Θεώρημα *Diaconescu*

Ειδικά Θέματα Λογικής: Θεωρία Τύπων του *Martin – Löf*

Νίκος Καραγιάννης-Αξυπολιτίδης

ΠΜΣ ΑΛΜΑ, Α.Μ Α0025

Φεβρουάριος 2021

Συνολοθεωρητική διατύπωση του Θεωρήματος *Diaconescu*

- **Αξίωμα Επιλογής (**AC**)**: Έστω μια οικογένεια μη κενών συνόλων X. Υπάρχει συνάρτηση f ορισμένη στην οικογένεια X τέτοια ώστε για κάθε $A \in X$ να ισχύει $f(A) \in A$.
- **Νόμος του Αποκλειόμενου Τρίτου (**LEM**)**: Έστω P μια πρόταση. Τότε $P \vee \neg P$.

Θεώρημα: Το Αξίωμα Επιλογής (AC) συνεπάγεται τον Νόμο του Αποκλειόμενου Τρίτου (LEM).

Ιστορικά στοιχεία

- **1967**: Ο **Errett Albert Bishop** (ΗΠΑ, 1928-1983) στο *Foundations of Constructive Analysis* θέτει σαν άσκηση την απόδειξη του ισχυρισμού χωρίς να προτείνει κάποια λύση.
- **1975**: Ο **Radu Diaconescu** δημοσιεύει την απόδειξη του Θεωρήματος (*Axiom of choice and complementation*. Proc. Amer. Math. SOC. 61 (1975), 176 - 178).
- **1978**: Οι **Noah D. Goodman** και **John R. Myhill** (Αγγλία, 1923-1987) δημοσιεύουν τη δική τους απόδειξη από τη σκοπιά της διαισθητικής συνολοθεωρίας. (*Choice Implies Excluded Middle* Math. Log. Quart Vol. 24: p. 461).

Το Θεώρημα πολλές φορές αναφέρεται ως *Diaconescu – Goodman – Myhill theorem* για να ξεχωρίζει από το Θεώρημα *Diaconescu* της τοποθεωρίας.

Συνολοθεωρητική απόδειξη του Θεωρήματος *Diaconescu*

Έστω P πρόταση.

- Ορίζουμε τα σύνολα
  $U = \{x \in \{0,1\} : (x=0) \vee P\}, \ V = \{x \in \{0,1\} : (x=1) \vee P\}$.
  $U, V \neq \emptyset$, επομένως από το AC παίρνουμε f ορισμένη στην $X = \{U, V\}$ τέτοια ώστε $\big(f(U) \in U\big) \wedge \big(f(V) \in V\big)$.
- Αυτό σημαίνει ότι $\Big(\big(f(U)=0\big) \vee P\Big) \wedge \Big(\big(f(V)=1\big) \vee P\Big)$, δηλαδή
  $$(f(U) \neq f(V)) \vee P \tag{1}$$

Συνολοθεωρητική απόδειξη του Θεωρήματος *Diaconescu*

- Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι:

$$P \to (U = V) \tag{2}$$

- Από τις (1) $\Big((f(U) \neq f(V)) \vee P\Big)$ και (2) παίρνουμε ότι $P \to (f(U) = f(V))$.
  Άρα,

$$(f(U) \neq f(V)) \to \neg P \tag{3}$$

Επομένως, από τις (1) και (3) έχουμε ότι

$$P \vee \neg P$$

Τυποθεωρητική διατύπωση του Θεωρήματος *Diaconescu*

- **Αξίωμα Επιλογής** (AC):
  - X σύνολο και για $x : X$ ένα σύνολο $A(x)$
  - $P(x, a)$ μια απλή πρόταση για όλα τα $x : X,\ a : A(x)$

$$\forall(x : X)\exists\big(a : A(x)\big)P(x, a) \to \exists\Big(g : \prod(x : X)A(x)\Big)\forall(x : X)P\big(x, g(x)\big)$$

