ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΥΠΩΝ

Νικόλαος - Αλέξανδρος Τσακαλωφάς

Μεταπτυχιακός Φοιτητής (ΠΜΣ «ΑΛΜΑ»)
Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Εθνικό & Καποδιστριακό Παν/μιο Αθηνών
E-mail: `tsakalon@di.uoa.gr`

ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

«ΘΕΩΡΙΑ ΤΥΠΩΝ ΤΟΥ MARTIN-LÖF»

Μάρτιος 2021

Στ' αριστερά υπάρχουν χρήσιμες σημειώσεις για να βοηθήσουν στην κατανόηση!

Περίληψη

Η παρούσα εργασία επιχειρεί μια σύντομη εισαγωγή στα στοιχειώδη μεταμαθηματικά της θεωρίας τύπων, και των κατασκευαστικών μαθηματικών εν γένει, με τη σκιαγράφηση απόδειξης του θεμελιώδους θεωρήματος κανονικοποίησης των όρων του συστήματος **T** του Gödel.

Με αυτή την αφορμή, εξηγούμε τις πολύ βασικές ιδέες πίσω από την τυποποίηση (*formalisation*) της θεωρίας τύπων, αναφέρουμε ιστορικά και βιβλιογραφικά στοιχεία για αντίστοιχες προσπάθειες (όπως το περίφημο *Hauptsatz* του Gentzen) και αναδεικνύουμε τη στενή σύνδεση των θεωρητικών αυτών αποτελεσμάτων με την εφαρμοσμένη πληροφορική.

Το κείμενο διαμορφώθηκε με τρόπο που να εξυπηρετεί ταυτόχρονα την προφορική παρουσίαση και τη γρήγορη ατομική μελέτη.

Περιεχόμενα

1 Πρόλογος

Τόσο ιστορικά όσο και διδακτικά, οι μεταμαθηματικές αναζητήσεις εκκινούν από ερωτήματα σχετικά με την αυστηρή λογική θεμελίωση των μαθηματικών θεωριών. Στα κλασικά μαθηματικά, αυτά τα ερωτήματα στέφονται γύρω από μία πλατωνική έννοια: την **αλήθεια**.

Leopold Kronecker (1823–1891)

«Τους ακεραίους τούς έκανε ο Θεούλης· όλα τ' άλλα είναι έργο του ανθρώπου.»

Η μαθηματική αλήθεια στους περισσότερους φαντάζει σαν μια ιδέα απλή, απτή και διαισθητικά αντιληπτή· σήμερα όμως γνωρίζουμε ότι η εντύπωση αυτή είναι μόνο φαινομενική. Κάθε μία από τις «εύπεπτες» θεωρίες της αλήθειας που έχει προταθεί για τα μαθηματικά έχει καταρρεύσει κάτω από το βάρος των ίδιων των ισχυρισμών της (αναμενόμενο ίσως για μια έννοια που, στη γενικότητά της, ταλαιπωρεί τους φιλοσόφους από την αρχαιότητα). Ώστε μοιραία καλούμαστε να απαντήσουμε στο εξής δίλημμα: είτε θα αποδεχθούμε την κλασική μαθηματική παράδοση, με όλα της τα ελαττώματα, προσπαθώντας διαρκώς να τη βελτιώνουμε, συνειδητοποιώντας παράλληλα τα όριά της, είτε θα την απορρίψουμε και θα επιλέξουμε να θεμελιώσουμε τα μαθηματικά σε κάποια καινούρια, πιο «υλική» ιδέα.

Στην τελευταία αυτή κατεύθυνση κινείται η παράδοση του μαθηματικού κατασκευατισμού (*constructivism*). Ο κατασκευατισμός επιχειρεί να εξαλείψει την έννοια της αφηρημένης αλήθειας από τα μαθηματικά και στη θέση της να βάλει εκείνη της (μαθηματικής) **κατασκευής**.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

Per Martin-Löf

Δεν είναι όμως σωστό να θεωρούμε τον κατασκευατισμό ως ένα ενιαίο κίνημα εντός της φιλοσοφίας των μαθηματικών. Πρόκειται για έναν γενικό όρο τόσο παλιό όσο - τουλάχιστον - η περατοκρατία του Leopold Kronecker (από τα πιο σκληροπυρηνικά κατασκευαστικά ρεύματα) και τόσο ευρύ ώστε να ταιριάζει και στον ιντουισιονισμό του L. E. J. Brouwer και στο φορμαλισμό του David Hilbert. Ειδικά ο τελευταίος, μολονότι φανατικός πολέμιος του κατασκευατισμού στα μαθηματικά, υποστήριζε με πάθος τη χρήση κατασκευαστικών μεθόδων στη μεταμαθηματική έρευνα. Η ιδέα αυτή μάς ακολουθά (με διάφορες παραλλαγές) μέχρι και σήμερα.

Για το σύγχρονο «εργαζόμενο μαθηματικό» το αίτημα της κατασκευής ενός ορισμένου αντικειμένου τείνει να αντικατασταθεί από το αίτημα της ανάπτυξης αλγορίθμου που λύνει ένα ορισμένο πρόβλημα. Έτσι παρατηρείται μια ώσμωση μεταξύ των κατασκευαστικών μαθηματικών και της θεωρητικής, ή ακόμα και εφαρμοσμένης, πληροφορικής. Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η ιντουισιονιστική θεωρία τύπων, γνωστή και ως θεωρία τύπων του Martin-Löf.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε το σύστημα **T** του Gödel. Το σύστημα αυτό χρησιμεύει για τη μελέτη της στοιχειώδους αριθμητικής στη βάση αρχών κοινά αποδεκτών από όλους σχεδόν τους κατασκευαστές μαθηματικούς. Κατά συνέπεια, το σύστημα **T** αποτελεί θραύσμα (*fragment*) οποιασδήποτε τυποποίησης της θεωρίας τύπων Martin-Löf.

2 Μεταμαθηματικά συστήματα για τις θεωρίες τύπων

Τι φορμαλισμό να επιλέξουμε;

Το πρώτο πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε είναι η επιλογή του κατάλληλου τυπικού συστήματος για τη μελέτη της κατασκευαστικής αριθμητικής.

Ας σκεφτούμε λοιπόν όπως σ' ένα αστυνομικό μυθιστόρημα!

Η **θεωρία υπολογισμού** θα μας δώσει τη λύση!

Το πρώτο στοιχείο που έχουμε είναι η προαναφερθείσα σύνδεση μεταξύ κατασκευατισμού και πληροφορικής. Τούτη μάς παραπέμπει στις μεθόδους της θεωρίας υπολογισμού. Η θεωρία υπολογισμού, βεβαίως, μεταχειρίζεται διάφορα συστήματα προκειμένου να μελετήσει την έννοια του αλγορίθμου· τα δύο πιο γνωστά είναι

ύποπτος 1

- οι μηχανές Turing και

ύποπτος 2

- ο λ-λογισμός.

Πιθανότερη επιλογή φαίνεται ο λ-λογισμός, αλλά πρέπει να επαληθεύσουμε την αρχική μας αυτή διαίσθηση.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι κεντρική θέση στη θεωρία τύπων Martin-Löf καταλαμβάνει η έννοια του **μετασχηματισμού**.

"This transformation looks highly suspicious my dear Watson."

Alonzo Church (1903–1995)

Για τους σκοπούς μας, η γενική μορφή ενός μετασχηματισμού είναι:

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n) \;\; t(x_1, x_2, \ldots, x_n) : A$$

Ο συμβολισμός αυτός μοιάζει πολύ με εκείνον της λ-αφαίρεσης:

$$\lambda x_1^{A_1} \lambda x_2^{A_2} \cdots \lambda x_n{}^{A_n}. \;\; t[x_1^{A_1}, x_2^{A_2}, \ldots, x_n^{A_n}]$$

(όπου $x_1^{A_1}, x_2^{A_2}, \ldots, x_n^{A_n}$ οι μεταβλητές που εμφανίζονται ελεύθερες στον όρο t). Παρατηρεί βέβαια κανείς μία διαφορά: όλες οι μεταβλητές συνοδεύονται από τον τύπο τους· αλλά ο λ-λογισμός δεν έχει τύπους... Τι να κάνουμε;

Θα χρησιμοποιήσουμε το λ-λογισμό με τύπους του Alonzo Church (1940)!

