Πληθικοί Αριθμοί

Θεωρία Τύπων του Martin Löf

Σταύρος Ποτσάκης

ΑΛΜΑ

Φεβρουάριος 2021

Περιεχόμενα

1. Προαπαιτούμενα
2. 0-σύνθλιψη
3. Πληθικοί Αριθμοί
4. Πράξεις Πληθικών Αριθμών
5. Πληθική Ανισότητα
6. Θεώρημα Schroeder-Bernstein
7. Θεώρημα Cantor

Προαπαιτούμενα

Ορισμός

Η ίνα μιας απεικόνισης $\mathsf{f} : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ σε ένα σημείο $\mathsf{y} : \mathsf{B}$ είναι

$$fib_f(y) := \sum_{x:A} (f(x) = y).$$

Όταν A και B είναι σύνολα και $\mathsf{f} : \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ είναι ισομορφισμός. Στην θεωρία σύνόλων, μια συνάρτηση είναι ισομορφισμός όταν είναι 1-1 και επί. Το ίδιο συμβαίνει και στην θεωρία τύπων, αν διατυπώσουμε αυτές τις συνθήκες αναλόγως. Πιο συγκεκριμένα, όταν ασχολούμαστε με τύπους οι οποίοι δεν είναι σύνολα, θα μιλάμε για εμφύτευση αντί για 1-1.

Προαπαιτούμενα

Ορισμός

Έστω $f : A \to B$.
(i) Λέμε ότι f είναι επί αν για κάθε $b : B$ έχουμε $\|\mathrm{fib}_f(b)\|$.
(ii) Λέμε ότι η f είναι εμφύτευση αν για κάθε $x, y : A$ η συνάρτηση $\mathrm{ap}_f : (x =_A y) \to (f(x) =_B f(y))$ είναι μια ισοδυναμία.

Φυσικά η έννοια της εμφύτευσης είναι ισοδύναμη με την γνωστή σε όλους έννοια του 1-1, ή οποία αναφέρει ότι:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Προαπαιτούμενα

Γνωρίζοντας την έννοια της απλής πρότασης, τώρα μπορούμε να ορίσουμε τον νόμο της απόκλεισης μέσου στην ομοτοπική θεωρία τύπων:

$$LEM := \prod_{A:\mathcal{U}} (isProp(A) \to (A + \neg A)).$$

Τώρα θα ορίσουμε το Αξίωμα Επιλογής στην ομοτοπική θεωρία τύπων. Υποθέτουμε έναν τύπο X και οικογένειες τύπων

$$A : X \to \mathcal{U} \text{ και } P : \prod_{x:X} A(x) \to \mathcal{U},$$

και επιπλέον ότι

- X είναι ένα σύνολο,
- A(x) είναι ένα σύνολο για όλα τα x : X, και
- P(x,a) είναι μια απλή πρόταση για όλα τα x : X και a : A(x).

Προαπαιτούμενα

Το Αξίωμα Επιλογής διαβεβαιώνει ότι κάτω από αυτές τις υποθέσεις,

$$(\prod_{x:X} \| \sum_{a:A(x)} P(x,a)\|) \to \| \sum (g : \prod_{x:X} A(x)) \prod_{x:X} P(x, g(x))\|$$

Φυσικά αυτό είναι μια απευθείας μετάφραση της

$$(\forall (x:X).\exists (a:A(x)).P(x,a)) \Rightarrow (\exists (g:\prod_{x:X} A(x)).\forall (x:X).P(x,g(x))).$$

Προαπαιτούμενα

Ορισμός

Ένας δακτύλιος είναι ένα σύνολο R με δύο δυαδικές πράξεις $+$ και $\cdot$ οι οποίες ικανονοποιούν ιδιότητες ανάλογες αυτές της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους ακεραίους.

Ορισμός

Στην αφηρημένη άλγεβρα, ένας ημιδακτύλιος είναι μια αλγεβρική δομή παρόμοια με ένα δακτύλιο, αλλά χωρίς την απαίτηση ότι κάθε στοιχείο πρέπει να έχει προσθετικό αντίστροφο.