- **Νόμος του Αποκλειόμενου Τρίτου** (LEM):
  - A τύπος
  - $\mathcal{U}$ σύμπαν κατά *Russel*

$$LEM(\mathcal{U}) \ :\equiv \prod\,(A : \mathcal{U})\Big[IsProp(A) \to (A + \neg A)\Big]$$

Ορισμοί

- **ίνα**: Ορίζουμε ως *ίνα* (*fiber*) ενός τύπου $f : A \to B$ σε ένα μέλος $y : B$ τον τύπο
$$fib_f(y) :\equiv \sum_{x:A} (f(x) = y).$$
- **τύπος 2**: Ο τύπος των *booleans* με ακριβώς 2 στοιχεία: 0_2, $1_2 : \mathbf{2}$.
- **αποκρισιμότητα**: Ένας τύπος A είναι *αποκρίσιμος* (*decidable*) αν $A + \neg A$.

Ορισμοί

- **suspension** : Ορίζουμε ως *suspension* του τύπου A τον τύπο $\Sigma(A)$ με κατασκευαστές
  - σημείο $N : \Sigma(A)$
  - σημείο $S : \Sigma(A)$
  - συνάρτηση $merid : A \to (N =_{\Sigma(A)} S)$.

  Η αρχή επαγωγής του $\Sigma(A)$ λέει ότι δοθέντων $P : \Sigma(A) \to \mathcal{U}$ και
  - $n : P(N)$
  - $s : P(S)$
  - για κάθε $a : A$ ένα μονοπάτι $m(a) : n =^{P}_{merid(a)} s$

  υπάρχει $t : \prod(x : \Sigma(A))P(x)$ τέτοια ώστε $t(N) \equiv n,\ t(S) \equiv s$ και για κάθε $a : A,\ t(merid(a)) = m(a)$.

Ένα Λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε

Λήμμα: Έστω A μια απλή πρόταση. Το $\Sigma(A)$ είναι *σύνολο* και η A είναι ισοδύναμη με την $N =_{\Sigma(A)} S$.

Απόδειξη:

- Αποδεικνύουμε πρώτα ότι το $\Sigma(A)$ είναι σύνολο:
  Ορίζουμε τύπο $P(x, y)$ για όλα τα $x, y : \Sigma(A)$ για τον οποίο θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμος με τον ταυτοτικό τύπο του $\Sigma(A)$ (τον $Id_{\Sigma(A)}$) και ότι είναι απλή πρόταση.

  Θέτουμε:

$$P(N, N) :\equiv \mathbf{1},\ P(N, S) :\equiv A,\ P(S, N) :\equiv A,\ P(S, S) :\equiv \mathbf{1}. \qquad (4)$$

Ένα Λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε

Από τον ορισμό του $\Sigma(A)$, για $a : A$ υπάρχει μια $merid(a) : N = S$.
Επομένως,

$$P(N, N) = P(N, S) = P(S, N) = P(S, S)$$

Ακόμα, αφού ο A είναι κατοικήσιμος από το a, τότε είναι ισοδύναμος με τον $\mathbf{1}$, άρα $\sum(f : \mathbf{1} \to A) IsEquiv(f)$, δηλαδή $\sum(f : P(N, N) \to P(N, S)) IsEquiv(f)$.
Επομένως,

$$P(N, N) \simeq P(N, S) \simeq P(S, N) \simeq P(S, S)$$

Από *univalence axiom* υπάρχει συνάρτηση $idtoeqv^{-1} : \Big(P(N, N) \simeq P(N, S)\Big) \to \Big(P(N, N) = P(N, S)\Big)$.
Άρα, ο $P(x, y)$ είναι ισοδύναμος με τον $Id_{\Sigma(A)}$.

Ένα Λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε

Με επαγωγή στα $x, y : \Sigma(A)$ και αξιοποιώντας το γεγονός ότι ο τύπος $\mathit{IsProp}(B)$ είναι απλή πρόταση, αποδεικνύουμε ότι ο $P(x, y)$ είναι απλή πρόταση.