Όπως θα δούμε αμέσως, στο λ-λογισμό με τύπους κάθε μεταβλητή έχει συγκεκριμένο τύπο, ενώ ο αρχικός μας μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί ως

$$t[x_1^{A_1}, x_2^{A_2}, \ldots, x_n^{A_n}] : A, \quad \text{ή απλώς} \quad t : A.$$

Για την αντίστοιχη συνάρτηση γράφουμε

$$\lambda x_1^{A_1} \lambda x_2^{A_2} \cdots \lambda x_n{}^{A_n}. \; t[x_1^{A_1}, x_2^{A_2}, \ldots, x_n^{A_n}] : A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n.$$

3 λ-λογισμός με τύπους

Το τυπικό της γραμματικής του λ-λογισμού με τύπους ταυτίζεται με εκείνο του λ-λογισμού (χωρίς τύπους).

Έστω **Var** το (αριθμησίμως άπειρο) αλφάβητο των μεταβλητών.

Θα θεωρούμε εκφράσεις που σχηματίζονται από τα στοιχεία του **Var**, το σύμβολο λ, καθώς και τα σημεία στίξης $)$, $($ και $.$

Ορισμός 1. **Όρος** είναι ακριβώς κάθε έκφραση της μορφής

- x, όπου $x \in$ **Var**, ή
- (MN), όπου M και N όροι, ή
- $\lambda x.M$, όπου M όρος και $x \in$ **Var**.

Οι μεταβλητές που εμφανίζονται σε έναν όρο M διακρίνονται σε

- ελεύθερες και
- δεσμευμένες (από κάποια λ-αφαίρεση),

κατά τη συνήθη ορολογία που μας είναι γνωστή από τη Λογική.
FV$(M) =$ το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών του M.

Στη γλωσσολογία, η γραμματική διακρίνεται σε δύο μέρη:

– το τυπικό και

– το συντακτικό.

Στη μελέτη των τυπικών γλωσσών οι δύο αυτοί κλάδοι συχνά συγχέονται. Ωστόσο είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι υπάρχουν εκφράσεις, που ακολουθούν το τυπικό, αλλά δεν είναι γραμματικά σωστές διότι παραβαίνουν κάποιον συντακτικό κανόνα.

Παράδειγμα: το τυπικό πηλίκο

$$\frac{\alpha}{0},$$

όπου α κάποιος αριθμός.

Θα παραλείπουμε τις παρενθέσεις όπου αυτό δεν προκαλεί σύγχυση. Ειδικότερα, όταν γράφουμε (π.χ.) $\lambda x.xx$, θα εννοούμε $\lambda x.(xx)$ [η εμβέλεια της λ-αφαίρεσης επεκτείνεται όσο το δυνατό δεξιότερα]

Οι διπλανές συμβάσεις μάς γλιτώνουν από τεχνικότητες όπως η «α-μετονομασία» (ή «α-μετατροπή») που χρησιμοποιούσε ο Church.

Συμβάσεις (παρόμοιες με τις αντίστοιχες της Λογικής)

– Θεωρούμε ότι δύο όροι είναι ίσοι αν είναι ίσοι με προσέγγιση μετονομασίας των δεσμευμένων μεταβλητών τους, π.χ. $\lambda x.zx = \lambda y.zy$.

– Θεωρούμε πως, όταν ένας όρος M' προκύπτει από την αντικατάσταση $M[x{\Rightarrow}N]$, είναι FV$(N) \subseteq$ FV(M')· π.χ. $(\lambda y.x)[x{\Rightarrow}y] = \lambda z.y$.

Στο λ-λογισμό (και σ' όλες τις παραλλαγές του) κεντρική θέση κατέχει η σχέση $\longrightarrow$ της συστολής. Έστω Λ το σύνολο των όρων.

Ορισμός 2. Η μικρότερη διμελής σχέση $\longrightarrow$ στο Λ τέτοια ώστε
– να είναι συμβατή με το σχηματισμό των όρων και
– να ισχύει $(\lambda x.P)Q \longrightarrow P[x{\Rightarrow}Q]$ (ουσιώδης συστολή)
καλείται σχέση συστολής. Ειδικότερα, ο όρος $(\lambda x.P)Q$ λέγεται *redex* και ο $P[x{\Rightarrow}Q]$ είναι το *contractum* του.

Η σχέση $\twoheadrightarrow$ λέγεται αναγωγή.

Γράφουμε $\twoheadrightarrow$ για τον ανακλαστικό και μεταβατικό εγκλεισμό της $\longrightarrow$ και $\equiv$ είναι η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας που περικλείει την $\longrightarrow$.

Προηγουμένως απαιτήσαμε η σχέση $\longrightarrow$ να είναι «συμβατή με το σχηματισμό των όρων»· αυτό σημαίνει ότι,

Θυμηθείτε ότι ένας όρος είναι της μορφής $x \in$ **Var** ή $\lambda x.M$ ή MZ.

αν $M \longrightarrow N$, τότε

- $\lambda x.M \longrightarrow \lambda x.N$,
- $MZ \longrightarrow NZ$ και $ZM \longrightarrow ZN$.

Η διαίσθηση πίσω από τον ορισμό της συστολής ($\longrightarrow$).

Διαισθητικά, η σχέση $\longrightarrow$ αντιπροσωπεύει ένα βήμα υπολογισμού· όταν γράφουμε $M \longrightarrow N$ εννοούμε ότι κάπου μέσα στον όρο M υπάρχει ένα redex $(\lambda x.P)Q$ το οποίο στον όρο N έχει αντικατασταθεί από το contractum του $P[x \Rightarrow Q]$.

Όταν $M = (\lambda x.P)Q$ (redex) και $N = P[x \Rightarrow Q]$ (contractum), τότε λέμε ότι η συστολή $M \longrightarrow N$ είναι **ουσιώδης** και γράφουμε $M \longrightarrow_e N$.

Η διαίσθηση πίσω από τον ορισμό της αναγωγής ($\twoheadrightarrow$).

Η σχέση $\twoheadrightarrow$ της αναγωγής αντιπροσωπεύει πολλά, ένα ή κανένα βήμα υπολογισμού· όταν γράφουμε $M \twoheadrightarrow N$ εννοούμε ότι
$M \longrightarrow Z_1 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N$ για κάποιους όρους Z_1, Z_2 κ.λπ.

Όταν $M \twoheadrightarrow Z \longrightarrow_c Z' \twoheadrightarrow N$, τότε λέμε ότι η αναγωγή $M \twoheadrightarrow N$ είναι **ουσιώδης** και γράφουμε $M \twoheadrightarrow_e N$.

Σχόλιο για τη σχέση $\equiv$.

Παρατηρείστε ότι η σχέση $\equiv$ που ορίσαμε αυστηρά παραπάνω είναι ουσιαστικά αυτό που στη θεωρία τύπων Martin-Löf λέγεται *σχέση συνωνυμίας*. (Η σχέση $\equiv$ όμως δεν θα μας χρειαστεί για τη συνέχεια)

Συστολές/αναγωγές που δεν είναι ουσιώδεις θα τις λέμε επουσιώδεις.

Ορισμός 3. Έστω M όρος·

- $R(M) = \{N \mid M \twoheadrightarrow N\}$ είναι το σύνολο των απλοποιήσεων του M και
- $\mathcal{E}(M) = \{N \mid M \twoheadrightarrow_e N\}$ είναι το σύνολο των ουσιωδών απλοποιήσεων του M.

Το R βγαίνει από τη λέξη *reduct*.

Το $\mathcal{E}$ (και το e) βγαίνει από τη λέξη *essentia*.

