pair}(x_1, x_2)$,

$$g(f(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1,x_2)})) = \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1,x_2)}.$$

Αυτό προκύπτει παρομοίως από τις (13) και (12). □

Την αντίστροφη της f που ορίσαμε μπορούμε να τη συμβολίσουμε

$$\mathsf{pair}^= : (\mathsf{pr}_1(x) = \mathsf{pr}_1(y)) \times (\mathsf{pr}_2(x) = \mathsf{pr}_2(y)) \longrightarrow (x = y).$$

Ειδικότερα, εάν θέσουμε $x :\equiv \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(y), \mathsf{pr}_2(y))$, παίρνουμε ένα μέλος

$$\mathsf{pair}^=(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(y)}, \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_2(y)})) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(y), \mathsf{pr}_2(y)) = y.$$

Άσκηση 7.1. Δείξτε ότι $\mathsf{pair}^=(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(y)}, \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_2(y)})) = \eta_{A_1 \times A_2}(y)$ (λήμμα 11).

Εν συνεχεία θα χαρακτηρίσουμε την ισότητα στους τύπους εξαρτώμενων ζευγών. Εφ᾽ όσον το εξαρτώμενο άθροισμα είναι γενίκευση του καρτεσιανού γινομένου, αναμένουμε ότι τα μονοπάτια σε έναν τύπο $\sum(x : A)\, B(x)$ θα είναι ζεύγη μονοπατιών όπως παραπάνω, αλλά χρειάζεται λίγη σκέψη για να δώσουμε τους σωστούς τύπους αυτών των μονοπατιών.

Εάν το $p : w = w'$ είναι μονοπάτι στο $\sum(x : A) B(x)$, τότε λαμβάνουμε, όπως πριν, το μονοπάτι $\mathsf{ap}_{pr_1}(p) : \mathsf{pr}_1(w) = \mathsf{pr}_1(w')$. Ωστόσο, δε μπορούμε να ρωτήσουμε αμέσως εάν το $\mathsf{pr}_2(w)$ είναι ίσο με το $\mathsf{pr}_2(w')$ αφού αυτά τα δύο δε βρίσκονται απαραίτητα στο ίδιο στιγμιότυπο της $(x : A)\, B(x)$. Μπορούμε όμως να μεταφέρουμε το $\mathsf{pr}_2(w)$ κατά μήκος τού μονοπατιού $\mathsf{ap}_{pr_1}(p)$, και αυτό μας δίνει ένα μέλος τού ίδιου τύπου με το $\mathsf{pr}_2(w')$. Με επαγωγή στο p λαμβάνουμε ένα μονοπάτι $\mathsf{transport}^B(\mathsf{ap}_{pr_1}(p), \mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w')$.

Παρατήρηση. Εάν έχουμε $x : A$ και $u, v : B(x)$ ούτως ώστε $\mathsf{pair}(x, u) = \mathsf{pair}(x, v)$, δεν έπεται ότι $u = v$. Το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε είναι ότι υπάρχει $p : x = x$ ούτως ώστε $\mathsf{transport}^B(p, u) = v$. Αυτή είναι μια γνωστή πηγή σύγχυσης για τους νεοεισερχόμενους στη θεωρία τύπων, αλλά έχει νόημα από τοπολογική άποψη: η ύπαρξη στον ολικό χώρο ενός μονοπατιού $\mathsf{pair}(x, u) = \mathsf{pair}(x, v)$ μεταξύ δύο σημείων που τυχαίνει να βρίσκονται στο ίδιο νήμα δε συνεπάγεται την ύπαρξη ενός μονοπατιού $u = v$ που βρίσκεται εξ ολοκλήρου εντός αυτού του νήματος.

Το επόμενο θεώρημα λέει ότι η διαδικασία αυτή είναι αντιστρέψιμη.

Θεώρημα 32. *Δοθέντων μιας οικογένειας* $(x : A)\, B(x)$ *και* $w, w' : \sum(x : A)\, B(x)$*, υπάρχει ισομορφισμός*

$$(w = w') \quad \cong \quad \textstyle\sum(q : pr_1(w) = \mathsf{pr}_1(w'))\ \mathsf{transport}^B(q, \mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w').$$

Απόδειξη. Για $p : w = w'$ θεωρούμε το

$$b(p) : \textstyle\sum(q : pr_1(w) = \mathsf{pr}_1(w'))\ \mathsf{transport}^B(q, \mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w')$$

που ορίζεται μέσω τής επαγωγής

$$b(\mathsf{refl}_w) \;:\equiv \mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(w)}, \mathsf{refl}_{pr_2(w)}). \tag{14}$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$\lambda(b) : (w = w') \longrightarrow \textstyle\sum(q : pr_1(w) = \mathsf{pr}_1(w'))\ \mathsf{transport}^B(q, \mathsf{pr}_2(w)) = \mathsf{pr}_2(w')$$

είναι ισομορφισμός. Όπως και στην περίπτωση του καρτεσιανού γινομένου, η αντίστροφη θα οριστεί όταν τα w και w' είναι κάποια ζεύγη $\mathsf{pair}(w_1, w_2)$ και $\mathsf{pair}(w_1', w_2')$. Για $q : w_1 = w_1'$ και $r : \mathsf{transport}^B(q, w_2) = w_2'$ ορίζουμε

$$c_{\mathsf{pair}}(q, r) : \mathsf{pair}(w_1, w_2) = \mathsf{pair}(w_1', w_2')$$

με επαγωγή στα q και r,

$$c_{\mathsf{pair}}(\mathsf{refl}_{w_1}, \mathsf{refl}_{w_2}) \;:\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(w_1, w_2)}. \tag{15}$$

Εν συνεχεία θεωρούμε, για $z : \sum(q : w_1 = w_1')\ \mathsf{transport}^B(q, w_2) = w_2'$, το

$$t(z) : \mathsf{pair}(w_1, w_2) = \mathsf{pair}(w_1', w_2')$$

που ορίζεται από την επαγωγή

$$t(\mathsf{pair}(q, r)) \;:\equiv c_{\mathsf{pair}}(q, r). \tag{16}$$

Από τις (16) και (15) έπεται ότι

$$t(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{w_1}, \mathsf{refl}_{w_2})) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(w_1, w_2)}. \tag{17}$$

Μένει να δείξουμε ότι η $\lambda(t)$ είναι αντίστροφη της $\lambda(b)$. Παρατηρήστε ότι, για $w_1, w_1' : A$, $w_2 : B(w_1)$, και $w_2' : B(w_1')$, η (14) δίνει τη σχέση

$$b(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(w_1, w_2)}) \equiv \mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{w_1}, \mathsf{refl}_{w_2}). \tag{18}$$

Η σχέση $b(t(z)) = z$ προκύπτει, με επαγωγή στο z, από την

$$b(t(\mathsf{pair}(q, r))) = \mathsf{pair}(q, r),$$

η οποία προκύπτει, με επαγωγή στα q και r, από την

$$b(t(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{w_1}, \mathsf{refl}_{w_2}))) = \mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{w_1}, \mathsf{refl}_{w_2}). \tag{19}$$

Η σχέση $t(b(p)) = p$ ανάγεται, με επαγωγή στο p, στην

$$t(b(\mathsf{refl}_w)) = \mathsf{refl}_w,$$

η οποία ανάγεται, με επαγωγή στο w, στην

$$t(b(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(w_1, w_2)})) = \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(w_1, w_2)}. \tag{20}$$

Αμφότερες οι (19) και (20) συνάγονται από τις (18) και (17). □

Και οι τετριμμένες περιπτώσεις έχουν καμιά φορά τη σημασία τους.

Θεώρημα 33. *Για οποιαδήποτε* $x, y : \mathbf{1}$, $(x = y) \cong \mathbf{1}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη σταθερή συνάρτηση

$$f :\equiv \lambda(p : x = y)\, 0_1 : (x = y) \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Προκειμένου να ορίσουμε μία συνάρτηση στην αντίθετη κατεύθυνση μπορούμε, επικαλούμενοι την αρχή επαγωγής τού $\mathbf{1}$, να υποθέσουμε ότι αμφότερα τα x και y είναι το $0_{\mathbf{1}}$, στην οποία περίπτωση θέτουμε

$$g :\equiv \lambda(z : \mathbf{1})\, \mathsf{refl}_{0_{\mathbf{1}}} : \mathbf{1} \longrightarrow (0_1 = 0_1).$$

Η μία σχέση που έχουμε να δείξουμε είναι η $f(g(z)) = z$, η οποία, αναπτύσσοντας τον ορισμό τής f, γράφεται $0_1 = z$, οπότε και αποδεικνύεται με τετριμμένη επαγωγή στο z. Για την άλλη, εάν $p : x = y$, έχουμε να δείξουμε ότι $g(f(p)) = p$, δηλαδή $g(0_{\mathbf{1}}) = p$. Η αρχή επαγωγής τής ισότητας μας επιτρέπει να περιοριστούμε στην περίπτωση που το p είναι το refl_x, οπότε, με μία περαιτέρω επαγωγή στο x, μας μένει να δείξουμε ότι $\mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x$. □

Αθροίσματα

Αναμένουμε ότι ένα άθροισμα $A_1 + A_2$ αποτελείται από ξένα μεταξύ τους ακριβή αντίτυπα των A_1 και A_2. Επομένως, θα πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned}
(\mathsf{in}_1(a_1) = \mathsf{in}_1(b_1)) &\cong (a_1 = b_1),\\
(\mathsf{in}_2(a_2) = \mathsf{in}_2(b_2)) &\cong (a_2 = b_2),\\
(\mathsf{in}_1(a_1) = \mathsf{in}_2(a_2)) &\cong \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Για να δείξουμε τα παραπάνω, θα ορίσουμε μία οικογένεια σύγκρισης

$$(x, y : A_1 + A_2)\, \mathrm{Code}(x, y)$$

με αναδρομή στα x και y:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Code}(\mathsf{in}_1(x_1), \mathsf{in}_1(y_1)) &:\equiv (x_1 = y_1),\\
\mathrm{Code}(\mathsf{in}_1(x_1), \mathsf{in}_2(x_2)) &:\equiv \mathbf{0},\\
\mathrm{Code}(\mathsf{in}_2(x_2), \mathsf{in}_1(x_1)) &:\equiv \mathbf{0},\\
\mathrm{Code}(\mathsf{in}_2(x_2), \mathsf{in}_2(y_2)) &:\equiv (x_2 = y_2).
\end{aligned}$$

Θεώρημα 34. *Για οποιαδήποτε* $x, y : A_1 + A_2$, $(x = y) \cong \mathrm{Code}(x, y)$.

Απόδειξη. Στη μία κατεύθυνση: Πρώτα ορίζουμε, για $x : A_1 + A_2$, ένα

$$c_{\mathsf{refl}}(x) : \mathrm{Code}(x, x)$$

με επαγωγή στο x,

$$\begin{aligned}
c_{\mathsf{refl}}(\mathsf{in}_1(x_1)) &:\equiv \mathsf{refl}_{x_1},\\
c_{\mathsf{refl}}(\mathsf{in}_2(x_2)) &:\equiv \mathsf{refl}_{x_2}.
\end{aligned}$$

Μετά ορίζουμε, για $x, y : A_1 + A_2$ και $p : x = y$, ένα

$$t(x, y, p) : \mathrm{Code}(x, y)$$

με επαγωγή στο p,

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c_{\mathsf{refl}}(x).$$

Τέλος, θέτουμε

$$\mathsf{encode}_{x,y} :\equiv \lambda(p : x = y)\, t(x, y, p) : (x = y) \longrightarrow \mathrm{Code}(x, y).$$

Στην άλλη κατεύθυνση: Ορίζουμε, για $x, y : A_1 + A_2$, το

$$\mathsf{decode}_{x,y} : \mathrm{Code}(x, y) \longrightarrow (x = y)$$

με επαγωγή στα x και y,

$$\begin{aligned}
\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_1(x_1),\mathsf{in}_1(y_1)} &:\equiv \lambda(c : \mathrm{Code}(\mathsf{in}_1(x_1), \mathsf{in}_1(y_1)))\, \mathsf{ap}_{\mathsf{in}_1}(c),\\
\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_1(x_1),\mathsf{in}_2(x_2)} &:\equiv \lambda(c : \mathrm{Code}(\mathsf{in}_1(x_1), \mathsf{in}_2(x_2)))\, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(c),\\
\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_2(x_2),\mathsf{in}_1(x_1)} &:\equiv \lambda(c : \mathrm{Code}(\mathsf{in}_2(x_2), \mathsf{in}_1(x_1)))\, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(c),\\
\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_2(x_2),\mathsf{in}_2(y_2)} &:\equiv \lambda(c : \mathrm{Code}(\mathsf{in}_2(x_2), \mathsf{in}_2(y_2)))\, \mathsf{ap}_{\mathsf{in}_2}(c).
\end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x, y : A_1 + A_2$ οι συναρτήσεις $\mathsf{encode}_{x,y}$ και $\mathsf{decode}_{x,y}$ είναι αντίστροφες μεταξύ τους. Αφ΄ ενός θέλουμε, για $p : x = y$,

$$\mathsf{decode}_{x,y}(\mathsf{encode}_{x,y}(p)) = p.$$

Η αρχή επαγωγής τής ισότητας ανάγει το ζητούμενο στην εύρεση ενός μονοπατιού

$$\mathsf{decode}_{x,x}(\mathsf{encode}_{x,x}(\mathsf{refl}_x)) = \mathsf{refl}_x.$$