Τώρα θα δούμε ένα λήμμα που προέρχεται απο την επαγωγική αρχή της σύνθλιψης (ή (-1)-σύνθλιψη).

Λήμμα 1

Για οποιοδήποτε τύπο A και B, έστω συνάρτηση $\mathsf{f} : A \to B$ τότε παίρνουμε μια συνάρτηση $||A|| \to ||B||$.

Απόδειξη.

Παίρνουμε την σύνθεση της f με την $|\cdot|$ και έχουμε συνάρτηση $A \to ||B||$ και από επαγωγή στη σύνθλιψη έχουμε ότι $||A|| \to ||B||$ □

0-σύνθλιψη

Ορισμός

Ορίζουμε τη 0-σύνθλιψη $|A|_0$ να παράγεται από

- Μία συνάρτηση $|-|_0 : A \to \|A\|_0$ και
- Για κάθε $x, y : \|A\|_0$ και κάθε $p, q : x = y$, ένα μονοπάτι $p = q$.

Τότε $\|A\|_0$ θα παράγεται ελεύθερα από μια συνάρτηση $A \to \|A\|_0$ μαζί με τη διαβεβαίωση ότι $\|A\|_0$ είναι ένα σύνολο.

Μια φυσική επαγωγική αρχή για αυτό θα λέει ότι για δοσμένη

- οικογένεια συνόλων $(x : \|A\|_0)\ C(x)$
- για $a : A$ ένα $c_{|\cdot|_0}(a) : C(|a|_0)$,

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \|A\|_0) t(x) : C(x)$ ούτως ώστε, για οποιοδήποτε $a : A$

$$t(|a|_0) = c_{|\cdot|_0}(a).$$

0-σύνθλιψη

Λήμμα 2

Για κάθε σύνολο B και κάθε τύπο A, η σύνθεση με $|-|_0 : \mathrm{A} \to \|\mathrm{A}\|_0$ καθορίζει μια ισοδυναμία

$$(\|A\|_0 \to B) \simeq (A \to B).$$

Απόδειξη.

Η ειδική περίπτωση της επαγωγικής αρχής της 0-σύνθλιψης όταν $(x : ||A||_0)C(x)$ είναι η σταθερή οικογένεια δίνει μια απεικόνιση από δεξία στα αριστερά, και η "σύνθεσε με $|-|_0$" συνάρτηση από τα αριστερά στα δεξιά. Η πρώτη είναι δεξιά αντίστροφη της δεύτερης είναι αρκέτα εύκολο να δειχθεί. Για να δείξουμε ότι είναι και αριστερή αντίστροφη, έστω $h : ||A||_0 \to B$, και ορίζουμε $h^{'} : ||A||_0 \to B$ εφαρμόζοντας επαγωγή στη σύνθλιψη στην σύνθεση $a \mapsto h(|a|_0)$. Άρα $h(|a|_0) = h^{'}(|a|_0)$.

Επιπλέον, αφού B είναι ένα σύνολο, για κάθε $x : ||A||_0$ ο τύπος $h(x) = h^{'}(x)$ είναι μια απλή πρόταση, και συνεπώς επίσης ένα σύνολο. Άρα, από επαγωγή στην 0-σύνθλιψη, η παρατήρηση ότι $h(|a|_0) = h^{'}(|a|_0)$ για κάθε $a{:}A$ υπονοεί ότι $h(x) = h^{'}(x)$ για κάθε $x : ||A||_0$, και συνεπώς $h = h^{'}$. □

Ο τύπος των πληθικών αριθμών είναι η 0-σύνθλιψη του τύπου Set

$$\mathit{Card} := \|\mathit{Set}\|_0$$

όπου $\mathsf{Set}_U = \{ \mathsf{A} \in \mathsf{U} \mid \mathsf{IsSET(A)} \}$.