Δίνουμε τέλος τον ορισμό του κανονικού όρου.

Ορισμός 4. Ένας όρος N χαρακτηρίζεται **κανονικός** αν δεν συστέλλεται σε κάποιον όρο N', δηλαδή είναι $N \not\rightarrow N'$ για κάθε όρο N'.

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι όλοι οι συντακτικά σωστοί όροι είναι **κανονικοποιήσιμοι**, ανάγονται δηλαδή σε κανονικό όρο· αυτός ο όρος λέγεται και κανονική μορφή.

Πριν προχωρήσετε, βεβαιωθείτε ότι έχετε εμπεδώσει την έννοια της ουσιώδους αναγωγής· είναι πολύ ουσιώδης για τη συνέχεια!

Είναι τώρα καιρός να ορίσουμε τους τύπους.

Θεωρούμε λοιπόν ένα αλφάβητο **Typ** το οποίο περιέχει όλους τους ατομικούς τύπους· για παράδειγμα, θα μπορούσε Nat $\in$ **Typ**.

Παρατηρήστε ότι οι τύποι προς στιγμήν αντιμετωπίζονται ως απλά σύμβολα.

Ορισμός 5. Το μικρότερο σύνολο **Types** με την ιδιότητα

- **Typ** $\subseteq$ **Types**
- και $(\tau \to \tau') \in$ **Types** όποτε $\tau, \tau' \in$ **Types**

είναι το σύνολο όλων των τύπων.

Διαισθητικά, το σύνολο **Types** αποτελείται από όλες τις «συνεπαγωγές» $\tau \to \tau'$ μεταξύ τύπων.

Στην πράξη, θεωρούμε ότι το σύμβολο $\to$ είναι δεξιά προσεταιριστικό.

Συμφωνούμε τώρα σε κάθε τύπο $\tau \in$ **Types** να αντιστοιχούμε ένα (άπειρο) σύνολο μεταβλητών **Var**$[\tau]$. Η συλλογή όλων αυτών των συνόλων αποτελεί διαμέριση του **Var**:

$$\mathbf{Var} = \biguplus_{\sigma \in \mathbf{Types}} \mathbf{Var}[\sigma].$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι κάθε μεταβλητή έχει *a priori* κάποιον τύπο (που είναι μοναδικός).

Οδηγούμαστε λοιπόν πολύ φυσιολογικά στον επόμενο ορισμό.

Σχέσεις όπως η : έχει καθιερωθεί να τις λέμε κρίσεις (*judgement*).

Ορισμός 6. Ορίζουμε τη διμελή σχέση : στο σύνολο **Types** έτσι ώστε

(var) $x : \tau$ αν $x \in$ **Var**$[\tau]$,

εισαγωγή (***I***_ntroduction_) του λ –>

(λ-I) $\lambda x.M : \tau \to \sigma$ αν $x : \tau$ και $M : \sigma$,

απαλοιφή (***E***_limination_) του λ –>

(λ-E) $(MN) : \sigma$ αν $M : \tau \to \sigma$ και $N : \tau$

και η : να είναι η μικρότερη σχέση που συμπεριφέρεται ως άνω.

Ο παραπάνω ορισμός λέμε ότι περιγράφει ένα σύστημα τύπων.

Κάθε όρος M που έχει τύπο τ (δηλ. $M : \tau$) λέμε ότι είναι **έγκυρος** (*well-typed*). Οι έγκυροι όροι είναι ακριβώς οι γραμματικά σωστοί όροι, δηλαδή το σύστημα τύπων ορίζει (εμμέσως) το συντακτικό της γραμματικής του λ-λογισμού με τύπους.

Ο Ορισμός 6 μάς υποδεικνύει έναν διαχωρισμό των έγκυρων όρων σε
— **όρους ατομικούς**: x
— **όρους εισαγωγής**: $\lambda x.M$
— **όρους απαλοιφής**: (MN)
αυτές είναι **οι τρεις συντακτικές κατηγορίες**.

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι σε έναν υπολογισμό

$$M \longrightarrow M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow N$$

οι M και N είναι της ίδιας συντακτικής κατηγορίας, εκτός κι αν κάποια από τις συστολές είναι ουσιώδης. Μ' άλλα λόγια, οι επουσιώδεις αναγωγές δίνουν όρους της ίδιας συντακτικής κατηγορίας.

Επίσης, αν το M παραπάνω είναι όρος εισαγωγής ή ατομικός, τότε η καμία από τις συστολές δεν είναι ουσιώδης. Δηλαδή, μόνο αναγωγές όρων απαλοιφής μπορούν είναι ουσιώδεις.

Τα παραπάνω μάς δίνουν δύο πολύ χρήσιμα λήμματα.

Λήμμα 1. *Οι επουσιώδεις απλοποιήσεις ενός όρου M είναι όροι της ίδιας συντακτικής κατηγορίας.*

Λήμμα 2. *Μόνο οι όροι απαλοιφής έχουν ουσιώδεις απλοποιήσεις.*

Πόρισμα. *Για τους όρους εισαγωγής $\lambda x.M$ ισχύει $R(\lambda x.M) = \{ \lambda x.M' \mid M' \in R(M) \}$ και $\mathcal{E}(\lambda x.M) = \emptyset$.*

Όλες οι ιδέες που παρουσιάσαμε εδώ γενικεύονται για το σύστημα **T** του Gödel. Συγκεκριμένα, ό,τι είπαμε για τις τρεις συντακτικές κατηγορίες, και ιδιαίτερα τα δύο λήμματα, συνεχίζει να ισχύει και εκεί.

Kurt Gödel (1906–1978)

4 Το σύστημα T του Gödel

Το σύστημα **T** του Gödel επεκτείνει, ή εξειδικεύει αν θέλετε, το λ-λογισμό με τύπους προκειμένου να μελετηθεί η στοιχειώδης αριθμητική.

Το σύστημα **T** είναι στην πραγματικότητα μια επέκταση της Πρωτογενώς Αναδρομικής Αριθμητικής (PRA). Ο Kurt Gödel το όρισε σ' ένα άρθρο του το 1958 στο περιοδικό *Dialectica*· απώτερος σκοπός του ήταν να στηρίξει σε αυτό μια απόδειξη σχετικής συνέπειας της Αριθμητικής Peano (PA). Το άρθρο αυτό έμεινε γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως «the Dialectica interpretation».

Διευρύνουμε λοιπόν τη γραμματική του λ-λογισμού με τύπους, ως εξής.

Ορισμός 7. Μια έκφραση είναι όρος του συστήματος **T** ακριβώς αν είναι όρος του λ-λογισμού ή έχει μια από τις ακόλουθες μορφές

- $\mathsf{pair}(M, N)$, *πράξη ζεύγους*
- $\mathsf{pr}_1(M)$ και $\mathsf{pr}_2(M)$, *τελεστές 1ης και 2ης προβολής ζεύγους*
- $\mathtt{0}$, *πράξη (ή σταθερά) μηδέν*
- $\mathsf{s}(M)$, *πράξη επόμενου*
- $\mathsf{rec}(M, N, Z)$, *τελεστής πρωτογενούς επαγωγής*

όπου M, N, Z οποιοιδήποτε όροι του συστήματος **T**.

Θυμηθείτε: σχέση συμβατή με το σχηματισμό των όρων σημαίνει, π.χ., ότι αν $M \longrightarrow N$, τότε

$\lambda x.M \longrightarrow \lambda x.N$,

$MZ \longrightarrow NZ$ και $ZM \longrightarrow ZN$,

$\mathsf{pair}(M, Z) \longrightarrow \mathsf{pair}(N, Z)$ και $\mathsf{pair}(Z, M) \longrightarrow \mathsf{pair}(Z, N)$,

κ.ο.κ.

Οι συμβολισμοί $\twoheadrightarrow$, $\longrightarrow_e$ και $\twoheadrightarrow_e$ ορίζονται όπως και στο λ-λογισμό.