Με επαγωγή στο x, το ζητούμενο σπάει σε δύο περιπτώσεις,

$$\begin{aligned}
&\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_1(x_1),\mathsf{in}_1(x_1)}(\mathsf{encode}_{\mathsf{in}_1(x_1),\mathsf{in}_1(x_1)}(\mathsf{refl}_{\mathsf{in}_1(x_1)})) = \mathsf{refl}_{\mathsf{in}_1(x_1)},\\
&\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_2(x_2),\mathsf{in}_2(x_2)}(\mathsf{encode}_{\mathsf{in}_2(x_2),\mathsf{in}_2(x_2)}(\mathsf{refl}_{\mathsf{in}_2(x_2)})) = \mathsf{refl}_{\mathsf{in}_2(x_2)},
\end{aligned}$$

που προκύπτουν αμφότερες από τους ορισμούς των encode και decode. Αφ΄ ετέρου θέλουμε, για $c : \mathrm{Code}(x, y)$,

$$\mathsf{encode}_{x,y}(\mathsf{decode}_{x,y}(c)) = c.$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις: Όταν τα x και y έρχονται από τον ίδιο προσθετέο, έχουμε να δείξουμε τις

$$\begin{aligned}
\mathsf{encode}_{\mathsf{in}_1(x_1),\mathsf{in}_1(y_1)}(\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_1(x_1),\mathsf{in}_1(y_1)}(c)) &= c,\\
\mathsf{encode}_{\mathsf{in}_2(x_2),\mathsf{in}_2(y_2)}(\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_2(x_2),\mathsf{in}_2(y_2)}(c)) &= c.
\end{aligned}$$

Με επαγωγή στο c, αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\mathsf{encode}_{\mathsf{in}_1(x_1),\mathsf{in}_1(x_1)}(\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_1(x_1),\mathsf{in}_1(x_1)}(\mathsf{refl}_{x_1})) = \mathsf{refl}_{x_1},$$

και

$$\mathsf{encode}_{\mathsf{in}_2(x_2),\mathsf{in}_2(x_2)}(\mathsf{decode}_{\mathsf{in}_2(x_2),\mathsf{in}_2(x_2)}(\mathsf{refl}_{x_2})) = \mathsf{refl}_{x_2},$$

που είναι άμεση απόρροια των ορισμών. Όταν τα x και y έρχονται από διαφορετικούς προσθετέους, τότε $\mathrm{Code}(x, y) \equiv \mathbf{0}$, οπότε αποδεικνύονται τα πάντα, συμπεριλαμβανομένου τού αποδεικτέου. □

Η ακόλουθη τετριμμένη περίπτωση δεν έχει καμία ιδιαίτερη σημασία, και την αναφέρουμε για λόγους πληρότητας.

Θεώρημα 35. *Για οποιαδήποτε* $x, y : \mathbf{0}$, $(x = y) \cong \mathbf{0}$. □

Σύμπαντα και τύποι συναρτήσεων

Όπως κάναμε για άλλους τύπους, θα μπορούσαμε για την ισότητα του $A \to B$ να επιδιώξουμε έναν χαρακτηρισμό τής μορφής

$$(f = g) \cong (\mathsf{apply}_f = \mathsf{apply}_g).$$

Ωστόσο, κάτι τέτοιο δε θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο, γιατί απλώς θα μετέθετε το πρόβλημα στο να περιγράψουμε την ισότητα μεταξύ ομοειδών (δηλαδή με τον ίδιο κανόνα σχηματισμού) μετασχηματισμών, κι αυτό προσκρούει στο εμπόδιο της απουσίας κάποιας αρχής επαγωγής για μετασχηματισμούς. Παρόμοια είναι η κατάσταση με τα σύμπαντα κατά Russell: Προκειμένου να διατυπώσουμε την αρχή επαγωγής ενός σύμπαντος, πρέπει να επανεισάγουμε τον φορμαλισμό των συμπάντων κατά Tarski, και αυτό είναι κάτι που μπορεί να μη θέλουμε ή να μη μπορούμε να κάνουμε.

Στην κλασική θεωρία συνόλων, όταν έχουμε μία σχέση ισοδυναμίας E σε ένα σύνολο X, μπορούμε να σχηματίσουμε το σύνολο X/E των κλάσεων ισοδυναμίας τής E, μαζί με την απεικόνιση $\pi : a \mapsto [a]$ που στέλνει κάθε στοιχείο τού X στην κλάση ισοδυναμίας του. Η π χαρακτηρίζεται από την εξής (καθολική) ιδιότητα: Για μία συνάρτηση $f : X \to Y$, υπάρχει (μοναδική) $g : X/E \to Y$ με $g \circ \pi = f$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/E \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd},$$

τότε και μόνο, εάν η f σέβεται την E (δηλ. $E(x, y) \Rightarrow f(x) = f(y)$). Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να ορίζουμε συναρτήσεις επί τού X/E χρησιμοποιώντας αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας: Πρώτα ορίζουμε μία συνάρτηση επί τού X, και μετά ελέγχουμε ότι αυτή «κατεβαίνει» στο πηλίκο, δηλαδή ότι σέβεται τη σχέση ισοδυναμίας.

Η κατασκευή τού πηλίκου *δεν* είναι γενικά δυνατή. Αντ΄ αυτού, στα κατασκευαστικά μαθηματικά εκμεταλλευόμαστε την παραπάνω αντιστοιχία ώστε να αναπαριστούμε συναρτήσεις (και άλλες έννοιες) επί τού X/E ως συναρτήσεις επί τού X οι οποίες σέβονται την E. Σε αυτή την προσέγγιση, η ίδια η E αναπαριστά την ισότητα του X/E, δηλαδή εκτελεί χρέη ισότητας, οπότε καλείται *ορισμένη ισότητα (defined equality)* στο X.

Υπάρχουν δύο επιλογές για το πώς θα χειριστούμε την ορισμένη ισότητα. Η μία είναι να δείχνουμε κατά περίπτωση ότι κάτι που ορίζουμε σέβεται την ορισμένη ισότητα, και οδηγεί στην έννοια του ανώτερου επαγωγικού τύπου. Η άλλη είναι να υποθέσουμε ότι τα πάντα σέβονται την ορισμένη ισότητα. Το πώς θα το κάνουμε αυτό εξαρτάται από την περίπτωση. Η θεωρία τύπων έχει την ιδιαιτερότητα ότι, ούτως ή άλλως, όλοι οι τύποι είναι εφοδιασμένοι με ισότητα. Επομένως, για $x, y : A$ ορίζεται

$$f : (x = y) \to E(x, y)$$

με την επαγωγή

$$f(\mathsf{refl}_x) :\equiv r(x),$$

όπου r κάποιο (δοθέν) τεκμήριο αλήθειας ότι η E είναι ανακλαστική. Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε την πρόταση/υπόθεση ότι η f είναι ισομορφισμός. Αυτό συνεπάγεται, μεταξύ άλλων, ότι η E χαρακτηρίζει την ισότητα του A.

Η φυσική έννοια ταύτισης μεταξύ δομών είναι ο ισομορφισμός. Ωστόσο, η υπόθεση ότι ο ισομορφισμός χαρακτηρίζει την ισότητα,

$$(A = B) \cong (A \cong B),$$

είναι ασυνεπής. Χρειαζόμαστε μία «βελτιωμένη» εκδοχή τού ισομορφισμού. Ευτυχώς, η κλασική θεωρία ομοτοπίας έχει μία ιδέα για το ποιος είναι ο «σωστός» τύπος ισομορφισμών.

Ορισμός 36. *Αριστερή (δεξιά) αντίστροφη* μιας $f : A \longrightarrow B$ είναι μία $g : B \longrightarrow A$ με $g \circ f \sim \mathsf{id}_A$ ($f \circ g \sim \mathsf{id}_B$).

Έχουμε τους τύπους

$$\begin{aligned} \mathrm{LeftInv}(f) &:\equiv \textstyle\sum(g : B \longrightarrow A)\, g \circ f \sim \mathsf{id}_A, \\ \mathrm{RightInv}(f) &:\equiv \textstyle\sum(g : B \longrightarrow A)\, f \circ g \sim \mathsf{id}_B. \end{aligned}$$

Λήμμα 37. *Εάν η f έχει αριστερή και δεξιά αντίστροφη, τότε είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε $g_l, g_r : B \longrightarrow A$ με $g_l \circ f \sim \mathsf{id}_A$ και $f \circ g_r \sim \mathsf{id}_B$, οπότε

$$f \circ g_l \sim f \circ g_l \circ f \circ g_r \sim f \circ g_r \sim \mathsf{id}_B. \qquad \square$$

Θέτουμε

$$\mathrm{IsEquiv}(f) :\equiv \mathrm{LeftInv}(f) \times \mathrm{RightInv}(f).$$

Οι *ισοδυναμίες (equivalences)* από τον A στον B είναι τα μέλη τού τύπου

$$A \simeq B :\equiv \textstyle\sum(f : A \longrightarrow B)\, \mathrm{IsEquiv}(f).$$

Παρατήρηση. Από το προηγούμενο λήμμα, οι τύποι $A \simeq B$ και $A \cong B$ είναι λογικά ισοδύναμοι. Ωστόσο, δεν είναι ισομορφικοί. Επομένως, έχει σημασία σε ποιον από τους δύο αναφερόμαστε κάθε φορά. Αντιθέτως, όταν λέμε απλώς ότι μία συνάρτηση είναι ισομορφισμός/ισοδυναμία, τότε διατυπώνουμε μία ιδιότητα, οπότε τα δύο είναι εναλλάξιμα μεταξύ τους. Στην πράξη, θα έχουμε μία ελαφρά προτίμηση προς την ισοδυναμία έναντι του ισομορφισμού, καθώς είναι εκείνη που έχει μεγαλύτερο τυποθεωρητικό/γεωμετρικό νόημα. Φυσικά, ο συνηθέστερος τρόπος να δείξει κανείς ότι μία συνάρτηση είναι ισοδυναμία είναι να εμφανίσει μία αντίστροφη αυτής.

Από τις γενικές παρατηρήσεις που κάναμε πάνω στην ορισμένη ισότητα, εάν το $\mathcal{U}$ είναι κάποιο σύμπαν τότε για οποιουσδήποτε τύπους $A, B : \mathcal{U}$ υπάρχει συνάρτηση

$$\mathsf{idtoeqv} : (A = B) \longrightarrow (A \simeq B).$$

Εύκολα φαίνεται, με επαγωγή στο p, ότι η υποκείμενη συνάρτηση του $\mathsf{idtoeqv}(p)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς p_* ως προς την οικογένεια $(X : \mathcal{U})\, X$.

Ορισμός 38. Ένα σύμπαν $\mathcal{U}$ είναι *univalent* εάν η $\mathsf{idtoeqv}$ είναι ισοδυναμία. Στην περίπτωση αυτή, η (δοθείσα) αντίστροφη της $\mathsf{idtoeqv}$ συμβολίζεται ua (από τα αρχικά τού «univalence axiom»).

Η παραπάνω ιδιότητα εκφράζεται από τον τύπο

$$\mathrm{Univ}(\mathcal{U}) :\equiv \textstyle\prod(A, B : \mathcal{U})\, \mathrm{QInv}(\mathsf{idtoeqv}).$$

Υπάρχουν δύο τρόποι να χειριστούμε αυτή την ιδιότητα. Ο ένας τρόπος είναι να πούμε, όπως κάνει το [6], ότι όλα τα σύμπαντα στα οποία αναφερόμαστε είναι univalent· αυτό συνίσταται, κατά το μάλλον ή ήττον, στο να εντάξουμε στη θεωρία το univalence ως αξίωμα (εξ ου και ο όρος univalence axiom). Ο άλλος τρόπος είναι να το αναφέρουμε ρητά ως υπόθεση στα θεωρήματα που εξαρτώνται από αυτό. Εμείς εδώ θα κάνουμε κάτι που είναι πιο κοντά στο δεύτερο, αλλά στην πράξη δεν έχει μεγάλη σημασία.