Άρα, ένας πληθικός αριθμός, ή πληθικός, είναι ένα μέλος τού Card:$= \|\mathsf{Set}\|_0$. Τεχνικά, φυσικά, υπάρχει ξεχωριστός τύπος Card_U σνδεδεμένος με κάθε σύμπαν U.

Ως συνήθως για σύνθλιψη, αν A είναι ένα σύνολο, τότε $|\mathsf{A}|_0$ συμβολίζει την εικόνα του ως προς την κανονική προβολή $\mathsf{Set} \to \|\mathsf{Set}\|_0 :=$Card, θα λέμε $|A|_0$ τον πληθάριθμο του A. Από ορισμό, Card είναι σύνολο, ενώ Set δεν είναι σύνολο, αφού αν ήταν τότε κάθε μονοπάτι $\mathsf{p} : \mathsf{X} = \mathsf{X}$, όπου X είναι σύνολο, θα ήταν τετριμμένο. Από univalence, κάθε συνάρτηση $\mathsf{f} : \mathsf{X}$ X θα ήταν ιση με την ταυτοτική του X. Αυτό δεν συμβαίνει, όπως π.χ. με την $\mathsf{neg} : 2 \to 2$ που στέλνει το 1 στο 0 και το 0 στο 1. Επίσης κληρονομεί τη δομή του ημιδακτυλίου από το Set.

Πράξεις Πληθικών Αριθμών

Ορισμός

Η πράξη της πληθικής πρόσθεσης

$$(- + -) : \mathit{Card} \to \mathit{Card} \to \mathit{Card}$$

ορίζεται από επαγωγή στη σύνθλιψη

$$|A|_0 + |B|_0 := |A + B|_0$$

Απόδειξη.

Αφού Card $\to$ Card είναι ένα σύνολο, για να ορίσεις $(\alpha + -)$: Card $\to$ Card για όλα τα α:Card, από επαγωγή αρκεί να υποθέσουμε ότι α είναι $|\mathrm{A}|_0$ για κάποιο A:Set. Τώρα θέλουμε να ορίσουμε $(|\mathrm{A}|_0 + -)$: Card $\to$ Card , δηλαδή θέλουμε να ορίσουμε $|\mathrm{A}|_0 + \beta$:Card για όλα τα β:Card. Ωστόσο, αφού Card είνια σύνολο, από επαγωγή αρκεί να υποθέσουμε ότι β είναι $|\mathrm{B}|_0$ για κάποιο B:Set. Αλλά τώρα μπορούμε να ορίσουμε $|A|_0 + |B|_0$ να είναι $|A + B|_0$. □

Πράξεις Πληθικών Αριθμών

Ορισμός

Η πράξη του πληθικού πολλαπλασιασμού

$$(- \cdot -) : \mathit{Card} \to \mathit{Card} \to \mathit{Card}$$

ορίζεται από επαγωγή στη σύνθλιψη

$$|A|_0 \cdot |B|_0 := |A \times B|_0$$

Λήμμα 3

Card είναι ένας αντιμεταθετικός ημιδακτύλιος, δηλαδή για α, β, γ:Card έχουμε τα ακόλουθα

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

$$\alpha \cdot 1 = \alpha$$

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

όπου $0 :\equiv |0|_0$ και $1 :\equiv |1|_0$.

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε την αντιμεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού, $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, τα υπόλοιπα αποδεικνύονται αναλόγως. Αφού Card είναι σύνολο, ο τύπος $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ είναι μια απλή πρόταση, και πιο συγκεκριμένα ένα σύνολο. Άρα από επαγωγή αρκεί να υποθέσουμε ότι α και β είναι της μορφής $|\mathrm{A}|_0$ και $|\mathrm{B}|_0$ αντίστοιχα, για καποια $\mathrm{A},\mathrm{B}:\mathsf{Set}$. Τώρα $|A|_0 \cdot |B|_0 = |A \times B|_0$ και $|B|_0 \cdot |A|_0 = |B \times A|_0$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{A}$. Τελικά, από univalence, αρκεί να δείξουμε μια ισοδυναμία $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \simeq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$. Αλλά αυτό είναι εύκολο:

$$(a, b) \mapsto (b, a)$$

και το προφανές αντίστροφό του. $\square$

Πράξεις Πληθικών Αριθμών

Ορισμός

Η πράξη του εκθετικού επίσης ορίζεται από επαγωγή στη σύνθλιψη

$$|A|_0^{|B|_0} := |B \to A|_0$$

Λήμμα 4

Για α, β, γ:Card έχουμε τα ακόλουθα

$$\alpha^0 = 1, 1^\alpha = 1, \alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$$

$$\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$$

$$(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$$

όπου $0 := |0|_0$ και $1 := |1|_0$.

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε την τελευταία σχέση του λήμματος, $(\alpha\cdot\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$, τα υπόλοιπα αποδεικνύονται αναλόγως. Αφού Card είναι σύνολο, ο τύπος $(\alpha\cdot\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$ είναι μια απλή πρόταση, και πιο συγκεκριμένα ένα σύνολο. Άρα από επαγωγή αρκεί να υποθέσουμε ότι α, β και γ είναι της μορφής $|\mathrm{A}|_0$, $|\mathrm{B}|_0$ και $|\Gamma|_0$ αντίστοιχα, για καποια A,B και Γ :Set. Τώρα $(|A|_0\times|B|_0)^{|\Gamma|_0} = |\Gamma\to(A\times B)|_0$ & $|A|_0^{|\Gamma|_0}\cdot|B|_0^{|\Gamma|_0} = |(\Gamma\to A)\times(\Gamma\to B)|_0$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\Gamma\to(A\times B) = (\Gamma\to A)\times(\Gamma\to B)$. Τελικά, από univalence, αρκεί να δείξουμε μια ισοδυναμία $\Gamma\to(A\times B)\simeq(\Gamma\to A)\times(\Gamma\to B)$. Θεωρούμε τις προβολές $\pi_1 : \mathrm{A}\times\mathrm{B}\to\mathrm{A}$ και $\pi_2 : \mathrm{A}\times\mathrm{B}\to\mathrm{B}$ με $\pi_1(\alpha,\beta)=\alpha$ και $\pi_2(\alpha,\beta)=\beta$. Οριζουμε $\mathrm{H} : \Gamma\to(A\times B)\to(\Gamma\to A)\times(\Gamma\to B)$ με $\mathrm{f}\mapsto\mathrm{H(f)}=(\pi_1\circ f,\pi_2\circ f)$ και την αντιστροφή του $\mathrm{K}(\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2)(\mathrm{x})=(\mathrm{f}_1(\mathrm{x}),\mathrm{f}_2(\mathrm{x}))$, όπου $\mathrm{f}_1 : \Gamma\to\mathrm{A}$ και $\mathrm{f}_2 : \Gamma\to\mathrm{B}$, και έχουμε το ζητούμενο. □

Πληθική Ανισότητα

Ορισμός

Η σχέση της πληθικής ανισότητας

$$(- \leqslant -) : \mathit{Card} \to \mathit{Card} \to \mathit{Prop}$$

ορίζεται με επαγωγή στη σύνθλιψη

$$|A|_0 \leqslant |B|_0 := \|\mathit{inj}(A, B)\|$$

όπου inj(A,B) είναι ο τύπος των 1-1 συναρτήσεων από το A στο B.

Με άλλα λόγια, $|A|_0 \leqslant |B|_0$ σημαίνει ότι υπάρχει απλώς μια 1-1 συνάρτηση από το A στο B.

Πληθική Ανισότητα

Λήμμα 5

Η πληθικική ανισότητα είναι preorder, δηλαδή για α, β:Card έχουμε

$$\alpha \leqslant \alpha$$

$$(\alpha \leqslant \beta) \to (\beta \leqslant \gamma) \to (\alpha \leqslant \gamma)$$

Απόδειξη.