Η σχέση $\longrightarrow$ τώρα είναι η μικρότερη συμβατή με το σχηματισμό των όρων σχέση έτσι ώστε να ισχύουν οι εξής ουσιώδεις συστολές:

- $(\lambda x.P)Q \longrightarrow P[x \Rightarrow Q]$
- $\mathsf{pr}_i(\mathsf{pair}(M_1, M_2)) \longrightarrow M_i$
- $\mathsf{rec}(M, N, 0) \longrightarrow M$
- $\mathsf{rec}(M, N, \mathsf{s}(Z)) \longrightarrow (NZ)\mathsf{rec}(M, N, Z)$

Εφόσον ασχολούμαστε εδώ με την αριθμητική, θα υπάρχει μόνο ένας ατομικός τύπος, ο Nat. Επίσης, αφού στη γραμματική μας θέλουμε πλέον να έχουμε και ζεύγη όρων ($\mathsf{pair}(M, N)$), θα πρέπει να προσθέσουμε και τον τύπο $\tau \times \sigma$ του γινομένου τύπων.

Ορισμός 8. Οι τύποι του συστήματος **T** έχουν μία από τις ακόλουθες μορφές:

- Nat,
- $(\tau \to \sigma)$ και
- $(\tau \times \sigma)$,

όπου τ και σ τύποι του συστήματος **T**.

Το αντίστοιχο σύστημα τύπων ορίζεται πολύ φυσιολογικά. Ωστόσο αξίζει λίγο να σταθούμε στη διαίσθηση, η οποία στην περίπτωσή μας προέρχεται από τη σύγχρονη φιλοσοφία του κατασκευατισμού.

Διαισθητική ερμηνεία των τύπων. —>

Όταν θα γράφουμε 0 : Nat και θα διαβάζουμε «το μηδέν είναι αριθμός», στην πραγματικότητα θα εννοούμε ότι Nat είναι το πρόβλημα κατασκευής ενός αριθμού (οποιουδήποτε) και ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος 0 που το επιλύει. Το 0 είναι λοιπόν για μας όχι ο ίδιος ο αριθμός 0, αλλά ο αλγόριθμος κατασκευής του («γεννηθήτω μηδέν»).

Ανάλογα, για κάθε αλγόριθμο M που επιλύει το πρόβλημα της κατασκευής ενός αριθμού, δηλαδή για κάθε M : Nat, υπάρχει αλγόριθμος s(M) που χρησιμοποιεί τον M σαν υπορουτίνα και επιλύει κι αυτός το πρόβλημα Nat· άρα s(M) : Nat. Ο s(M) βέβαια είναι ένας αλγόριθμος κατασκευής του επομένου του αριθμού που κατασκευάζει ο M.

Αντίστοιχες ερμηνείες (ίσως λίγο πιο πολύπλοκες) μπορούν να δοθούν και για τους υπόλοιπους όρους.

Θυμίζουμε ότι οι έγκυροι όροι είναι ακριβώς οι γραμματικά σωστοί όροι. (γραμματική = τυπικό + συντακτικό)

Ο αυστηρός ορισμός του συστήματος τύπων (άρα και των έγκυρων [*well-typed*] όρων) δίνεται στην επόμενη σελίδα.

Ορισμός 9. Για τις μεταβλητές ισχύει

(var) $x{:}\tau$ αν $x \in$ **Var**$[\tau]$.

Οι κανόνες εισαγωγής είναι:

(λ-I) $\lambda x.M{:}\tau \to \sigma$ αν $x{:}\tau$ και $M{:}\sigma$.

(pair-I) $\mathsf{pair}(M, N){:}\tau \times \sigma$ αν $M{:}\tau$ και $N{:}\sigma$.

(Nat-I) $0{:}\mathsf{Nat}$ και $\mathsf{s}(M){:}\mathsf{Nat}$ αν $M{:}\mathsf{Nat}$.

Οι κανόνες απαλοιφής είναι:

(λ-E) $(MN){:}\sigma$ αν $M{:}\tau \to \sigma$ και $N{:}\tau$.

(pair-E) $\mathsf{pr}_i(M){:}\tau_i$ αν $M{:}\tau_1 \times \tau_2$.

(Nat-E) $\mathsf{rec}(M, N, Z){:}\tau$ αν $M{:}\tau$, $N{:}\mathsf{Nat} \to \tau \to \tau$ και $Z{:}\mathsf{Nat}$.

$$\frac{M : \tau \quad N : \mathsf{Nat} \to \tau \to \tau \quad Z : \mathsf{Nat}}{\mathsf{rec}(M, N, Z) : \tau}\,(\text{Nat-E})$$

Ας επισημάνουμε ότι στο μάθημα της θεωρίας Matin-Löf, όπου δεν γράφαμε σε κάποια τυπική γλώσσα και δεν είχαμε συμφωνήσει στον τύπο που έχει κάθε μεταβλητή, έπρεπε όταν δίναμε έναν μετασχηματισμό — που ουσιαστικά ήταν ένας όρος — να αναφέραμε και τους τύπους των μεταβλητών, το λεγόμενο «περιβάλλον» (*context*) του όρου:

$$(x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \ldots, x_n : \tau_n)\; M : \tau.$$

Ωστόσο εμείς εδώ θεωρούμε ότι $M = M[x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}, \ldots, x_n^{\tau_n}]$, δηλαδή ότι η μεταβλητή $x_i = x_i^{\tau_i}$ ανήκει στο σύνολο **Var**$[\tau_i]$ (δείτε και σελ. 6). Βέβαια, μπορούμε κι εδώ να χρησιμοποιούμε και τον πρώτο συμβολισμό άτυπα αν δεν θέλουμε να γράφουμε τους τύπους σαν εκθέτες.

> Το ίδιο συμβαίνει και με τη λ-αφαίρεση $\lambda x^\tau . P$, την οποία στο μάθημα θα γράφαμε ως $\lambda(x{:}\tau)P$.

Όσα είπαμε για τις τρεις συντακτικές κατηγορίες (**όρους ατομικούς, όρους εισαγωγής** και **όρους απαλοιφής**) στο λ-λογισμό με τύπους, και δη το Λήμμα 1 και το Λήμμα 2, συνεχίζουν να ισχύουν. Ανατρέξτε στις αντίστοιχες σελίδες για να τα θυμηθείτε· είναι ιδιαίτερα σημαντικά.

5 Κανονικοποίηση για το σύστημα T

Ο αποδεικτέος ισχυρισμός (κανονικοποίηση) —>

Ο αντικειμενικός μας σκοπός είναι να δείξουμε ότι κάθε έγκυρος όρος επιδέχεται κανονικοποίηση, ότι ανάγεται δηλαδή σε κανονικό όρο.

Θυμίζουμε ότι ένας όρος N χαρακτηρίζεται κανονικός αν δεν συστέλλεται σε κάποιον όρο N', δηλαδή είναι $N \not\rightarrow N'$ για κάθε όρο N'.

Ας ονομάσουμε $\mathcal{P}$ την ιδιότητα της κανονικοποίησης.

Πώς να κάνουμε την απόδειξη;

Ένας συνηθισμένος τρόπος για να αποδεικνύουμε τέτοιες προτάσεις είναι η δομική επαγωγή· συγκεκριμένα, αφού μας ενδιαφέρουν οι έγκυροι όροι, θα δοκιμάζαμε να εφαρμόσουμε επαγωγή στο συντακτικό του συστήματος **T** προκειμένου να αποδείξουμε ότι $\mathcal{P}(M)$ για κάθε έγκυρο όρο $M{:}\tau$.

Αρχή δομικής επαγωγής —>

Η απόδειξη λοιπόν θα μπορούσε να αρχίζει με το γεγονός ότι $\mathcal{P}(x)$ για κάθε $x \in$ **Var**. Στη συνέχεια, για κάθε κανόνα του Ορισμού 9, θα έπρεπε να δείξουμε ότι, αν η ιδιότητα $\mathcal{P}$ ισχύει για τους όρους των υποθέσεων, τότε ισχύει και για τον όρο του συμπεράσματος, π.χ.