Λήμμα 39. *Μέσα σε ένα univalent σύμπαν ισχύουν τα εξής:*

1. $\mathsf{refl}_A = \mathsf{ua}(\mathsf{id}_A)$,
2. $\mathsf{ua}(f) \cdot \mathsf{ua}(g) = \mathsf{ua}(g \circ f)$,
3. $\mathsf{ua}(f)^{-1} = \mathsf{ua}(f^{-1})$. □

Περνάμε σε συναρτήσεις. Η ομοτοπία είναι ανακλαστική (λήμμα 26), επομένως ορίζεται συνάρτηση

$$\mathsf{happly} : (f = g) \longrightarrow (f \sim g).$$

Ορισμός 40. Ένας τύπος συναρτήσεων $\prod(x : A)\, B(x)$ είναι *εκτασιακός (extensional)* εάν η happly είναι ισοδυναμία. Στην περίπτωση αυτή, η (δοθείσα) αντίστροφη της happly συμβολίζεται funext.

Αποδεικνύεται, τόσο παρουσία ανώτερων επαγωγικών τύπων, όσο και παρουσία univalence, ότι όλοι οι τύποι συναρτήσεων είναι εκτασιακοί.

Με τη βοήθεια των happly και funext μπορούμε να περιγράψουμε τη δομή ομαδοειδούς ενός εκτασιακού τύπου συναρτήσεων:

Λήμμα 41. *Έστω $\prod(x : A)\, B(x)$ εκτασιακός.*

1. $\mathsf{refl}_f = \mathsf{funext}(\lambda(x : A)\, \mathsf{refl}_{f(x)})$,
2. $p \cdot q = \mathsf{funext}(\lambda(x : A)\, \mathsf{happly}(p)(x) \cdot \mathsf{happly}(q)(x))$,
3. $p^{-1} = \mathsf{funext}(\lambda(x : A)\, \mathsf{happly}(p)(x)^{-1})$.

Απόδειξη. Η happly έχει οριστεί από την επαγωγή

$$\mathsf{happly}(\mathsf{refl}_f) \;:\equiv \lambda(x : A)\, \mathsf{refl}_{f(x)}.$$

Η πρώτη σχέση προκύπτει εφαρμόζοντας την funext. Για τη δεύτερη αρκεί, με επαγωγή στα p και q, να δείξουμε ότι

$$\mathsf{refl}_f \cdot \mathsf{refl}_f = \mathsf{funext}(\lambda(x : A)\, \mathsf{refl}_{f(x)} \cdot \mathsf{refl}_{f(x)}),$$

το οποίο ανάγεται στο προηγούμενο. Η τρίτη σχέση αποδεικνύεται ομοίως με επαγωγή στο p. □

Επειδή ο μη εξαρτώμενος τύπος συναρτήσεων $A \longrightarrow B$ είναι ειδική περίπτωση του εξαρτώμενου τύπου συναρτήσεων $\prod(x : A) B(x)$ όταν η B είναι ανεξάρτητη του x, όλα όσα έχουμε πει παραπάνω ισχύουν και σε μη εξαρτώμενες περιπτώσεις. Οι κανόνες για τη μεταφορά, ωστόσο, είναι κάπως απλούστεροι στη μη εξαρτώμενη περίπτωση. Δοθέντος ενός μονοπατιού $p : x_1 = x_2$ σε έναν τύπο X και δύο οικογενειών $(x : X)\, A(x)$ και $(x : X)\, B(x)$, έστω $(x : X)\, C(x)$ η οικογένεια με $C(x) \;:\equiv A(x) \longrightarrow B(x)$. Για $f : C(x_1)$ έχουμε

$$\mathsf{transport}^C(p, f) = \lambda(x : X)\, \mathsf{transport}^B(p, f(\mathsf{transport}^A(p^{-1}, x))) \tag{21}$$

Με άλλα λόγια, η μεταφορά μιας συνάρτησης $f : A(x_1) \longrightarrow B(x_1)$ κατά μήκος ενός μονοπατιού $p : x_1 = x_2$ είναι η συνάρτηση $A(x_2) \longrightarrow B(x_2)$ που μεταφέρει το όρισμά της προς τα πίσω κατά μήκος του p (στην οικογένεια A), εφαρμόζει την f, και στη συνέχεια μεταφέρει το αποτέλεσμα προς τα εμπρός κατά μήκος του p (στην οικογένεια B). Αυτό μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με επαγωγή στο p.

Ισότητα

Ο στόχος μας εδώ είναι να επεκτείνουμε τον χαρακτηρισμό τής ισότητας ενός τύπου στα μονοπάτια αυτού τού τύπου.

Θεώρημα 42 ([6, θεώρημα 2.11.1])**.** *Η δράση μιας ισοδυναμίας $f : A \longrightarrow B$ στα μονοπάτια τού A επάγει, για οποιαδήποτε $x, y : A$, μία ισοδυναμία*

$$(x = y) \simeq (f(x) = f(y)).$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε univalence. Το θεώρημα ισχύει και χωρίς αυτή την υπόθεση· ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για την (πιο μακροσκελή) απόδειξη χωρίς univalence μπορεί να ανατρέξει στο [6, θεώρημα 2.11.1].

Από την υπόθεση, η f είναι ισοδυναμία· δηλαδή, έχουμε ένα $e : \mathrm{IsEquiv}(f)$ και επομένως $\mathsf{pair}(f, e) : A \simeq B$. Από univalence, η $\mathsf{idtoeqv} : (A = B) \longrightarrow (A \simeq B)$ είναι ισοδυναμία, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $\mathsf{pair}(f, e)$ είναι τής μορφής $\mathsf{idtoeqv}(q)$ για κάποιο $q : A = B$. Εν συνεχεία, με επαγωγή στο q, μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση που το q είναι το refl_A, οπότε η f είναι η id_A. Από το λήμμα 21 έχουμε, για $p : x = y$,

$$\mathsf{id}_A(p) = p,$$

και επομένως η δράση τής id_A στα μέλη τού $x = y$ είναι η ταυτοτική, που είναι ισομορφισμός (λήμμα 29), άρα ισοδυναμία. □

Ειδικότερα, εάν έχουμε έναν χαρακτηρισμό

$$f : (x = y) \simeq E(x, y)$$

τής ισότητας ενός τύπου A, το παραπάνω θεώρημα μας παρέχει έναν χαρακτηρισμό

$$(p = q) \simeq (f(p) = f(q))$$

τής ισότητας του $x = y$. Παραδείγματος χάριν, για $x, y : A_1 \times A_2$ έχουμε (θεώρημα 31) μία ισοδυναμία

$$f : (x = y) \longrightarrow (\mathsf{pr}_1(x) = \mathsf{pr}_1(y)) \times (\mathsf{pr}_2(x) = \mathsf{pr}_2(y))$$

με

$$f(p) \equiv \mathsf{pair}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p)).$$

Έπεται ότι, για $p, q : x = y$, υπάρχει ισοδυναμία

$$\begin{aligned} (p = q) &\simeq (\mathsf{pair}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p)) = \mathsf{pair}(\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(q), \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(q))) \\ &\simeq (\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(p) = \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_1}(q)) \times (\mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(p) = \mathsf{ap}_{\mathsf{pr}_2}(q)). \end{aligned}$$

8 Λογική και σύνολα[3]

Σε προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πώς οι τύποι μπορούν να διαβαστούν ως προτάσεις, και πώς οι προτάσεις μπορούν να εκφραστούν ως τύποι. Αυτή η αναπαράσταση της λογικής εντός τής θεωρίας τύπων χρησιμοποιήθηκε σε διάφορες περιπτώσεις, τόσο για τη διατύπωση ορισμών, όσο και για την απόδειξη μαθηματικών προτάσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε μία διαφορετική προσέγγιση στη λογική, και θα δούμε πού υπερτερεί και πού υστερεί.

Μια και στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε χρήση ανώτερων επαγωγικών τύπων, θα θεωρούμε, χωρίς να το αναφέρουμε ρητά, ότι οι τύποι συναρτήσεων είναι εκτασιακοί.

8.1 Απλές προτάσεις

Κατ΄ αρχήν, οποισδήποτε τύπος μπορεί να αναγνωστεί ως πρόταση, αρκεί οι κατασκευαστές του να ερμηνευθούν ως προδιαγραφές/αναθέσεις τεκμηρίων αλήθειας. Ο Nat, για παράδειγμα, είναι μία πρόταση που έχει μία άπειρη ακολουθία τεκμηρίων αλήθειας. Αυτό μάς επιτρέπει, χωρίς καμία περιστροφή, να αντιστοιχίσουμε τις λογικές σταθερές σε κατάλληλους τρόπους σχηματισμού τύπων· π.χ., η διάζευξη δύο τύπων αναπαρίσταται από το διμελές άθροισμα, και ούτω καθεξής. Αυτή η γνησίως κατασκευαστική αντίληψη της λογικής έχει προφανή πλεονεκτήματα. Είναι, όμως, επιθυμητό να είμαστε σε θέση να εκφράσουμε, στο αυτό πλαίσιο, και κλασικές θεωρίες. Ωστόσο, μπορούμε να δείξουμε ότι οι τυποθεωρητικές εκφράσεις των κλασικών αρχών τής διπλής άρνησης και τού αποκλειόμενου τρίτου είναι ασύμβατες με το univalence.

Θεώρημα 43. *Έστω ότι το σύμπαν $\mathcal{U}$ είναι univalent, και ότι για όλους τούς $X : \mathcal{U}$, $\neg\neg X \to X$. Εάν ο $X : \mathcal{U}$ είναι κατοικημένος, τότε οποιαδήποτε ισοδυναμία $f : X \to X$ έχει σταθερό σημείο.*

Απόδειξη. Από univalence, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η f είναι τής μορφής $\mathsf{idtoeqv}(p)$ για κάποιο $p : X = X$ στο $\mathcal{U}$. Θεωρούμε τις οικογένειες $(X : \mathcal{U})\ A(X)$ με $A(X) :\equiv \neg\neg X$, $(X : \mathcal{U})\, B(X)$ με $B(X) :\equiv X$, και $(X : \mathcal{U})\, C(X)$ με $C(X) :\equiv A(X) \to B(X)$. Εφ΄ όσον το $\mathcal{U}$ είναι ευσταθές έχουμε, για $X : \mathcal{U}$, ένα $\mathsf{st}_X : C(X)$. Από το λήμμα 22,

$$\mathsf{transport}^C(p, \mathsf{st}_X) = \mathsf{st}_X.$$

Από τη σχέση (21) παίρνουμε

$$\mathsf{transport}^C(p, \mathsf{st}_X) = \lambda(y : \neg\neg X)\ \mathsf{transport}^B(p, \mathsf{st}_X(\mathsf{transport}^A(p^{-1}, y))).$$

Εν τω μεταξύ, ο τύπος $\neg\neg X$ είναι απλή πρόταση, οπότε

$$\mathsf{transport}^A(p^{-1}, y) = y.$$

Βάζοντας όλα αυτά μαζί παίρνουμε

$$\begin{aligned} f \circ \mathsf{st}_X &= \lambda(y : \neg\neg X)\ f(\mathsf{st}_X(y)) \\ &= \lambda(y : \neg\neg X)\ \mathsf{idtoeqv}(p)(\mathsf{st}_X(y)) \\ &= \lambda(y : \neg\neg X)\ \mathsf{transport}^B(p, \mathsf{st}_X(y)) \\ &= \lambda(y : \neg\neg X)\ \mathsf{transport}^B(p, \mathsf{st}_X(\mathsf{transport}^A(p^{-1}, y))) \\ &= \mathsf{transport}^C(p, \mathsf{st}_X) \\ &= \mathsf{st}_X. \end{aligned}$$

[3]Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο [6, κεφάλαιο 3].