Οπώς πριν, με επαγωγή στη σύνθλιψη. Για παράδειγμα, αφού $(\alpha \leqslant \beta) \to (\beta \leqslant \gamma) \to (\alpha \leqslant \gamma)$ είναι απλή πρόταση, από επαγωγή στη 0-σύνθλιψη υποθέτουμε ότι α, β και γ είναι της μορφής $|\mathrm{A}|_0$, $|\mathrm{B}|_0$ και $|\Gamma|_0$ αντίστοιχα. Τώρα αφού $|A|_0 \leqslant |\Gamma|_0$ είναι απλή πρόταση, από επαγωγή στη (-1)-σύνθλιψη υποθέτουμε δοσμένες 1-1 συναρτήσεις f: A $\to$ B και g : B $\to \Gamma$. Αλλά τότε $g \circ f$ είναι μια 1-1 συνάρτηση από το Α στο Γ άρα $|A|_0 \leqslant |\Gamma|_0$ ισχύει.

Η ανακλαστικότητα αποδεικνύεται ακόμα πιο εύκολα. □

Λήμμα 6

Θεωρούμε τις ακόλουθες δηλώσεις:

(i) Υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση από το A στο B.
(ii) Υπάρχει μια επί συνάρτηση από το B στο A.

Τότε, υποθέτοντας απόκλειση μέσου:

- Δοσμένου $\alpha_0 \in A$, έχουμε (i) $\rightarrow$ (ii)
- Άρα, αν A είναι απλά κατοικημένος, έχουμε (i) $\rightarrow$ απλά (ii)
- Υποθέτοντας το Αξίωμα Επιλογης, έχουμε (ii) $\rightarrow$ απλά (i)

Πληθική Ανισότητα

Απόδειξη.

■ Αν f : A → B είναι 1-1, ορίζουμε g : B → A στο b:B ώς εξής. Αφού η f είναι 1-1, η ίνα της f στο b είναι απλή πρόταση. Άρα, από απόκλειση μέσου, είτε υπάρχει ένα a : A με f(a) = b, ή όχι. Στην πρώτη περίπτωση, ορίζουμε g(b) := a, διαφορετικά έστω g(b) = a_0. Τότε για κάθε a : A έχουμε a = g(f(a)), άρα η g είναι επί.

▶ Άπο ■ έχουμε ότι A → [(i) → (ii)] και αυτό γνωρίζουμε ότι είναι ισοδύναμο με (i) → [A → (ii)]. Για το A → (ii) από Λήμμα 1 παίρνουμε ||A|| → ||(ii)|| και από τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$[(i) \to ||A|| \to ||(ii)||] \leftrightarrow [||A|| \to (i) \to ||(ii)||].$$

♦ Αν g : B → A είναι επί, τότε από το Αξιώμα Επιλογής, υπάρχει απλά μια συνάρτηση f : A → B με g(f(a)) = a για όλα τα a. Άρα η f πρέπει να είναι 1-1.

□

Θεώρημα Schroeder-Bernstein

Υποθέτουμε απόκλειση μέσου, για σύνολα A και B έχουμε:

$$inj(A, B) \to inj(B, A) \to A \cong B$$

Ορίζουμε $\{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \mathsf{P(x)} \,\} :\equiv \sum(\mathsf{x} : \mathsf{A})\mathsf{P(x)}$, όπου A είναι σύνολο και $(\mathsf{x} : \mathsf{A})\mathsf{P(x)}$ είναι οικογένεια απλών προτάσεων. Επίσης $\{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \mathsf{P(x)} \,\}$ είναι σύνολο αφού A είναι και λόγω του ότι η συνάρτηση $\mathsf{pr}_1 : \{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \mathsf{P(x)} \,\} \to \mathsf{A}$ είναι 1-1 έχουμε ότι το $\{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \mathsf{P(x)} \,\}$ είναι υποσύνολο του A. Στη συνέχεια ορίζουμε $\{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \mathsf{P(x)} \,\}^c := \{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \neg\mathsf{P(x)} \,\}$, το οποιο λόγω παρούσιας του LEM είναι συμπλήρωμα του $\{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \mathsf{P(x)} \,\}$, δηλαδή $\{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \mathsf{P(x)} \,\} + \{\, \mathsf{x} : \mathsf{A} \mid \neg\mathsf{P(x)} \,\} \equiv \mathrm{A}$.