ο κανόνας (pair-I) έχει ως εξής: $$\frac{M{:}\tau \qquad N{:}\sigma}{\mathsf{pair}(M,N) : \tau\times\sigma}\text{(pair-I)},$$

άρα θα έπρεπε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{P}(M)$ και $\mathcal{P}(N)$ προκειμένου να καταλήξουμε στο $\mathcal{P}(\mathsf{pair}(M, N))$. Ομοίως και για τους άλλους κανόνες.

Οι όροι M και N στον παραπάνω κανόνα (pair-I) λέγονται άμεσοι υποόροι του pair(M, N). Το γενικό σχήμα της συντακτικής επαγωγής είναι

$$\frac{\{\, \text{άμεσοι υποόροι του } M \,\} \subseteq \mathcal{P}}{M \in \mathcal{P}}.$$

Δυστυχώς, η μέθοδος αυτή δεν θα τελεσφορήσει. Ο λόγος είναι ότι η επαγωγική υπόθεση («όλοι οι άμεσοι υποόροι έχουν την ιδιότητα $\mathcal{P}$») δεν είναι αρκετά ισχυρή για να στηρίξει το συμπέρασμα.

Μια πιο ισχυρή αρχή επαγωγής

Θα χρειαστούμε λοιπόν μια πιο ισχυρή μορφή επαγωγής. Αυτή θα έχει τη γενική μορφή

$$\frac{\{\, \text{άμεσοι υποόροι του } M \,\} \subseteq \mathcal{P} \quad \mathcal{E}(M) \subseteq \mathcal{P}}{M \in \mathcal{P}},$$

όπου $\mathcal{E}(M) = \{N \mid M \twoheadrightarrow_e N\}$ είναι το σύνολο των ουσιωδών απλοποιήσεων του M (Ορισμός 3).

Η παραπάνω αρχή επαγωγής μάς καλύπτει για την απόδειξη της ιδιότητας κανονικοποίσης. Στην πραγματικότητα, το πιο δύσκολο είναι να δείξουμε ότι η παραπάνω ισχυρότερη μορφή επαγωγής είναι λογικά έγκυρη· αυτός είναι ο στόχος μας για το υπόλοιπο της ενότητας.

Η εγκυρότητα της καινούριας, πιο ισχυρής, αρχής επαγωγής είναι συνέπεια του ακόλουθου βασικού αποτελέσματος (*Hauptsatz*).

Θεώρημα. *Αν* $M : \tau$*, τότε* $M \in \mathbb{S}(\tau)$.

Παρατηρείστε ότι ο Ορισμός 10 έχει ακριβώς τη δομή του Ορισμού 9.

Όπου παραπάνω με $\mathbb{S}(\tau)$ συμβολίζουμε το μικρότερο σύνολο όρων που εξαρτάται από τον τύπο τ σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 10. Για τις μεταβλητές ισχύει

(var)′ $x \in \mathbb{S}(\tau)$ αν $x \in$ **Var**$[\tau]$.

Για τους κανόνες εισαγωγής είναι:

(λ-I)′ $\lambda x.M \in \mathbb{S}(\tau \to \sigma)$ αν $x \in \mathbb{S}(\tau)$ και $M \in \mathbb{S}(\sigma)$·

(pair-I)′ $\mathsf{pair}(M, N) \in \mathbb{S}(\tau \times \sigma)$ αν $M \in \mathbb{S}(\tau)$ και $N \in \mathbb{S}(\sigma)$·

(Nat-I)′ $0 \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat})$ και $\mathsf{s}(M) \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat})$ αν $M \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat})$.

Για τους κανόνες απαλοιφής είναι:

(λ-E)′ $(MN) \in \mathbb{S}(\sigma)$ αν $M \in \mathbb{S}(\tau \to \sigma)$, $N \in \mathbb{S}(\tau)$ <u>και $\mathcal{E}((MN)) \subseteq \mathbb{S}(\sigma)$</u>·

(pair-E)′ $\mathsf{pr}_i(M) \in \mathbb{S}(\tau_i)$ αν $M \in \mathbb{S}(\tau_1 \times \tau_2)$ <u>και $\mathcal{E}(\mathsf{pr}_i(M)) \subseteq \mathbb{S}(\tau_i)$</u>·

(Nat-E)′ $\mathsf{rec}(M, N, Z) \in \mathbb{S}(\tau)$ αν $M \in \mathbb{S}(\tau)$, $N \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat} \to \tau \to \tau)$, $Z \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat})$ <u>και $\mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, Z)) \subseteq \mathbb{S}(\tau)$</u>.

Από τον τρόπο που ορίστηκαν τα σύνολα $\mathbb{S}(\tau)$ ($\tau \in$ **Types**) παραπάνω προκύπτει εύκολα το εξής.

Λήμμα 3. *Για κάθε $\tau \in$ **Types** το σύνολο $\mathbb{S}(\tau)$ είναι κλειστό με τη σχέση $\twoheadrightarrow$ της αναγωγής. Δηλαδή, αν $M \twoheadrightarrow N$ και $M \in \mathbb{S}(\tau)$, τότε $N \in \mathbb{S}(\tau)$.*

5.1 Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Θα προσέξατε ότι στον Ορισμό 10 μόνο για τους κανόνες απαλοιφής εμφανίζονται συνθήκες της μορφής $\mathcal{E}(\dots) \subseteq \mathbb{S}(\dots)$· αυτό οφείλεται στο Λήμμα 2, σύμφωνα με το οποίο μόνο οι όροι απαλοιφής έχουν ουσιώδεις απλοποιήσεις, άρα

$$\mathcal{E}(M) = \emptyset \text{ για κάθε } M \text{ που είναι όρος εισαγωγής}$$

και – φυσικά –

$$\mathcal{E}(x) = \emptyset \text{ για κάθε } x \in \textbf{Var}.$$

Έτσι, π.χ., έχουμε $$\frac{M \in \mathbb{S}(\tau) \quad N \in \mathbb{S}(\sigma)}{\mathsf{pair}(M,N) \in \mathbb{S}(\tau \times \sigma)}(\text{pair-I})',$$

αλλά $$\frac{M \in \mathbb{S}(\tau_1 \times \tau_2) \quad \mathcal{E}(\mathsf{pr}_i(M)) \subseteq \mathbb{S}(\tau_i)}{\mathsf{pr}_i(M) \in \mathbb{S}(\tau_i)}(\text{pair-E})'.$$

Στο εξής θα μας είναι χρήσιμοι οι ακόλουθοι συμβολισμοί:

Συμβολισμοί.

- με I συμβολίζουμε το σύνολο των όρων εισαγωγής και
- αν M όρος, $I(M) := I \cap R(M)$ (τα στοιχεία του $I(M)$ λέγονται απλοποιήσεις εισαγωγής).

Υπενθύμιση:
Λήμμα 1. *Οι επουσιώδεις απλοποιήσεις ενός όρου M είναι όροι της ίδιας συντακτικής κατηγορίας.*

Αφού μόνο οι όροι απαλοιφής έχουν ουσιώδεις απλοποιήσεις, οι όροι εισαγωγής θα έχουν μόνο επουσιώδεις απλοποιήσεις· από Λήμμα 1,

$$I(M) = R(M) \text{ για κάθε όρο εισαγωγής } M.$$

Π.χ. για $M = \lambda x.P$, είναι $I(\lambda x.P) = R(\lambda x.P) = \{\, \lambda x.P' \mid P' \in R(P) \,\}$.

Το ίδιο βέβαια ισχύει και για τους ατομικούς όρους (τις μεταβλητές).
[Η περίπτωση των ατομικών όρων, δηλ. των μεταβλητών, είναι πάντα τετριμμένη.]