Εν τω μεταξύ, έχουμε ένα $x : X$, από το οποίο σχηματίζεται ένα μέλος

$$w \; :\equiv \lambda(g : \neg X)\; g(x)$$

τού $\neg\neg X$, οπότε

$$f(\mathsf{st}_X(w)) = \mathsf{st}_X(w). \qquad \square$$

Διάφοροι τύποι είναι ισοδύναμοι με τον εαυτό τους κατά τρόπους που δεν έχουν σταθερά σημεία· π.χ., ο $\mathrm{Bool} \simeq \mathbf{1} + \mathbf{1}$ έχει την ισοδυναμία $\mathsf{neg} : \mathrm{Bool} \longrightarrow \mathrm{Bool}$ με

$$\mathsf{neg}(\mathsf{false}) \equiv \mathsf{true},$$
$$\mathsf{neg}(\mathsf{true}) \equiv \mathsf{false}.$$

Έπεται ότι, σε ένα univalent σύμπαν $\mathcal{U}$ που είναι κλειστό ως προς τις στοιχειώδεις τυποθεωρητικές πράξεις, οι τύποι τής μορφής $\neg\neg X \longrightarrow X$, όπου $X : \mathcal{U}$, είναι αδύνατο να είναι όλοι κατοικημένοι. Και, εφ΄ όσον η αρχή τής διπλής άρνησης απορρέει από την αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου, είναι επίσης αδύνατο να είναι κατοικημένοι όλοι οι τύποι τής μορφής $X + \neg X$.

Τόσο οι επιθυμητές, όσο και οι ανεπιθύμητες ιδιότητες της κατά Curry-Howard λογικής έχουν κοινή προέλευση: Όταν οι τύποι διαβάζονται ως προτάσεις, ενδέχεται να περιέχουν πληροφορία πέραν τού εάν είναι αληθείς ή ψευδείς, η οποία απορρέει από την ύπαρξη διαφορετικών μεταξύ τους τεκμηρίων αλήθειας, και όλες οι τυποθεωρητικές κατασκευές σέβονται αυτή την επιπλέον πληροφορία. Ωστόσο, από την οπτική γωνία από την οποία συνήθως εννοούμε και χρησιμοποιούμε τις προτάσεις δεν ενδιαφερόμαστε για το πόσα και ποια τεκμήρια αλήθειας έχει μία πρόταση, αλλά μόνο για το εάν έχει τέτοια τεκμήρια, δηλαδή εάν αληθεύει.

Μπορούμε να λάβουμε μία πιο συμβατική λογική περιοριζόμενοι σε τύπους που δεν περιέχουν πληροφορία πλέον τής αληθοτιμής τους, και βλέποντας μόνο αυτούς ως λογικές προτάσεις. Αυτό υποδεικνύει τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 44. Μία *απλή πρόταση (mere proposition)* είναι ένας τύπος, όλα τα μέλη τού οποίου είναι ίσα μεταξύ τους.

Μπορούμε να γράψουμε τον παραπάνω ορισμό ως τον τύπο

$$\mathrm{IsProp}(A) \; :\equiv \prod(x, y : A)\; x = y.$$

Απόρροια του παραπάνω ορισμού είναι ότι η λογική ισοδυναμία μεταξύ απλών προτάσεων ταυτίζεται με την ισοδυναμία (και, παρουσία univalence, με την ισότητα):

Λήμμα 45. *Για απλές προτάσεις A και B, εάν $A \longrightarrow B$ και $B \longrightarrow A$, τότε $A \simeq B$.*

Απόδειξη. Εάν $f : A \longrightarrow B$ και $g : B \longrightarrow A$ τότε, εφ΄ όσον ο A είναι απλή πρόταση, για $x : A$ θα έχουμε $g(f(x)) = x$· όμοια, για $y : B$ έχουμε $f(g(y)) = y$. Άρα, οι f και g είναι αντίστροφες μεταξύ τους. $\square$

Η έννοια της απλής πρότασης μας επιτρέπει να εκφράσουμε την αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου με τρόπο που να μην έρχεται σε σύγκρουση με το univalence:

$$\mathrm{LEM}(\mathcal{U}) \; :\equiv \prod(A : \mathcal{U})\; \big[\mathrm{IsProp}(A) \longrightarrow (A + \neg A)\big].$$

8.2 *n*-τύποι

Ας ανεβούμε ένα σκαλοπάτι πάνω από τις απλές προτάσεις.

Ορισμός 46. Ένα *σύνολο* είναι ένας τύπος A τέτοιος που για οποιαδήποτε $x, y : A$ ο τύπος $x = y$ είναι απλή πρόταση.

Συμβολικά,

$$\mathrm{IsSet}(A) :\equiv \prod(x, y : A)\, \mathrm{IsProp}(x = y).$$

Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε στην επόμενη διάσταση, και να ονομάσουμε (απλό) ομαδοειδές (ή 1-ομαδοειδές) έναν τύπο, όλες οι ισότητες του οποίου είναι σύνολα,

$$\mathrm{IsGroupoid}(A) :\equiv \prod(x, y : A)\, \mathrm{IsSet}(x = y),$$

και ούτω καθεξής. Αντ΄ αυτού, θα ορίσουμε ολόκληρη την κλίμακα αυτή με αναδρομή, ξεκινώντας μάλιστα ένα επίπεδο κάτω από τις απλές προτάσεις:

Ορισμός 47. Ένας τύπος A ονομάζεται *συσταλτός (contractible)* εάν υπάρχει $a : A$, το *κέντρο συστολής*, ούτως ώστε, για οποιδήποτε $x : A$, $a = x$. Συμβολίζουμε το δοσμένο μονοπάτι $a = x$ με contr_x.

Με άλλα λόγια, έχουμε έναν τύπο

$$\mathrm{IsContr}(A) :\equiv \sum(a : A) \prod(x : A)\, a = x.$$

Λήμμα 48. *Ο τύπος* $\mathbf{1}$ *είναι συσταλτός.*

Απόδειξη. Άσκηση 5.2. □

Μπορούμε να δώσουμε τον εξής χαρακτηρισμό τής συσταλτότητας:

Θεώρημα 49. *Για έναν τύπο A, τα ακόλουθα είναι λογικά ισοδύναμα:*

1. *Ο A είναι συσταλτός,*
2. *Ο A είναι κατοικημένη (ή αληθής) απλή πρόταση,*
3. *Ο A είναι ισοδύναμος με τον* $\mathbf{1}$.

Απόδειξη. 1. $\Longrightarrow$ 2.: Εάν ο A έχει κέντρο συστολής a, τότε σίγουρα είναι κατοικημένος (από το a), και για $x, y : A$ έχουμε $x = a = y$.

2. $\Longrightarrow$ 3.: Εφ΄ όσον οι A και $\mathbf{1}$ είναι αμφότεροι κατοικημένοι, υπάρχουν σταθερές συναρτήσεις $A \longrightarrow \mathbf{1}$ και $\mathbf{1} \longrightarrow A$. Επομένως, είναι λογικά ισοδύναμοι. Και εφ΄ όσον είναι απλές προτάσεις (ο $\mathbf{1}$ είναι απλή πρόταση από το προηγούμενο βήμα τής απόδειξης), από το λήμμα 45 έπεται ότι είναι ισοδύναμοι.

3. $\Longrightarrow$ 1.: Η συσταλτότητα του A έπεται από την ισοδυναμία του με έναν συσταλτό τύπο. Αναλυτικότερα, εάν οι $f : A \longrightarrow \mathbf{1}$ και $g : \mathbf{1} \longrightarrow A$ είναι αντίστροφες μεταξύ τους, τότε για $x : A$ έχουμε

$$0_{\mathbf{1}} = f(x),$$

οπότε

$$g(0_{\mathbf{1}}) = g(f(x)) = x.$$

Επομένως, ο A έχει κέντρο συστολής το $g(0_{\mathbf{1}})$. □

Ορισμός 50. Για $n \geq -2$, το κατηγόρημα Is−n−type ορίζεται με την αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathrm{Is}\text{–}(-2)\text{–type}(A) &:\equiv \mathrm{IsContr}(A), \\ \mathrm{Is}\text{–}(n+1)\text{–type}(A) &:\equiv \prod(x, y : A)\, \mathrm{Is}\text{–}n\text{–type}(x = y). \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο A είναι n-τύπος.

Οι n-τύποι έχουν τις ακόλουθες στοιχειώδεις ιδιότητες κλειστότητας:

Λήμμα 51. *Για $n \geq -2$, εάν ο A είναι n-τύπος και για $x : A$ ο $B(x)$ είναι n-τύπος, τότε ο $\sum(x : A)\, B(x)$ είναι n-τύπος. Ειδικότερα, εάν οι A και B είναι n-τύποι, τότε ο $A \times B$ είναι n-τύπος.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο n:

Για τη βάση τής επαγωγής (όπου n το -2), θεωρούμε κέντρα συστολής a του A και $b(x)$ του $B(x)$ για $x : A$, και θα δείξουμε ότι το $\mathsf{pair}(a, b(a))$ είναι κέντρο συστολής τού $\sum(x : A)\, B(x)$, δηλαδή για οποιοδήποτε $y : \sum(x : A)\, B(x)$, $\mathsf{pair}(a, b(a)) = y$. Από τον χαρακτηρισμό τής ισότητας στον $\sum(x : A)\, B(x)$ έχουμε

$$(\mathsf{pair}(a, b(a)) = y) \simeq \sum(p : a = \mathsf{pr}_1(y))\, \mathsf{transport}^B(p, b(a)) = \mathsf{pr}_2(y).$$

Αρκεί, επομένως, να βεβαιώσουμε ότι ο τύπος στα δεξιά είναι κατοικημένος. Κατ΄ αρχάς, υπάρχει μονοπάτι

$$\mathsf{contr}_{\mathsf{pr}_1(y)} : a = \mathsf{pr}_1(y),$$

οπότε λαμβάνουμε ένα μονοπάτι q :

$$\begin{aligned} \mathsf{transport}(\mathsf{contr}_{\mathsf{pr}_1(y)}, b(a)) &= b(\mathsf{pr}_1(y)) && [\text{λήμμα } 22] \\ &= \mathsf{pr}_2(y). && [b(\mathsf{pr}_1(y)) \text{ κέντρο συστολής τού } B(\mathsf{pr}_1(y))] \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια έχουμε

$$\mathsf{pair}(\mathsf{contr}_{\mathsf{pr}_1(y)}, q) : \sum(p : a = \mathsf{pr}_1(y))\, \mathsf{transport}^B(p, b(a)) = \mathsf{pr}_2(y).$$

Για το επαγωγικό βήμα, θεωρούμε έναν $(n+1)$-τύπο A και $(n+1)$-τύπους $B(x)$ για $x : A$. Από τον χαρακτηρισμό τής ισότητας στα εξαρτώμενα αθροίσματα, για $y, z : \sum(x : A)\, B(x)$ έχουμε

$$(y = z) \simeq \sum(p : \mathsf{pr}_1(y) = \mathsf{pr}_1(z))\, \mathsf{transport}^B(p, \mathsf{pr}_2(y)) = \mathsf{pr}_2(z).$$

Εφ΄ όσον οι $\mathsf{pr}_1(y) = \mathsf{pr}_1(z)$ και $\mathsf{transport}^B(p, \mathsf{pr}_2(y)) = \mathsf{pr}_2(z)$ είναι ισότητες μέσα στους $(n+1)$-τύπους A και $B(\mathsf{pr}_1(z))$ αντίστοιχα, έπεται ότι είναι n-τύποι, οπότε ο τύπος στα δεξία τής παραπάνω ισοδυναμίας είναι n-τύπος (επαγωγική υπόθεση). ΄Αρα, ο $y = z$ είναι n-τύπος, και επομένως ο $\sum(x : A)\, B(x)$ είναι $(n+1)$-τύπος. □

Λήμμα 52. *Εάν για $x : A$ ο $B(x)$ είναι n-τύπος, τότε ο $\prod(x : A)\, B(x)$ είναι n-τύπος. Ειδικότερα, εάν ο B είναι n-τύπος, τότε ο $A \longrightarrow B$ είναι n-τύπος.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο n:

Για τη βάση τής επαγωγής (όπου n το -2), έχουμε ένα κέντρο συστολής $b(x)$ τού $B(x)$ για $x : A$, και θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\lambda(x : A)\, b(x)$ είναι κέντρο συστολής τού $\prod(x : A)\, B(x)$. Για $g : \prod(x : A)\, B(x)$ και $a : A$ έχουμε

$$\begin{aligned} (\lambda(x : A)\, b(x))(a) &\equiv b(a) \\ &= g(a). && (b(a) \text{ κέντρο συστολής}) \end{aligned}$$

Εφ΄ όσον οι τύποι συναρτήσεων έχουν υποτεθεί εκτασιακοί, έπεται ότι

$$\lambda(x : A)\, b(x) = g.$$

Για το επαγωγικό βήμα, ας υποθέσουμε ότι για $x : A$ ο $B(x)$ είναι $(n+1)$-τύπος. Εφ΄ όσον ο $\prod(x : A)\, B(x)$ είναι εκτασιακός, για οποιεσδήποτε $f, g : \prod(x : A)\, B(x)$ θα είναι

$$(f = g) \simeq \prod(x : A)\, f(x) = g(x).$$

Εφ΄ όσον ο $f(x) = g(x)$ είναι ισότητα μέσα στον $(n+1)$-τύπο $B(x)$, έπεται ότι είναι n-τύπος, οπότε ο $\prod(x : A)\, f(x) = g(x)$ είναι n-τύπος (επαγωγική υπόθεση). Άρα ο $f = g$ είναι n-τύπος, και επομένως ο $\prod(x : A)\, B(x)$ είναι $(n+1)$-τύπος. □

Οι απλές προτάσεις συμπίπτουν με τους (-1)-τύπους.