- Αποδεικνύουμε ότι η A είναι ισοδύναμη με την $N =_{\Sigma(A)} S$.
  Θα αξιοποιήσουμε το εξής θεώρημα:
  Θεώρημα: Έστω R αυτοπαθής οικογένεια απλών προτάσεων στον X που συνεπάγεται ισότητα. Τότε ο X είναι σύνολο και η $R(x, y)$ είναι ισοδύναμη στην $x =_X y$ για όλα τα $x, y : X$.

  Η $P(x, y)$ είναι αυτοπαθής (και απλή, όπως έχουμε ήδη δείξει). Άρα, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η $P(x, y)$ είναι ισοδύναμη με την $x =_{\Sigma(A)} y$ για όλα τα $x, y : \Sigma(A)$. Επομένως, παίρνοντας $x :\equiv N$, $y :\equiv S$ έχουμε $P(N, S) \simeq (N =_{\Sigma(A)} S)$. Από την (4)$\big(P(N, S) :\equiv A\big)$ παίρνουμε

$$A \simeq (N =_{\Sigma(A)} S)$$

Απόδειξη του Θεωρήματος

Έστω μια απλή πρόταση A.

1 Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbf{2} \to \Sigma(A)$ ως εξής:

- $f(0_2) :\equiv N$
- $f(1_2) :\equiv S$

Η f είναι *surjective*, δηλαδή $\prod (y : \Sigma(A)) \| \sum(x : \mathbf{2}) f(x) = y \|$.

Απόδειξη της surjectivity: Θέλουμε να δείξουμε ότι $\prod (y : \Sigma(A)) \| fib_f(y) \|$.
Για να δείξουμε ότι η $\| fib_f(y) \|$ ισχύει για όλα τα $y : \Sigma(A)$, εφαρμόζουμε την αρχή επαγωγής του $\Sigma(A)$.

Για P απλή πρόταση, ικανοποιούνται οι συνθήκες της αρχής της επαγωγής του $\Sigma(A)$, επομένως ισχύει ότι:

Αν $P(N)$ ***και*** $P(S)$, ***τότε*** $P(y)$ ***για κάθε*** $y : \Sigma(A)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι οι συνθήκες της παραπάνω πρότασης ισχύουν για την $\|fib_f(y)\|$:
$(0_2, refl_N) : fib_f(N)$, $(1_2, refl_S) : fib_f(S)$. Άρα η $\|fib_f(y)\|$ ισχύει για κάθε $y : \Sigma(A)$.

2 Από το Λήμμα, έχουμε ότι το $\Sigma(A)$ είναι σύνολο.
Επομένως, έχοντας δύο σύνολα, τα $\Sigma(A)$ και $\mathbf{2}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Αξίωμα Επιλογής και να *πάρουμε* μια $g : \Sigma(A) \to \mathbf{2}$, δεξία αντίστροφη της f (υπάρχει τέτοια λόγω της *surjectivity* της συγκεκριμένης f).

3 Παίρνουμε τώρα την $g \circ f : \mathbf{2} \to \mathbf{2}$. Αφού η ισότητα στο $\mathbf{2}$ είναι αποκρίσιμη, έχουμε:

$$\Big(g\big(f(0_2)\big) = g\big(f(1_2)\big)\Big) + \neg\Big(g\big(f(0_2)\big) = g\big(f(1_2)\big)\Big) \tag{5}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος

4 Η g είναι δεξιά αντίστροφη της f, άρα είναι *injective*. Επομένως, η (5) γίνεται:

$$\Big(f(0_2) = f(1_2)\Big) + \neg\Big(f(0_2) = f(1_2)\Big) \tag{6}$$

5 Από τον ορισμό της f έχουμε ότι

$$\Big(f(0_2) = f(1_2)\Big) = (N = S) \tag{7}$$

6 Από το Λήμμα έχουμε ότι

$$(N = S) = A \tag{8}$$

Επομένως, από τις (6), (7) και (8) παίρνουμε

$$A + \neg A$$

Τέλος!
Ευχαριστώ πολύ!