Όπως πλέον έχει γίνει φανερό, η συντακτική κατηγορία που παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι οι όροι απαλοιφής. Από Λήμμα 1,

οι απλοποιήσεις εισαγωγής ενός όρου απαλοιφής είναι ουσιώδεις,

δηλαδή:

οι απλοποιήσεις εισαγωγής ενός όρου απαλοιφής είναι ουσιώδεις

(1) $I(MN) \subseteq \mathcal{E}(MN)$

(2) $I(\mathsf{pr}_i(M)) \subseteq \mathcal{E}(\mathsf{pr}_i(M))$

(3) $I(\mathsf{rec}(M,N,Z)) \subseteq \mathcal{E}(\mathsf{rec}(M,N,Z))$

Επίσης, πρέπει να είναι φανερό ότι οι ουσιώδεις αναγωγές έχουν μία από τις ακόλουθες μορφές.

Α. $MN \twoheadrightarrow (\lambda x.M')N' \longrightarrow_e M'[x{\Rightarrow}N'] \twoheadrightarrow Q$

Β. $\mathsf{pr}_i(M) \twoheadrightarrow \mathsf{pr}_i(\mathsf{pair}(M_1,M_2)) \longrightarrow_e M_i \twoheadrightarrow Q$

Γ_0. $\mathsf{rec}(M,N,Z) \twoheadrightarrow \mathsf{rec}(M',N',0) \longrightarrow_e M' \twoheadrightarrow Q$

Γ_{s}. $\mathsf{rec}(M,N,Z) \twoheadrightarrow \mathsf{rec}(M',N',\mathsf{s}(Z')) \longrightarrow_e (N'Z')\mathsf{rec}(M',N',Z') \twoheadrightarrow Q$

Οπότε σχηματίζονται αντίστοιχα οι εξής εναλλακτικές αναγωγές.

Α′. $MN \twoheadrightarrow (\lambda x.M')N \longrightarrow_e M'[x{\Rightarrow}N] \twoheadrightarrow Q$

Ισχύει ότι « Β $=$ Β′ » —>

Β′. $\mathsf{pr}_i(M) \twoheadrightarrow \mathsf{pr}_i(\mathsf{pair}(M_1,M_2)) \longrightarrow_e M_i \twoheadrightarrow Q$

$\Gamma_0{}'$. $\mathsf{rec}(M,N,Z) \twoheadrightarrow \mathsf{rec}(M,N,0) \longrightarrow_e M \twoheadrightarrow Q$

$\Gamma_{\mathsf{s}'}$. $\mathsf{rec}(M,N,Z) \twoheadrightarrow \mathsf{rec}(M,N,\mathsf{s}(Z')) \longrightarrow_e (NZ')\mathsf{rec}(M,N,Z') \twoheadrightarrow Q$

Ας επικεντρωθούμε σε μία από τις παραπάνω ουσιώδεις αναγωγές:

Α. $MN \twoheadrightarrow (\lambda x.M')N' \longrightarrow_e M'[x{\Rightarrow}N'] \twoheadrightarrow Q$,

η οποία μάς οδηγεί (γιατί;) στην

Α′. $MN \twoheadrightarrow (\lambda x.M')N \longrightarrow_e M'[x{\Rightarrow}N] \twoheadrightarrow Q$.

Παρατηρείστε τώρα ότι από την τελευταία προκύπτει μια ιδιότητα κάλυψης (***C****over*):

$\mathcal{C}$Α. $$\mathcal{E}(MN) \;=\; \bigcup_{\lambda x.M' \in I(M)} R(M'[x{\Rightarrow}N]).$$

Τέμνοντας με I (το σύνολο των όρων εισαγωγής) παίρνουμε

$\mathcal{C}_I$Α. $$I(MN) \;=\; \bigcup_{\lambda x.M' \in I(M)} I(M'[x{\Rightarrow}N]).$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο για όλες τις ουσιώδεις αναγωγές καταλήγουμε στις ιδιότητες κάλυψης που φαίνονται συγκεντρωτικά στην επόμενη σελίδα.

$\mathcal{C}$A. $\quad \mathcal{E}(MN) = \bigcup_{\lambda x M' \in I(M)} R(M'[x \Rightarrow N])$

$\mathcal{C}$B. $\quad \mathcal{E}(\mathsf{pr}_i(M)) = \bigcup_{\mathsf{pair}(M_1,M_2) \in I(M)} R(M_i)$

$\mathcal{C}$Γ. $\quad \mathcal{E}(\mathsf{rec}(M,N,Z)) = \bigcup_{0 \in I(Z)} R(M) \cup \bigcup_{\mathsf{s}(Z') \in I(Z)} R((NZ')\mathsf{rec}(M,N,Z'))$

“Elementary!”

$\mathcal{C}_I$A. $\quad I(MN) = \bigcup_{\lambda x M' \in I(M)} I(M'[x \Rightarrow N])$

$\mathcal{C}_I$B. $\quad I(\mathsf{pr}_i(M)) = \bigcup_{\mathsf{pair}(M_1,M_2) \in I(M)} I(M_i)$

$\mathcal{C}_I$Γ. $\quad I(\mathsf{rec}(M,N,Z)) = \bigcup_{0 \in I(Z)} I(M) \cup \bigcup_{\mathsf{s}(Z') \in I(Z)} I((NZ')\mathsf{rec}(M,N,Z'))$

5.2 Το βασικό μας αποτέλεσμα

Για την απόδειξη του Θεωρήματος (*Hauptsatz*) θα χρειαστεί να ορίσουμε μια συνάρτηση ερμηνείας $[\![\cdot]\!]$ που σε κάθε τύπο τ θα αντιστοιχίζει ένα σύνολο όρων $[\![\tau]\!]$, το οποίο θα λέμε και «νόημα του τ». Θα δείξουμε στο τέλος ότι στο σύνολο $[\![\tau]\!]$ ανήκουν όλοι οι όροι τύπου τ.

Ορισμός 11. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{F}$ όλων των συναρτήσεων $f\colon \textbf{Types} \to \wp(\Lambda)$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $M \in f(\tau \to \sigma)$ αν $M \in \mathbb{S}(\tau \to \sigma)$ και $\mathcal{E}(MN) \subseteq f(\sigma)$ για κάθε $N \in f(\tau)$.
- $M \in f(\tau_1 \times \tau_2)$ αν $M \in \mathbb{S}(\tau_1 \times \tau_2)$ και $\mathcal{E}(\mathsf{pr}_i(M)) \subseteq f(\tau_i)$ για κάθε $i = 1, 2$.
- $Z \in f(\mathsf{Nat})$ αν $Z \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat})$ και για κάθε τύπο τ είναι $\mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, Z)) \subseteq f(\tau)$ για όλα τα $M \in f(\tau)$ και τα $N \in f(\mathsf{Nat} \to \tau \to \tau)$.

Έτσι ορίζεται συνάρτηση $[\![\cdot]\!]\colon \textbf{Types} \to \wp(\Lambda)$ με τύπο

$$[\![\tau]\!] = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f(\tau).$$

Η παραπάνω συνάρτηση λέμε ότι είναι η **κατά σημείο ελάχιστη** που ικανοποιεί τις ανωτέρω ιδιότητες. [Προσέξτε ότι είναι και $[\![\cdot]\!] \in \mathcal{F}$]

Ως πρώτη παρατήρηση, κάθε στοιχείο του $[\![\tau]\!]$ ανήκει στο $\mathbb{S}(\tau)$.

Λήμμα 4. *Για κάθε τύπο τ είναι $[\![\tau]\!] \subseteq \mathbb{S}(\tau)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $[\![\tau]\!] \not\subseteq \mathbb{S}(\tau)$ για κάποιον τύπο τ. Τότε υπάρχει $M \in [\![\tau]\!]$ για το οποίο $M \notin \mathbb{S}(\tau)$. Όμως η συνάρτηση g με τύπο

$$g(x) = \begin{cases} [\![\tau]\!] \setminus \{M\} & \text{αν } x = \tau \\ [\![x]\!] & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad (x \in \textbf{Type})$$

ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}$ του Ορισμού 11, όμως ισχύει

$$g(\tau) \subset [\![\tau]\!] = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f(\tau) \qquad \text{[άτοπο]}$$ □

Το Λήμμα 4 και το Λήμμα 5 ουσιαστικά αντιστρέφουν τους αντίστοιχους κανόνες που πληροί το $\mathcal{F}$ στον Ορισμό 11.