Λήμμα 53. *Εάν ο A είναι απλή πρόταση, τότε για οποιαδήποτε $x, y : A$ ο τύπος $x = y$ είναι συσταλτός.*

Πρώτη απόδειξη. Εάν $x, y : A$, τότε ο A είναι κατοικημένος (από τα x και y), οπότε $A \simeq \mathbf{1}$. Εν τω μεταξύ, από τον χαρακτηρισμό τής ισότητας στον $\mathbf{1}$ (θεώρημα 33), για οποιαδήποτε $x, y : \mathbf{1}$, $(x = y) \simeq \mathbf{1}$.

Δεύτερη απόδειξη. Δοθέντων $x, y : A$, θεωρούμε την οικογένεια $(z : A)\, C(z)$ με $C(z) :\equiv (x = z)$. Από την υπόθεση, για $z : A$ έχουμε ένα $u(z) : C(z)$. Για οποιοδήποτε $p : x = y$ έχουμε, από το λήμμα 22,

$$\mathsf{transport}^{C}(p, u(x)) = u(y).$$

Εν τω μεταξύ, από το λήμμα 24,

$$\mathsf{transport}^{C}(p, u(x)) = u(x) \cdot p.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε

$$u(x)^{-1} \cdot u(y) = p,$$

και επομένως το $u(x)^{-1} \cdot u(y)$ είναι κέντρο συστολής τού τύπου $x = y$. □

Έπεται από το προηγούμενο λήμμα ότι για οποιονδήποτε τύπο A, οι τύποι $\mathrm{IsProp}(A)$ και $\mathrm{Is{-}(-1){-}type}(A)$ είναι λογικά ισοδύναμοι. Μάλιστα, είναι ισοδύναμοι, καθώς είναι αμφότεροι απλές προτάσεις:

Λήμμα 54. *Ο τύπος* $\mathrm{IsProp}(A)$ *είναι απλή πρόταση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι ο $\mathrm{IsProp}(A)$ είναι εκτασιακός, οπότε για να δείξουμε ότι οι $f, g : \mathrm{IsProp}(A)$ είναι ίσες μεταξύ τους αρκεί να δείξουμε ότι $f(x, y) = g(x, y)$ για οποιαδήποτε $x, y : A$. Όμως, τα $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι αμφότερα μονοπάτια από το x στο y και επομένως είναι ίσα διότι, δυνάμει τής f ή τής g, ο A είναι απλή πρόταση, οπότε ο $x = y$ είναι συσταλτός, άρα απλή πρόταση. □

Λήμμα 55. *Για $n \geq -2$, ο τύπος* $\mathrm{Is{-}}n\mathrm{{-}type}(A)$ *είναι απλή πρόταση.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο n:

Για να δείξουμε ότι ο $\mathrm{IsContr}(A)$ είναι απλή πρόταση, θεωρούμε την οικογένεια $(a : A)\ C(a)$ με $C(a) :\equiv \prod(x : A)\ a = x$. Για $\mathsf{pair}(a, \mathsf{contr}), \mathsf{pair}(a', \mathsf{contr}') : \mathrm{IsContr}(A)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathsf{contr} &: C(a), \\ \mathsf{contr}' &: C(a'), \\ \mathsf{contr}_a &: a = a', \end{aligned}$$

και επομένως

$$\mathsf{transport}^C(\mathsf{contr}_a, \mathsf{contr}) : C(a').$$

Εφ΄ όσον ο A είναι συσταλτός (δυνάμει εκατέρου των $\mathsf{pair}(a, \mathsf{contr})$ και $\mathsf{pair}(a', \mathsf{contr}')$), έπεται ότι είναι απλή πρόταση, οπότε ο $a' = x$ είναι συσταλτός για $x : A$, άρα ο $C(a') \equiv \prod(x : A) a' = x$ είναι συσταλτός, και επομένως είναι απλή πρόταση. Συνεπώς, υπάρχει μονοπάτι

$$q : \mathsf{transport}^C(\mathsf{contr}_a, \mathsf{contr}) = \mathsf{contr}'.$$

Σχηματίζεται έτσι το μέλος $\mathsf{pair}(\mathsf{contr}_a, q)$ τού τύπου

$$\sum(p : a = a')\ \mathsf{transport}^C(p, \mathsf{contr}) = \mathsf{contr}'.$$

Αυτός ο τύπος είναι, από τον χαρακτηρισμό τής ισότητας στα εξαρτώμενα αθροίσματα, ισοδύναμος με τον $\mathsf{pair}(a, \mathsf{contr}) = \mathsf{pair}(a', \mathsf{contr}')$.

Για το επαγωγικό βήμα, ας θεωρήσουμε έναν τύπο A. Για $x, y : A$, από την επαγωγική υπόθεση ο τύπος $\mathrm{Is}\text{–}n\text{–}\mathrm{type}(x = y)$ είναι απλή πρόταση, άρα (-1)-τύπος. Από την κλειστότητα ως προς εξαρτώμενα γινόμενα (λήμμα 52) έπεται ότι ο τύπος $\mathrm{Is}\text{–}(n+1)\text{–}\mathrm{type}(A) \equiv \prod(x, y : A)\ \mathrm{Is}\text{–}n\text{–}\mathrm{type}(x = y)$ είναι $(n + 1)$-τύπος, άρα απλή πρόταση. □

Η κλίμακα των n-τύπων είναι κλειστή προς τα άνω.

Λήμμα 56. *Εάν ο A είναι n-τύπος, τότε είναι $(n + 1)$-τύπος.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο n. Αφ΄ ενός, εάν ο A είναι (-2)-τύπος, δηλαδή συσταλτός, τότε είναι απλή πρόταση, δηλαδή (-1)-τύπος. Αφ΄ ετέρου, εάν ο A είναι $(n + 1)$-τύπος, τότε για $x, y : A$ ο τύπος $x = y$ είναι n-τύπος, οπότε είναι $(n + 1)$-τύπος (επαγωγική υπόθεση), και επομένως ο A είναι $(n + 2)$-τύπος. □

8.3 Η λογική των απλών προτάσεων

Όλες οι λογικές σταθερές πλην των $\vee$ και $\exists$ διατηρούν απλές προτάσεις. Για τον $\mathbf{0}$ είναι τετριμμένο, και για τον $\mathbf{1}$ είναι πόρισμα του θεωρήματος 49. Η κλειστότητα των απλών προτάσεων ως προς σύζευξη και καθολική ποσόδειξη προκύπτει από τα λήμματα 51 και 52 αντίστοιχα, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι οι απλές προτάσεις είναι οι (-1)-τύποι. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε τις ακόλουθες πράξεις μεταξύ απλών προτάσεων:

$$\begin{aligned} \top &:\equiv \mathbf{1}, \\ \bot &:\equiv \mathbf{0}, \\ P \,\&\, Q &:\equiv P \times Q, \\ P \supset Q &:\equiv P \longrightarrow Q, \\ \forall(x : A)\ P(x) &:\equiv \prod(x : A)\ P(x). \end{aligned}$$

Από την άλλη, ακόμα και εάν οι A_1 και A_2 είναι απλές προτάσεις, ο $A_1 + A_2$ γενικά δεν είναι απλή πρόταση· π.χ., τα δύο μέλη τού $\mathbf{1} + \mathbf{1} \simeq \mathrm{Bool}$ δεν είναι ίσα μεταξύ τους (θεώρημα 13). Από λογική άποψη, το άθροισμα τύπων αντιστοιχεί σε μία «γνησίως κατασκευαστική» έννοια διάζευξης, καθένα τεκμήριο αλήθειας της οποίας περιέχει ως πρόσθετη πληροφορία κάποιον από τους δύο διαζευκτέους ο οποίος αληθεύει. Το ίδιο ζήτημα ανακύπτει με τον τύπο $\sum(x : A)\, B(x)$. Ο τύπος αυτός ενσαρκώνει μία γνησίως κατασκευαστική ανάγνωση του «υπάρχει $x : A$ έτσι ώστε $B(x)$» που θυμάται τον μάρτυρα x, και ως εκ τούτου δεν είναι γενικά απλή πρόταση, ακόμη και εάν όλοι οι $B(x)$ είναι.

Τα παραπάνω συνδέονται άμεσα με δύο ιδιότητες που τα κατασκευαστικά συστήματα έχουν, ενώ τα κλασικά γενικά όχι: Την *ιδιότητα της διάζευξης (disjunction property)*, που λέει ότι εάν $\vdash \phi_1 \vee \phi_2$ τότε $\vdash \phi_1$ ή $\vdash \phi_2$, και την *ιδιότητα της ύπαρξης (existence property)*, που λέει ότι εάν $\vdash \exists(x : A)\, \phi(x)$, τότε $\vdash \phi(t)$ για κάποιον κλειστό όρο $t : A$.

Εάν ενδιαφερόμασταν αποκλειστικά για την κλασική λογική, δε θα υπήρχε θέμα, καθώς στην περίπτωση αυτή τα $\vee$ και $\exists$ ορίζονται:

$$\begin{aligned} P \vee_c Q &:\equiv \neg(\neg P \,\&\, \neg Q), \\ \exists_c(x : A)\, P(x) &:\equiv \neg\forall(x : A)\, \neg P(x). \end{aligned} \tag{22}$$

Ωστόσο, θέλουμε να διατηρήσουμε την επιλογή να κάνουμε κατασκευαστικά μαθηματικά. Για τον σκοπό αυτόν, χρειαζόμαστε έναν τρόπο να *περικόψουμε* ή να *συνθλίψουμε* τους $P + Q$ και $\sum(x : A)\, P(x)$ σε απλές προτάσεις, ξεχνώντας αυτές τις πρόσθετες πληροφορίες.

8.4 Προτασιακή σύνθλιψη

Το ζητούμενο είναι να οριστεί, για οποιονδήποτε τύπο A (ή για οποιονδήποτε τύπο $A : \mathcal{U}$), μία απλή πρόταση $\|A\|$, η οποία να μπορεί να υποκαταστήσει τον A στις λογικές του λειτουργίες. Αυτό αναλύεται στα εξής δύο: Πρώτον, για οποιαδήποτε απόδειξη με συμπέρασμα A, να υπάρχει απόδειξη (με τις ίδιες υποθέσεις) με συμπέρασμα $\|A\|$. Αναγκαία και ικανή συνθήκη γι΄ αυτό είναι για οποιοδήποτε τεκμήριο αλήθειας $a : A$ να έχουμε ένα τεκμήριο αλήθειας $|a| : \|A\|$. Και δεύτερον, για οποιαδήποτε απόδειξη u μιας απλής πρότασης P από τον A (και, ενδεχομένως, άλλες υποθέσεις), να υπάρχει μία απόδειξη v της P απο την $\|A\|$· θα θεωρήσουμε την λίγο ισχυρότερη απαίτηση ότι η v έχει ουσιαστικά την ίδια δομή με την u, με την έννοια ότι $v(|x|) = u(x)$ για οποιοδήποτε $x : A$. Συνοψίζοντας, έχουμε τα εξής:

- Ο $\|A\|$ είναι απλή πρόταση.
- Για $a : A$ έχουμε ένα $|a| : \|A\|$.
- Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\, u(x) : P$, όπου P απλή πρόταση, ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \|A\|)\ v(x) : P$ ούτως ώστε για $x : A$, $v(|x|) \equiv u(x)$.

Εφ΄ όσον τα παραπάνω ικανοποιούνται, η $\|A\|$ ονομάζεται *προτασιακή σύνθλιψη (propositional truncation)* ή (-1)-*σύνθλιψη* του A.