Παρατήρηση

Εκτός από τα παραπάνω η απόδειξη αυτού του θεωρήματος κατά τα άλλα είναι η ίδια με την συνολοθεωρητική εκδοχή του θεωρήματος.

Θεώρημα Schroeder-Bernstein

Πόρισμα

Υποθέτοντας απόκλειση μέσου, η πληθική ανισότητα είναι μερική διάταξη, δηλάδη για α, β:Card έχουμε

$$(\alpha \leqslant \beta) \to (\beta \leqslant \alpha) \to (\alpha = \beta)$$

Απόδειξη.

Αφού $(\alpha = \beta)$ είναι απλή πρόταση, από επαγωγή στη σύνθλιψη υπόθέτουμε ότι α και β είναι $|A|_0$ και $|B|_0$ αντίστοιχα, και τότε έχουμε 1-1 συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : B \to A$. Αλλά τότε το Θεώρημα Schroeder-Bernstein δίνει ισομορφισμό $A \simeq B$, άρα μια ισότητα $|A|_0 = |B|_0$. □

Τέλος, μπορούμε να αναπαράγουμε το Θεώρημα του Cantor, δείχνοντας ότι για κάθε πληθάριθμο υπάρχει ένας μεγαλύτερος του.

Θεώρημα Cantor

Για A:Set, δεν υπάρχει συνάρτηση επί $A \to (A \to 2)$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι $f : A \to (A \to \mathbf{2})$ είναι τέτοια συνάρτηση, και ορίζουμε $g : A \to \mathbf{2}$ με $g(a) := \neg f(a)(a)$. Αφού η f είναι επί τότε υπάρχει $a_0 : A$ τέτοιο ώστε $g{=}f(a_0)$, τότε $g(a_0){=}f(a_0)(a_0)$ αλλά $g(a_0){=}\neg f(a_0)(a_0)$, άτοπο. Άρα η f δεν είναι επί. $\square$

Θεώρημα Cantor

Πόρισμα

Υποθέτουμε απόκλειση μέσου, για οποιονδήποτε α:Card υπάρχει πληθάριθμος β τέτοιος ώστε $\alpha \leqslant \beta$ και $\alpha \neq \beta$.

Απόδειξη.

Έστω $\beta = 2^\alpha$. Τώρα θέλουμε να δείξουμε μια απλή πρόταση, έτσι από επαγωγή υποθέτουμε α να είναι $|\mathrm{A}|_0$, οπότε $\beta := |A \to 2|_0$.
Χρησιμοποιώντας απόκλειση μέσου, έχουμε μια συνάρτηση $f : A \to (A \to 2)$ η οποία ορίζεται από

$$f(a)(a') \equiv \begin{cases} 1_2 & , a = a' \\ 0_2 & , a \neq a' \end{cases} .$$

Αν f(a)=f(a$'$), τότε f(a$'$)(a)=f(a)(a)=1_2, άρα a=a$'$, συνεπώς f είναι 1-1. Άρα

$$\alpha = |A|_0 \leqslant |A \to 2|_0 := 2^\alpha .$$

Από την άλλη, αν $2^\alpha \leqslant \alpha$ τότε θα έχουμε 1-1 συνάρτηση $(\mathrm{A} \to 2) \to \mathrm{A}$.
Από Λήμμα 6, αφού έχουμε $(\lambda x.0_2)$:$\mathrm{A} \to 2$ και απόκλειση μέσου, θα υπάρχει μια επί $\mathrm{A} \to (\mathrm{A} \to 2)$, άτοπο από Θεώρημα Cantor. □

Τέλος

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!