Με ένα παρόμοιο επιχείρημα προκύπτει και το εξής.

Λήμμα 5. *Ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές.*

- *Αν $M \in [\![\tau_1 \to \sigma]\!]$, τότε $\mathcal{E}(MN) \subseteq [\![\sigma]\!]$ για κάθε $N \in [\![\tau]\!]$.*
- *Αν $M \in [\![\tau_1 \times \tau_2]\!]$, τότε $\mathcal{E}(\mathsf{pr}_i(M)) \subseteq [\![\tau_i]\!]$ για κάθε $i = 1, 2$.*
- *Για κάθε $\tau \in$ **Types** , αν $Z \in [\![\mathsf{Nat}]\!]$, τότε $\mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, Z)) \subseteq [\![\tau]\!]$, για οποιαδήποτε $M \in [\![\tau]\!]$ και $N \in [\![\mathsf{Nat} \to \tau \to \tau]\!]$.*

Απόδειξη. Εις άτοπον απαγωγή, αξιοποιώντας τον Ορισμό 11. □

Επίσης έχουμε και το ανάλογο του Λήμματος 3.

Λήμμα 6. *Για κάθε $\tau \in$ **Types** το σύνολο $[\![\tau]\!]$ είναι κλειστό με τη σχέση $\twoheadrightarrow$ της αναγωγής. Δηλαδή, αν $M \twoheadrightarrow N$ και $M \in [\![\tau]\!]$, τότε $N \in [\![\tau]\!]$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4 και τον Ορισμό 11. □

Το ακόλουθο λήμμα είναι σημαντικό και μας δίνει έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό της συνάρτησης $[\![\cdot]\!]$.

Λήμμα 7. *Για κάθε όρο $M : \tau$ ισχύει η εξής ισοδυναμία:*

$$M \in [\![\tau]\!] \quad \textit{αν-ν} \quad M \in \mathbb{S}(\tau) \ \textit{και} \ I(M) \subseteq [\![\tau]\!].$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Το ευθύ είναι άμεσο από τα δύο προηγούμενα λήμματα.

($\Leftarrow$) Για το αντίστροφο, ας εξετάσουμε την περίπτωση που $\tau = \mathsf{Nat}$. Έστω λοιπόν $Z \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat})$ με $I(Z) \subseteq [\![\mathsf{Nat}]\!]$· τότε για κάθε τύπο τ και κάθε $M \in [\![\tau]\!]$ και $N \in [\![\mathsf{Nat} \to \tau \to \tau]\!]$ ισχύει

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, Z)) \\
\text{από ιδιότητα κάλυψης } \mathcal{C}\Gamma \quad &= \bigcup_{0 \in I(Z)} R(M) \cup \bigcup_{\mathsf{s}(Z') \in I(Z)} R((NZ')\mathsf{rec}(M, N, Z')) \\
\text{(γιατί;)} \quad &\subseteq \bigcup_{0 \in [\![\mathsf{Nat}]\!]} \mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, 0)) \cup \bigcup_{\mathsf{s}(Z') \in [\![\mathsf{Nat}]\!])} R((NZ')\mathsf{rec}(M, N, Z')) \\
\text{από Λήμμα 5} \quad &\subseteq [\![\tau]\!],
\end{aligned}$$

επομένως (Ορισμός 11) $Z \in [\![\mathsf{Nat}]\!]$. Εργαζόμαστε όμοια και για τις άλλες περιπτώσεις. □

Το ακόλουθο μας εξασφαλίζει ότι οι ατομικοί όροι (η επαγωγική βάση της ισχυρής επαγωγής που θέλουμε να ορίσουμε) ανήκουν στην ερμηνεία των αντίστοιχων τύπων τους, όπως αναμέναμε.

Λήμμα 8. *Για κάθε τύπο τ είναι* **Var**$[\tau] \subseteq [\![\tau]\!]$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $\mathbb{S}(\tau)$ και το προηγούμενο λήμμα. □

[σύνολο 6 ακόμα λήμματα]

Εφεξής θα μας απασχολήσει η πληρότητα της ερμηνείας $[\![\cdot]\!]$. Για κάθε κανόνα του συστήματος τύπων θα δώσουμε αντίστοιχα ένα λήμμα.

Λήμμα 9 (λ-I)**.** *Αν $M[x^\tau \Rightarrow N] \in [\![\sigma]\!]$ για κάθε $N \in [\![\tau]\!]$, τότε $\lambda x^\tau.M \in [\![\tau \to \sigma]\!]$.*

Απόδειξη. Έστω $M[x^\tau \Rightarrow N] \in [\![\sigma]\!]$ για κάθε $N \in [\![\tau]\!]$. Για $N = x$ έχουμε $M \in [\![\sigma]\!] \subseteq \mathbb{S}(\sigma)$, άρα $\lambda x.M \in \mathbb{S}(\tau \to \sigma)$.

Ας θεωρήσουμε αυθαίρετα $N \in [\![\tau]\!]$· τότε (από $\mathcal{C}$A)

$$\mathcal{E}((\lambda x.M)N) = \bigcup_{\lambda x.M' \in I(\lambda x.M)} R(M'[x \Rightarrow N]) = R(M[x \Rightarrow N]) \subseteq [\![\sigma]\!],$$

συνεπώς (Ορισμός 11) είναι $\lambda x^\tau.M \in [\![\tau \to \sigma]\!]$. □

Λήμμα 10 (λ-Ε). *Αν* $M \in [\![\tau \to \sigma]\!]$ *και* $N \in [\![\tau]\!]$, *τότε* $MN \in [\![\sigma]\!]$.

Απόδειξη. Έστω $M \in [\![\tau \to \sigma]\!]$ και $N \in [\![\tau]\!]$. Από το Λήμμα 4 έχουμε $M \in \mathbb{S}(\tau \to \sigma)$ και από το Λήμμα 5 $\mathcal{E}(MN') \subseteq [\![\sigma]\!]$ για κάθε $N' \in [\![\tau]\!]$. Αφού $N \in [\![\tau]\!]$, είναι $N \in \mathbb{S}(\tau)$ (Λήμμα 4) και επίσης $\mathcal{E}(MN) \subseteq [\![\sigma]\!]$. Συνεπώς $MN \in \mathbb{S}(\sigma)$, αλλά και $I(MN) \subseteq [\![\sigma]\!]$ (από σχέση (1)). Από το Λήμμα 7 προκύπτει το ζητούμενο. □

Τα επόμενα δύο λήμματα επαναλαμβάνουν το αποτέλεσμα των δύο προηγούμενων, αλλά για την πράξη pair αυτή τη φορά.

Λήμμα 11 (pair-I). *Αν* $M_1 \in [\![\tau_1]\!]$ *και* $M_2 \in [\![\tau_2]\!]$, *τότε* $\mathsf{pair}(M_1, M_2) \in [\![\tau_1 \times \tau_2]\!]$.

Απόδειξη. Όμοια με το Λήμμα 9 (λ-Ι). □

Λήμμα 12 (pair-E). *Αν* $M \in [\![\tau_1 \times \tau_2]\!]$, *τότε* $\mathsf{pr}_i(M) \in [\![\tau_i]\!]$.

Απόδειξη. Όμοια με το Λήμμα 10 (λ-Ε). □

Λήμμα 13 (Nat-I). *Ισχύει* $0 \in [\![\mathsf{Nat}]\!]$ *και, αν* $Z \in [\![\mathsf{Nat}]\!]$, *τότε* $s(Z) \in [\![\mathsf{Nat}]\!]$.