Με τη βοήθεια της προτασιακής σύνθλιψης, μπορούμε να συμπεριλάβουμε τους $\vee$ και $\exists$ στη λογική των απλών προτάσεων θέτοντας

$$\begin{aligned} P \vee Q &:\equiv \|P + Q\|, \\ \exists(x : A)\, P(x) &:\equiv \|\textstyle\sum(x : A)\, P(x)\|. \end{aligned}$$

Ένας τρόπος να ορίσουμε την προτασιακή σύνθλιψη για τους τύπους ενός σύμπαντος $\mathcal{U}$ είναι να θέσουμε

$$\|A\|_{\mathcal{U}} :\equiv \prod(X:\mathcal{U})\,\big[\mathrm{IsProp}(X) \to ((A \to X) \to X)\big].$$

Είναι εύκολο να πειστεί κανείς, χρησιμοποιώντας τό λήμμα 52, ότι ο $\|A\|_{\mathcal{U}}$ είναι απλή πρόταση. Επίσης, για $x : A$ έχουμε ένα μέλος

$$|x|_{\mathcal{U}} :\equiv \lambda(X:\mathcal{U})\,\lambda(h:\mathrm{IsProp}(X))\,\lambda(f:A \to X)\,f(x)$$

τού $\|A\|_{\mathcal{U}}$. Τέλος, δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x:A)\ u(x):P$, όπου P απλή πρόταση <u>στο $\mathcal{U}$</u>, μπορούμε να θέσουμε, για $y:\|A\|_{\mathcal{U}}$,

$$v(y) :\equiv y(P)(h)(\lambda(u)),$$

όπου $h:\mathrm{IsProp}(P)$ είναι ο δοσμένος μάρτυρας ότι ο P είναι απλή πρόταση. Η σχέση $v(|x|_{\mathcal{U}}) = u(x)$ είναι τετριμμένη.

Αυτός ο ορισμός τής σύνθλιψης έχει δύο ομοειδείς μεταξύ τους αδυναμίες. Πρώτον, η τρίτη ιδιότητα της σύνθλιψης ικανοποιείται μόνο για απλές προτάσεις που ανακλώνται στο $\mathcal{U}$· εάν ο A εμπλέκεται στην απόδειξη μιας απλής πρότασης $P:\mathcal{V}$, όπου $\mathcal{V}$ κάποιο άλλο (ανώτερο) σύμπαν, τότε θα πρέπει η σύνθλιψη του A να ληφθεί στο $\mathcal{V}$. Δεύτερον, ακόμη και εάν ενδιαφερόμαστε μόνο για απλές προτάσεις που ανακλώνται στο $\mathcal{U}$, γενικά το $\|A\|_{\mathcal{U}}$ δεν ανακλάται στο $\mathcal{U}$ αλλά στο αμέσως ανώτερο σύμπαν $\mathcal{U}'$. Σε πολλές περιπτώσεις, τα προαναφερθέντα δεν έχουν σημασία, αλλά ως γενικός ορισμός τής σύνθλιψης δεν είναι απόλυτα ικανοποιητικός.

Τα προβλήματα του $\|A\|_{\mathcal{U}}$ εξαφανίζονται εάν κάνουμε την (*impredicative*) υπόθεση ότι όλες οι προτάσεις ανακλώνται σε όλα τα σύμπαντα (*propositional resizing*, [6, σελ. 116]). Με την ακόμα ισχυρότερη υπόθεση $\mathrm{LEM}(\mathcal{U})$ για όλα τα σύμπαντα $\mathcal{U}$, έχουμε

$$\|A\| \simeq \neg\neg A$$

([6, άσκηση 3.14]). Παρατηρήστε ότι στην κλασική περίπτωση (22),

$$\begin{aligned} P \vee_c Q &\equiv \neg(\neg P \times \neg Q) \\ &\simeq \neg\neg(P+Q), \\ \exists_c(x:A)\,P(x) &\equiv \neg\forall(x:A)\,\neg P(x) \\ &\simeq \neg\neg\sum(x:A)\,P(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή, χωρίς να το αναφέρουμε, χρησιμοποιήσαμε την προτασιακή σύνθλιψη υπό την μορφή τής διπλής άρνησης.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε την προτασιακή σύνθλιψη ως (ανώτερο) επαγωγικό τύπο. Συγκεκριμένα, δοθέντος ενός τύπου A, ο τύπος $\|A\|$ έχει τους κατασκευαστές

- Για $a:A$, έχουμε $|a|:\|A\|$.
- Για $x,y:\|A\|$, έχουμε $\mathsf{p}(x,y):x=y$.

Η ιδιαιτερότητα του παραπάνω ορισμού είναι ότι οι κατασκευαστές δεν παράγουν μόνο μέλη, αλλά και μονοπάτια. Ο p, ο οποίος συνήθως δεν ονομάζεται, εγγυάται ότι ο $\|A\|$ είναι απλή πρόταση.

Η τρίτη ιδιότητα της προτασιακής σύνθλιψης είναι η αρχή αναδρομής τού $\|A\|$: Δοθέντων

- μιας απλής πρότασης P, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ c_{||}(x) : P$

η σχέση
$$t(|x|) \;:\equiv c_{||}(x)$$
ορίζει έναν μετασχηματισμό $(y : \|A\|)\ t(y) : P$.

Έχουμε επίσης μία αρχή επαγωγής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας απλών προτάσεων $(y : \|A\|)\ P(y)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ c_{||}(x) : P(|x|)$

η σχέση
$$t(|x|) \;:\equiv c_{||}(x)$$
ορίζει έναν μετασχηματισμό $(y : \|A\|)\ t(y) : P(y)$.

Αντίθετα με τους πιο στοιχειώδεις τύπους που είχαμε δει μέχρι τώρα, γενικά δεν έχουμε
$$\prod(y : \|A\|)\ \sum(x : A)\ |x| = y,$$
καθώς στην κατασκευή τού $\|A\|$ υπάρχει απώλεια πληροφορίας, που μας εμποδίζει από ένα $y : \|A\|$ να πάμε πίσω σε ένα $x : A$. Ισχύει όμως ότι

Λήμμα 57. $\forall(y : \|A\|)\ \exists(x : A)\ |x| = y$.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε την οικογένεια απλών προτάσεων $(y : \|A\|)\ P(y)$ με
$$P(y) \;:\equiv \exists(x : A)\ |x| = y.$$
Ορίζουμε μετασχηματισμό $(y : \|A\|)\ t(y) : P(y)$ με αναδρομή στο y: Για $a : A$ θέτουμε
$$t(|a|) \;:\equiv |\mathsf{pair}(a, \mathsf{refl}_{|a|})|.$$
Το ζητούμενο τεκμήριο αλήθειας είναι το $\lambda(t) : \forall(y : \|A\|)\ \exists(x : A)\ |x| = y$. □

8.5 Το αξίωμα της επιλογής

Θεώρημα 58. *Έστωσαν A τύπος και $(x : A)\, B(x)$ και $(x : A, y : B(x))\, C(x, y)$ οικογένειες. Υπάρχει ισοδυναμία*
$$\prod(x : A)\ \sum(y : B(x))\ C(x, y) \simeq \sum(g : \prod(x : A)\ B(x))\ \prod(x : A)\ C(x, g(x)). \tag{23}$$

Απόδειξη. Για $f : \prod(x : A)\ \sum(y : B(x))\ C(x, y)$ και $x : A$ έχουμε
$$f(x) : \sum(y : B(x))\ C(x, y).$$
Εφαρμόζοντας τις προβολές παίρνουμε
$$\begin{aligned} &\mathsf{pr}_1(f(x)) : B(x), \\ &\mathsf{pr}_2(f(x)) : C(x, \mathsf{pr}_1(f(x))). \end{aligned}$$
Επομένως,
$$\begin{aligned} \mathsf{pr}_1 \circ f &\equiv \lambda(x : A)\ \mathsf{pr}_1(f(x)) : \prod(x : A)\ B(x), \\ \mathsf{pr}_2 \circ f &\equiv \lambda(x : A)\ \mathsf{pr}_2(f(x)) : \prod(x : A)\ C(x, \mathsf{pr}_1(f(x))), \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1\circ f, \mathsf{pr}_2\circ f) : \sum(g : \prod(x : A)\, B(x))\, \prod(x : A)\, C(x, g(x)).$$

Στην αντίθετη κατεύθυνση, εάν $z : \sum(g : \prod(x : A)\, B(x))\, \prod(x : A)\, C(x, g(x))$ και $x : A$,

$$\begin{aligned}&\mathsf{pr}_1(z)(x) : B(x),\\ &\mathsf{pr}_2(z)(x) : C(x, \mathsf{pr}_1(z)(x)),\end{aligned}$$

οπότε

$$\mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(z)(x), \mathsf{pr}_2(z)(x)) : \sum(y : B(x))\, C(x, y).$$

Επομένως,

$$\lambda(x : A)\, \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(z)(x), \mathsf{pr}_2(z)(x)) : \prod(x : A)\, \sum(y : B(x))\, C(x, y).$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι αυτές οι δύο είναι αντίστροφες μεταξύ τους. □

Το παραπάνω θεώρημα είναι αξιοσημείωτο, διότι η προφανής λογική ανάγνωσή του είναι το «αξίωμα επιλογής». Από την άλλη μεριά, μπορεί κανείς να εγείρει την ένσταση ότι η (23) δεν κουβαλάει το σύνηθες νόημα του αξιώματος της επιλογής, καθώς οι τιμές τής g έχουν προδιαγραφεί ήδη και δεν υπάρχουν επιλογές να γίνουν.

Έχοντας την έννοια της προτασιακής σύνθλιψης, μπορούμε να διατυπώσουμε μία εκδοχή τού αξιώματος επιλογής που είναι πιο κοντά στη συνολοθεωρητική πρόθεση. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο X, για $x : X$ ένα σύνολο $A(x)$, και για $x : X$ και $a : A(x)$ μία απλή πρόταση $P(x, a)$. Το αξίωμα επιλογής AC (για σύνολα) είναι η πρόταση

$$\forall(x : X)\, \exists(a : A(x))\, P(x, a) \longrightarrow \exists(g : \prod(x : X)\, A(x))\, \forall(x : X)\, P(x, g(x)).$$

Αναπτύσσοντας τους ορισμούς των λογικών σταθερών, αυτό μπορεί επίσης να γραφτεί στη μορφή

$$\prod(x : X)\, \left\|\sum(a : A(x))\, P(x, a)\right\| \longrightarrow \left\|\sum(g : \prod(x : X)\, A(x))\, \forall(x : X)\, P(x, g(x))\right\|.$$

Στη θεωρία συνόλων, το αξίωμα επιλογής είναι ισοδύναμο με την πρόταση ότι το γινόμενο μη κενών συνόλων είναι μη κενό.

Λήμμα 59. *Το AC είναι ισοδύναμο με το ότι για οποιοδήποτε σύνολο A και οικογένεια συνόλων $(x : A)\, B(x)$,*

$$\prod(x : A)\, \|B(x)\| \longrightarrow \left\|\prod(x : A)\, B(x)\right\|. \tag{24}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι το AC συνεπάγεται την (24). Εφ΄ όσον ο $\mathbf{1}$ είναι απλή πρόταση, από το AC λαμβάνουμε

$$\prod(x : A)\, \left\|\sum(y : B(x))\, \mathbf{1}\right\| \longrightarrow \left\|\sum(g : \prod(x : A)\, B(x))\, \prod(x : A)\, \mathbf{1}\right\|. \tag{25}$$

Εν τω μεταξύ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum(x : X)\, \mathbf{1} &\simeq X,\\ \prod(x : X)\, \mathbf{1} &\simeq \mathbf{1},\end{aligned}$$

(άσκηση), οπότε η (25) είναι ισοδύναμη με την (24).

Εν συνεχεία δείχνουμε ότι η (24) συνεπάγεται το AC. Για οποιοδήποτε $x : A$, ο τύπος $\sum(y : B(x))\, P(x, y)$ είναι σύνολο (λήμμα 51), οπότε από την (24) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\prod(x : A)\ \|\textstyle\sum(y : B(x))\, P(x, y)\| &\to \|\textstyle\prod(x : A)\ \sum(y : B(x))\, P(x, y)\| \\ &\simeq \|\textstyle\sum(g : \prod(x : A)\, B(x))\ \prod(x : A)\, P(x, g(x))\|\,. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(θεώρημα 58)}\end{aligned}$$

□

Ένα άλλο γνωστό ισοδύναμο του αξιώματος της επιλογής στη θεωρία συνόλων είναι ότι κάθε συνάρτηση που είναι επί έχει δεξιά αντίστροφη.

Λήμμα 60. *Το* AC *συνεπάγεται ότι για $f : A \longrightarrow B$, όπου A και B σύνολα,*

$$\forall(y : B)\, \exists(x : A)\, f(x) = y \longrightarrow \exists(g : B \longrightarrow A)\, f \circ g \sim \mathsf{id}_B.$$

Απόδειξη. Στο AC, θεωρήστε $P(x, y) :\equiv f(x) = y$. □

Άσκηση 8.1. Δείξτε ότι, αντιστρόφως, το προηγούμενο λήμμα συνεπάγεται το AC. [Υπόδειξη: Εφαρμόστε το στη συνάρτηση $\mathsf{pr}_1 : \sum(x : A)\, B(x) \longrightarrow A$.]

9 Ανώτεροι τύποι[4]

Όπως οι τύποι που έχουμε δει μέχρι τώρα, οι *ανώτεροι επαγωγικοί τύποι*, ή *τύποι ανώτερης διάστασης*, αποτελούν ένα γενικό σχήμα ορισμού νέων τύπων, τα μέλη των οποίων παράγονται από κάποιους κατασκευαστές. Αντίθετα από τις περιπτώσεις που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα, ο ορισμός ενός ανώτερου τύπου μπορεί να περιλαμβάνει κατασκευαστές που παράγουν όχι μόνο μέλη τού τύπου αυτού, αλλά επίσης μονοπάτια και ανώτερα μονοπάτια στον τύπο αυτόν.

Έχουμε ήδη δει μία περίπτωση ανώτερου τύπου, την προτασιακή σύνθλιψη $\|A\|$ τού A. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε διάφορα παραδείγματα ανώτερων τύπων, δίνοντας έμφαση στα γενικά μοτίβα.

9.1 Το διάστημα

Το διάστημα I είναι ο ανώτερος τύπος που παράγεται από

- ένα σημείο $0_{\mathrm{I}} : \mathrm{I}$,
- ένα σημείο $1_{\mathrm{I}} : \mathrm{I}$, και
- ένα μονοπάτι $\mathsf{seg} : 0_{\mathrm{I}} = 1_{\mathrm{I}}$.

Η παραπάνω περιγραφή εννοείται ως γενίκευση της περιγραφής των τύπων μέσω κατασκευαστών. Φανταζόμενοι τους τύπους ως (ανώτερα) ομαδοειδή, αυτή η γενικότερη έννοια παραγωγής έρχεται φυσικά: Εφ΄ όσον εκτός από μέλη υπάρχουν επίσης μονοπάτια, μονοπάτια μεταξύ μονοπατιών κ.ο.κ., έχει νόημα να έχουμε κατασκευαστές σε όλες τις διαστάσεις.

Η αρχή αναδρομής τού I λέει ότι, δοθέντος ενός τύπου C μαζί με

- ένα σημείο $c_0 : C$,
- ένα σημείο $c_1 : C$, και

[4]Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο [6, κεφάλαιο 6].

- ένα μονοπάτι $p_{\mathsf{seg}} : c_0 = c_1$,

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{I})\ t(x) : C$ ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
t(0_{\mathrm{I}}) &\equiv c_0, \\
t(1_{\mathrm{I}}) &\equiv c_1, \\
t(\mathsf{seg}) &= p_{\mathsf{seg}}.
\end{aligned}
$$

Η αρχή επαγωγής χρειάζεται κάποια προετοιμασία. Ας θεωρήσουμε μία οικογένεια $(x : \mathrm{I})\ C(x)$ επί τού I. Προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{I})\ t(x) : C(x)$ χρειαζόμαστε, πέραν των $c_0 : C(0_{\mathrm{I}})$ και $c_1 : C(1_{\mathrm{I}})$, να ξέρουμε πού θα πάει το seg. Διαισθητικά, η εικόνα τού seg θα είναι ένα μονοπάτι που θα «ενώνει» τα c_0 και c_1. Γενικότερα, εάν $(x : A)\ B(x)$ οικογένεια, $p : a_1 = a_2$ στον A, $b_1 : B(a_1)$, και $b_2 : B(a_2)$, χρειαζόμαστε έναν τύπο $b_1 =^B_p b_2$ ο οποίος να εκφράζει μία έννοια «ετερογενούς ισότητας» ανάλογη με την έννοια της ισότητας σε έναν τύπο.

Υπάρχουν διάφοροι ισοδύναμοι τρόποι να οριστεί ένας τέτοιος τύπος· εδώ θα βασιστούμε στο λήμμα 22 και θα θέσουμε

$$b_1 =^B_p b_2 \ :\equiv \mathsf{transport}^B(p, b_1) = b_2.$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, το λήμμα 22 λέει ότι για μετασχηματισμό $(x : A)\ u(x) : B(x)$ και $p : x = y$ στον A, υπάρχει $\mathsf{apd}_u(p) : u(x) =^B_p u(y)$.

Κατόπιν τούτου, η αρχή επαγωγής τού I διαμορφώνεται ως εξής: Δοθέντων

- ενός σημείου $c_0 : C(0_{\mathrm{I}})$,
- ενός σημείου $c_1 : C(1_{\mathrm{I}})$, και
- ενός μονοπατιού $p_{\mathsf{seg}} : c_0 =^C_{\mathsf{seg}} c_1$,

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{I})\ t(x) : C(x)$ με

$$
\begin{aligned}
t(0_{\mathrm{I}}) &\equiv c_0, \\
t(1_{\mathrm{I}}) &\equiv c_1, \\
\mathsf{apd}_t(\mathsf{seg}) &= p_{\mathsf{seg}}.
\end{aligned}
$$

Στην τελευταία σχέση δεν έχουμε συνωνυμία αλλά απλή ισότητα. Αυτό αντανακλά, μεταξύ άλλων, το γεγονός ότι δεν υπάρχει κανονικός ορισμός τού $c_0 =^C_{\mathsf{seg}} c_1$.

Άσκηση 9.1. Δοθέντων τύπων A και B, έστω $(x : A)\ C(x)$ η σταθερή οικογένεια με $C(x) \equiv B$. Δείξτε ότι για οποιοδήποτε μονοπάτι $p : x = y$ στον A και οποιοδήποτε $b : B$,

$$\mathsf{transport}^C(p, b) = b.$$

Συμπεράνετε ότι η αρχή αναδρομής τού I είναι ειδική περίπτωση της αρχής επαγωγής. □

Συχνά, δε μας ενδιαφέρει πού ακριβώς θα απεικονιστεί το seg μέσω τού οριζόμενου μετασχηματισμού t· στην περίπτωση αυτή, το p_{seg} τείνει να αποσιωπάται, οπότε η αρχή επαγωγής παίρνει την εξής απλουστευμένη μορφή: Δοθέντων δύο σημείων $c_0 : C(0_{\mathrm{I}})$ και $c_1 : C(1_{\mathrm{I}})$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$c_0 =^C_{\mathsf{seg}} c_1, \tag{26}$$

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{I})\ t(x) : C(x)$ με

$$\begin{aligned} t(0_{\mathrm{I}}) &\equiv c_0, \\ t(1_{\mathrm{I}}) &\equiv c_1. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε, επίσης, ότι στην περίπτωση που οι τύποι $C(x)$ είναι απλές προτάσεις, η συνθήκη (26) ικανοποιείται αυτομάτως.

Άσκηση 9.2. Διατυπώστε τήν απλουστευμένη αρχή *αναδρομής* τού I.

Από ομοτοπική άποψη, το διάστημα δεν είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον:

Λήμμα 61. *Ο τύπος* I *είναι συσταλτός.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το $0_{\mathrm{I}} : \mathrm{I}$ είναι κέντρο συστολής τού I. Θεωρούμε την οικογένεια $(x : \mathrm{I})\ C(x)$ με $C(x) :\equiv 0_{\mathrm{I}} = x$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathsf{transport}^{C}(\mathsf{seg}, \mathsf{refl}_{0_{\mathrm{I}}}) &= \mathsf{refl}_{0_{\mathrm{I}}} \cdot \mathsf{seg} && \text{(λήμμα 24)} \\ &= \mathsf{seg}, && \text{(λήμμα 15)} \end{aligned}$$

δηλαδή $\mathsf{refl}_{0_{\mathrm{I}}} =^{C}_{\mathsf{seg}} \mathsf{seg}$. Επομένως, από την απλουστευμένη αρχή επαγωγής ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{I})\ t(x) : C(x)$ με

$$\begin{aligned} t(0_{\mathrm{I}}) &\equiv \mathsf{refl}_{0_{\mathrm{I}}}, \\ t(1_{\mathrm{I}}) &\equiv \mathsf{seg}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, για οποιοδήποτε $x : \mathrm{I}$ έχουμε ένα τεκμήριο αλήθειας $t(x) : 0_{\mathrm{I}} = x$. □

Ωστόσο, η παρουσία τού διαστήματος έχει μη τετριμμένες τυποθεωρητικές συνέπειες· μας επιτρέπει, φερ᾽ ειπείν, να δείξουμε ότι οι τύποι συναρτήσεων είναι εκτασιακοί.

Λήμμα 62. *Εάν για τις συναρτήσεις $f, g : \prod(x : A)\ B(x)$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ για οποιοδήποτε $x : A$, τότε $f = g$.*

Απόδειξη. Έστω $x : A$. Εφ᾽ όσον $f(x) = g(x)$, από την (απλουστευμένη) αρχή αναδρομής τού I ορίζεται μετασχηματισμός $(y : \mathrm{I})\ u_x(y) : B(x)$ με

$$\begin{aligned} u_x(0_{\mathrm{I}}) &\equiv f(x), \\ u_x(1_{\mathrm{I}}) &\equiv g(x). \end{aligned}$$

Θέτοντας, για $y : \mathrm{I}$,

$$v(y) :\equiv \lambda(x : A)\ u_x(y) : \prod(x : A)\ B(x),$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} f &= v(0_{\mathrm{I}}) && \text{(λήμμα 10)} \\ &= v(1_{\mathrm{I}}) && (\mathsf{ap}_v(\mathsf{seg})) \\ &= g. && \text{(λήμμα 10)} \end{aligned}$$

□

Το παραπάνω λήμμα συνεπάγεται ότι η $\mathsf{happly} : f = g \to f \sim g$ είναι ισοδυναμία (μάλιστα, είναι αντίστροφη της συνάρτησης $f \sim g \to f = g$ που κατασκευάζεται στην απόδειξη). Η απόδειξη του γεγονότος αυτού δεν είναι προφανής.

Η αρχή αναδρομής τού διαστήματος μας λέει ότι οι συναρτήσεις από τον I προς έναν τύπο A είναι, κατ᾽ ουσίαν, μονοπάτια στον A. Για να το αποδείξουμε αυτό θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 63. *Για τύπους A, B και συναρτήσεις $f, g : A \longrightarrow B$ θεωρούμε την οικογένεια $(x : A)\ C(x)$ με $C(x) :\equiv f(x) = g(x)$. Εάν $p : x = y$ στον A και $q : C(x)$, τότε*

$$\mathsf{transport}^C(p, q) = f(p)^{-1} \cdot q \cdot g(p).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο p. □

Λήμμα 64. *Για οποιονδήποτε τύπο A,*

$$(\mathrm{I} \longrightarrow A) \simeq \sum(x, y : A)\ x = y.$$

Απόδειξη. Τα μέλη τού $\sum(x, y : A)\ x = y$ είναι τριάδες (x, y, p) με $x, y : A$ και $p : x = y$. Στη μία κατεύθυνση, για $f : \mathrm{I} \longrightarrow A$ σχηματίζεται η τριάδα

$$F(f) :\equiv (f(0_\mathrm{I}), f(1_\mathrm{I}), f(\mathsf{seg})).$$

Στην αντίθετη κατεύθυνση, για $(x, y, p) : \sum(x, y : A)\ x = y$ ορίζεται συνάρτηση $G((x, y, p)) : \mathrm{I} \longrightarrow A$ με

$$\begin{aligned} G((x, y, p))(0_\mathrm{I}) &\equiv x, \\ G((x, y, p))(1_\mathrm{I}) &\equiv y, \\ G((x, y, p))(\mathsf{seg}) &= p. \end{aligned}$$

Έστω $g :\equiv G(F(f))$· θα δείξουμε ότι $f = g$. Θεωρούμε την οικογένεια $(x : \mathrm{I})\ C(x)$, όπου $C(x) :\equiv f(x) = g(x)$. Από τις ισότητες

$$\begin{aligned} \mathsf{transport}^C(\mathsf{seg}, \mathsf{refl}_{f(0_\mathrm{I})}) &= f(\mathsf{seg})^{-1} \cdot \mathsf{refl}_{f(0_\mathrm{I})} \cdot g(\mathsf{seg}) && \text{(προηγούμενο λήμμα)} \\ &= \mathsf{refl}_{f(1_\mathrm{I})}. && (g(\mathsf{seg}) = f(\mathsf{seg})) \end{aligned}$$

λαμβάνουμε το σύνθετο μονοπάτι

$$r : \mathsf{refl}_{f(0_\mathrm{I})} =^C_{\mathsf{seg}} \mathsf{refl}_{f(1_\mathrm{I})}.$$

Σύμφωνα με την αρχή επαγωγής τού I ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{I})\ t(x) : C(x)$ με

$$\begin{aligned} t(0_\mathrm{I}) &\equiv \mathsf{refl}_{f(0_\mathrm{I})}, \\ t(1_\mathrm{I}) &\equiv \mathsf{refl}_{f(1_\mathrm{I})}, \\ \mathsf{apd}_t(\mathsf{seg}) &= r. \end{aligned}$$

Επομένως, για $x : \mathrm{I}$ έχουμε $t(x) : f(x) = g(x)$· το ζητούμενο προκύπτει από το λήμμα 62.

Η απόδειξη ότι η G είναι δεξιά αντίστροφη της F αφήνεται στον αναγνώστη. □

***Άσκηση* 9.3.** Εάν A τύπος και $a_0, a_1 : A$, δείξτε τήν ισοδυναμία

$$\sum(f : \mathrm{I} \longrightarrow A)\ \big[(f(0_\mathrm{I}) = a_0) \times (f(1_\mathrm{I}) = a_1)\big] \simeq a_0 = a_1.$$

9.2 Ο κύκλος

Ο *κύκλος* S^1 είναι ο ανώτερος τύπος που παράγεται από

- ένα σημείο $\mathsf{base} : \mathrm{S}^1$, και
- ένα μονοπάτι $\mathsf{loop} : \mathsf{base} = \mathsf{base}$.

Η αρχή αναδρομής τού *κύκλου* λέει ότι δοθέντος ενός τύπου C μαζί με

- ένα σημείο $c_{\mathsf{base}} : C$, και
- ένα μονοπάτι $p_{\mathsf{loop}} : c_{\mathsf{base}} = c_{\mathsf{base}}$,

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\ t(x) : C$ με

$$\begin{aligned} t(\mathsf{base}) &\equiv c_{\mathsf{base}}, \\ t(\mathsf{loop}) &= p_{\mathsf{loop}}. \end{aligned}$$

Αναμένει κανείς, τόσο από την περιγραφή τού κύκλου, όσο και από την ονομασία του, ότι είναι μη τετριμμένος τύπος, με την έννοια ότι $\mathsf{loop} \neq \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$. Σχετικά με αυτό, ισχύει το εξής:

Λήμμα 65. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\mathsf{loop} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$.
2. *Για οποιονδήποτε βρόχο $p : a = a$ σε οποιονδήποτε τύπο A, $p = \mathsf{refl}_a$.*
3. *Όλοι οι τύποι είναι σύνολα.*

Απόδειξη. Έστω $\mathsf{loop} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$. Δοθέντος βρόχου $p : a = a$, ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\ t(x)$ με $t(\mathsf{loop}) = p$, οπότε $p = t(\mathsf{loop}) = t(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}) = \mathsf{refl}_a$.

Για την επόμενη συνεπαγωγή, εάν $x, y : A$ και $p, q : x = y$, τότε $p \cdot q^{-1} : x = x$ και επομένως $p \cdot q^{-1} = \mathsf{refl}_x$, δηλαδή $p = q$.

Τέλος, εάν ο S^1 είναι σύνολο, τότε ο $\mathsf{base} = \mathsf{base}$ είναι απλή πρόταση, και επομένως $\mathsf{loop} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$. □

Απουσία univalence, είναι συνεπές να υποθέσουμε ότι όλοι οι τύποι είναι σύνολα. Από την άλλη μεριά, σε ένα univalent σύμπαν $\mathcal{U}$ που ανακλά τον Bool, η συνάρτηση $f : \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}$ με

$$\begin{aligned} f(\mathsf{false}) &\equiv \mathsf{true}, \\ f(\mathsf{true}) &\equiv \mathsf{false}, \end{aligned}$$

εφ᾽ όσον είναι αντίστροφη του εαυτού της και επομένως ισοδυναμία, επάγει ένα μονοπάτι

$$\mathsf{ua}(f) : \mathrm{Bool} = \mathrm{Bool},$$

το οποίο δεν είναι ίσο με $\mathsf{refl}_{\mathrm{Bool}}$: Εάν ήταν, τότε

$$f = \mathsf{idtoeqv}(\mathsf{ua}(f)) = \mathsf{idtoeqv}(\mathsf{refl}_{\mathrm{Bool}}) = \mathsf{id}_{\mathrm{Bool}},$$

και επομένως

$$\mathsf{true} \equiv f(\mathsf{false}) = \mathsf{id}_{\mathrm{Bool}}(\mathsf{false}) \equiv \mathsf{false},$$

άτοπο (θεώρημα 13). Άρα, το $\mathcal{U}$ δεν είναι σύνολο. Σε συνδυασμό με το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι

Λήμμα 66 (univalence)**.** $\mathsf{loop} \neq \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$. □

Έπεται ότι ο κύκλος δεν είναι σύνολο. (Ο S^1 είναι 1-τύπος, αλλά αυτό δεν είναι τετριμμένο.)

Άσκηση 9.4. Γενικότερα, δείξτε ότι $\mathsf{loop}^n \neq \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$ για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n. [Υπόδειξη: Θεωρήστε έναν τύπο με $n+1$ το πλήθος μέλη $s_0, \dots, s_n$, και ορίστε μία συνάρτηση f η οποία μεταθέτει κυκλικά τα μέλη αυτά,

$$\begin{aligned} f(s_0) &\equiv s_1, \\ &\vdots \\ f(s_{n-1}) &\equiv s_n, \\ f(s_n) &\equiv s_0. \end{aligned}$$

Μετά ακολουθήστε τό παραπάνω επιχείρημα.]

Γενικότερα, δοθείσης μιας οικογένειας $(x : \mathrm{S}^1)\ C(x)$ μαζί με

- ένα σημείο $c_{\mathsf{base}} : C(\mathsf{base})$, και
- ένα μονοπάτι $p_{\mathsf{loop}} : c_{\mathsf{base}} =^C_{\mathsf{loop}} c_{\mathsf{base}}$,

ορίζεται, με επαγωγή, μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\ t(x) : C(x)$ ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{base}) &\equiv c_{\mathsf{base}}, \\ \mathsf{apd}_t(\mathsf{loop}) &= p_{\mathsf{loop}}. \end{aligned}$$

Και εδώ, αποσιωπώντας τό p_{loop} παίρνουμε την εξής απλουστευμένη εκδοχή τής αρχής επαγωγής: Δοθέντος ενός $c_{\mathsf{base}} : C(\mathsf{base})$ με

$$c_{\mathsf{base}} =^C_{\mathsf{loop}} c_{\mathsf{base}},$$

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\ t(x) : C(x)$ ούτως ώστε

$$t(\mathsf{base}) \equiv c_{\mathsf{base}}.$$

Ώς παράδειγμα χρήσης τής επαγωγής αποδεικνύουμε το ακόλουθο

Λήμμα 67 ([6, λήμμα 6.4.2])**.** *Υπάρχει συνάρτηση* $f : \prod(x : \mathrm{S}^1)\ x = x$ *με* $f(\mathsf{base}) = \mathsf{loop}$.

Απόδειξη. Έστω $(x : \mathrm{S}^1)\ C(x)$ με $C(x) \ :\equiv\ x = x$. Εφαρμόζοντας το λήμμα 63 στην περίπτωση όπου αμφότερες οι f και g είναι η ταυτοτική τού S^1, παίρνουμε

$$\mathsf{transport}^C(\mathsf{loop}, \mathsf{loop}) = \mathsf{loop}^{-1} \cdot \mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop} = \mathsf{loop},$$

δηλαδή $\mathsf{loop} =^C_{\mathsf{loop}} \mathsf{loop}$. Ορίζεται, επομένως, μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\ t(x) : C(x)$ με

$$t(\mathsf{base}) \equiv \mathsf{loop}.$$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $\lambda(t)$. □

Όπως και στην περίπτωση του διαστήματος, η απλουστευμένη αρχή επαγωγής επιδέχεται μία περαιτέρω απλούστευση, την *προτασιακή αρχή επαγωγής*: Δοθείσης μιας οικογένειας $(x : \mathrm{S}^1) P(x)$ *απλών προτάσεων*, εάν $P(\mathsf{base})$, τότε $P(x)$ για οποιοδήποτε $x : \mathrm{S}^1$.

Εφ᾽ όσον ο S^1 δεν είναι σύνολο, δεν ισχύει, όπως ίσως θα νόμιζε κανείς, ότι κάθε σημείο του είναι ίσο με base· αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, τότε θα ήταν συσταλτός. Ισχύει όμως ότι κάθε σημείο τού S^1 είναι *απλώς ίσο* με base.

Λήμμα 68. *Για οποιοδήποτε $x : \mathrm{S}^1$, $\|\mathsf{base} = x\|$.*

Απόδειξη. Έχουμε $|\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}| : \|\mathsf{base} = \mathsf{base}\|$. Το ζητούμενο έπεται από την προτασιακή αρχή επαγωγής. □

Έχουμε το ανάλογο του λήμματος 64:

Λήμμα 69. *Για οποιονδήποτε τύπο A,*

$$(\mathrm{S}^1 \longrightarrow A) \simeq \sum(x : A)\, x = x.$$

Απόδειξη. Στη μία κατεύθυνση έχουμε τη συνάρτηση $F : (\mathrm{S}^1 \longrightarrow A) \longrightarrow \sum(x : A)\, x = x$ που στέλνει την $f : \mathrm{S}^1 \longrightarrow A$ στο ζεύγος $(f(\mathsf{base}), f(\mathsf{loop}))$. Στην άλλη κατεύθυνση, δοθέντος ενός $(a, p) : \sum(x : A)\, x = x$, ορίζεται με αναδρομή μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\; t(x) : A$ τέτοιος που

$$\begin{aligned} t(\mathsf{base}) &\equiv a, \\ t(\mathsf{loop}) &= p. \end{aligned}$$

Έστω $G : \left(\sum(x : A)\, x = x\right) \longrightarrow (\mathrm{S}^1 \longrightarrow A)$ η συνάρτηση με

$$G((a, p)) \equiv \lambda(t).$$

Για $f : \mathrm{S}^1 \longrightarrow A$, έστω $g :\equiv G(F(f))$. Από τους ορισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} f(\mathsf{base}) &\equiv g(\mathsf{base}), \\ f(\mathsf{loop}) &= g(\mathsf{loop}). \end{aligned}$$

Θεωρούμε την οικογένεια $(x : \mathrm{S}^1)\; C(x)$ με $C(x) :\equiv f(x) = g(x)$. Το λήμμα 63 μάς λέει ότι

$$\mathsf{transport}^C(\mathsf{loop}, \mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})}) = f(\mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})} \cdot g(\mathsf{loop}) = \mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})},$$

δηλαδή $\mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})} =^C_{\mathsf{loop}} \mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})}$, οπότε ορίζεται, με (απλουστευμένη) επαγωγή, μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\; t(x) : C(x)$. Έπεται ότι $f(x) = g(x)$ για οποιοδήποτε $x : \mathrm{S}^1$, και επομένως $f = g$.

Εάν $(a, p) : \sum(x : A)\, x = x$, έστω $(b, q) :\equiv F(G((a, p)))$. Από τους ορισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} a &\equiv b, \\ p &= q, \end{aligned}$$

και επομένως, από το θεώρημα 32, $(a, p) = (b, q)$. □

Αναφορές

[1] Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, Academic Press, New York, 1967.

[2] Per Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*, Studies in proof theory, vol. 1, Bibliopolis, Napoli, 1984.

[3] ———, *On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws*, Nordic journal of philosophical logic **1** (1996), no. 1, 11–60.

[4] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Aurora: Dover Modern Math Originals, Dover Publications, 2017. Downloadable from `http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf` and from `https://web.math.rochester.edu/people/faculty/doug/otherpapers/Riehl-CTC.pdf`.

[5] Alfred Tarski, *The Concept of Truth in Formalized Languages*, Logic, Semantics, Metamathematics, 2nd ed. (J. Corcoran, ed.), Hackett, Indianapolis, 1983, pp. 152–278.

[6] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, `https://homotopytypetheory.org/book/`. Institute for Advanced Study, 2013.