Απόδειξη. Για το πρώτο έχουμε: $0 \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat})$ και για οποιονδήποτε τύπο τ είναι $\mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, 0)) = R(M) \subseteq [\![\tau]\!]$ για κάθε $M \in [\![\tau]\!]$ και $N \in [\![\mathsf{Nat} \to \tau \to \tau]\!]$· επομένως εφαρμόζουμε τον Ορισμό 11.

Για το δεύτερο, έστω $Z \in [\![\mathsf{Nat}]\!]$· τότε $\mathsf{s}(Z) \in \mathbb{S}(\mathsf{Nat})$ [Λήμμα 4]. Έπειτα, για οποιονδήποτε τύπο τ είναι

$$\begin{aligned} & I(\mathsf{rec}(M, N, Z)) \\ \text{σχέση (3)} \quad & \subseteq \mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, Z)) \\ \text{Λήμμα 5} \quad & \subseteq [\![\tau]\!] \subseteq \mathbb{S}(\tau) \end{aligned}$$

Άρα, από Λήμμα 7, είναι $\mathsf{rec}(M, N, Z) \in [\![\tau]\!]$, επομένως — δυνάμει του Λήμματος 9 (λ-I) — $(NZ)\mathsf{rec}(M, N, Z) \in [\![\tau]\!]$. Συνεπώς,

$$\mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, \mathsf{s}(Z))) = R((NZ)\mathsf{rec}(M, N, Z)) \subseteq [\![\tau]\!].$$

Τέλος, από τον Ορισμό 11 παίρνουμε $\mathsf{s}(Z) \in [\![\tau]\!]$. □

Λήμμα 14 (Nat-E). *Για κάθε τύπο τ, αν $Z \in [\![\mathsf{Nat}]\!]$, τότε $\mathsf{rec}(M, N, Z) \in [\![\tau]\!]$ για κάθε $M \in [\![\tau]\!]$ και $N \in [\![\mathsf{Nat} \to \tau \to \tau]\!]$.*

Απόδειξη. Αν $Z \in [\![\mathsf{Nat}]\!]$, τότε για οποιαδήποτε $M \in [\![\tau]\!]$ και $N \in [\![\mathsf{Nat} \to \tau \to \tau]\!]$:

$$\begin{aligned} & I(\mathsf{rec}(M, N, Z)) \\ \text{σχέση (3)} \quad & \subseteq \mathcal{E}(\mathsf{rec}(M, N, Z)) \\ \text{Λήμμα 5} \quad & \subseteq [\![\tau]\!] \\ \text{Ορισμός 11} \quad & \subseteq \mathbb{S}(\tau) \end{aligned}$$

Με εφαρμογή του Λήμματος 7 προκύπτει το ζητούμενο. □

Με βάση τώρα όλα τα προηγούμενα καταλήγουμε σε μια ισχυρή εκδοχή της αποδεικτέας ιδιότητας.

Πρόταση. *Έστω όρος* $M{:}\sigma$ *με* $\mathsf{FV}(M) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*. Αν* $N_1 \in [\![\tau_1]\!]$, $N_2 \in [\![\tau_2]\!], \ldots, N_k \in [\![\tau_k]\!]$*, τότε* $M[x_1{\Rightarrow}N_1, x_2{\Rightarrow}N_2, \ldots, x_k{\Rightarrow}N_k] \in [\![\sigma]\!]$*.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο συντακτικό του $M{:}\sigma$ αξιοποιώντας τα προηγούμενα λήμματα (από το Λήμμα 8 κ.ε.). □

Εφαρμόζοντας στον όρο $M{:}\sigma$ της Προτάσεως την τετριμμένη αντικατάσταση παίρνουμε $M = M[x_1{\Rightarrow}x_1, x_2{\Rightarrow}x_2, \ldots, x_k{\Rightarrow}x_k] \in [\![\sigma]\!]$.

Πόρισμα. *Έστω όρος* $M{:}\sigma$ *με* $\mathsf{FV}(M) \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*· τότε* $M \in [\![\sigma]\!]$*.*

Έτσι καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Θεώρημα. *Αν* $M{:}\tau$*, τότε* $M \in \mathbb{S}(\tau)$*.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο πόρισμα και το Λήμμα 7. □

6 Εφαρμογές

Το θεώρημα της κανονικοποίησης μπορεί τώρα να αποδειχθεί. Διαισθητικά, μας λέει πως κάθε υπολογισμός στο σύστημα **T** τερματίζει.

Θεώρημα. *Κάθε έγκυρος όρος* M *ανάγεται σε κανονικό όρο* M': $M \twoheadrightarrow M'$.

Απόδειξη. Προφανώς το αποτέλεσμα ισχύει αν $M = x \in$ **Var**. Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις, ακολουθούμε το επαγωγικό σχήμα

$$\frac{\{\,\text{άμεσοι υποόροι του } M\,\} \subseteq \mathcal{P} \qquad \mathcal{E}(M) \subseteq \mathcal{P}}{M \in \mathcal{P}}.$$

Η επαγωγή στην περίπτωση που M είναι όρος εισαγωγής είναι τετριμμένη. Για τους όρους απαλοιφής, ας εξετάσουμε ενδεικτικά την περίπτωση που $M = NZ$.

Υποθέσεις επαγωγής: οι όροι N και Z ανάγονται σε κανονικούς όρους N' και Z' αντίστοιχα· κάθε $P \in \mathcal{E}(NZ)$ ανάγεται σε κανονικό όρο P'.

Αν ο όρος $N'Z'$ είναι κανονικός, τότε έχουμε το ζητούμενο. Διαφορετικά, ο όρος $M'N'$ θα είναι *redex*· το *contractum* του Q θα προκύπτει από την ουσιώδη συστολή $N'Z' \longrightarrow_e Q$, άρα $Q \in \mathcal{E}(NZ)$, οπότε (από υπόθεση της επαγωγής) $Q \twoheadrightarrow Q'$ για κάποιον κανονικό όρο Q'. $\square$

Στη διεθνή βιβλιογραφία η ιδιότητα της συμβολής ενίοτε αναφέρεται και ως ιδιότητα *Church-Rosser*. Με τα ίδια ονόματα βρίσκουμε επίσης και άλλα παρα-πλήσια αποτελέσματα. Γενικά η σχετική ορολογία δεν έχει ακόμα αποκρυσταλλωθεί.

Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα που μπορεί να αποδειχθεί με τη χρήση αυτής της νέας αρχής επαγωγής είναι η ιδιότητα της συμβολής (*confluency*) για το σύστημα **T**.

Ορισμός. Ένας όρος M **συμβάλλει** αν δύο οποιεσδήποτε αναγωγές με αφετηρία τον M μπορούν να προεκταθούν έτσι ώστε να συναντηθούν· συγκεκριμένα, αν $M \twoheadrightarrow N$ και $M \twoheadrightarrow N'$, τότε υπάρχει όρος P έτσι ώστε $N \twoheadrightarrow P$ και $N' \twoheadrightarrow P$.

Αναφέρουμε το θεώρημα της συμβολής χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα. *Κάθε έγκυρος όρος συμβάλλει.*

Κατά συνέπεια παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα. *Κάθε έγκυρος όρος M ανάγεται σε μοναδικό κανονικό όρο M'.*

Ο όρος M' λέμε ότι είναι η κανονική μορφή του M.

Διαισθητικά, οι κανονικές μορφές μας επιτρέπουν να δώσουμε έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό της σχέσης $\equiv$.

Πόρισμα. *Έστω έγκυροι όροι M και N. Είναι $M \equiv N$ αν-ν οι M και N έχουν την ίδια κανονική μορφή.*

Αξιοσημείωτη είναι, τέλος, και η ακόλουθη ιδιότητα των κλειστών όρων τύπου Nat.

Ας αποδείξουμε πρώτα ένα χρήσιμο λήμμα. Θυμίζουμε ότι κλειστός χαρακτηρίζεται ένας όρος ακριβώς όταν δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

Λήμμα. *Κάθε κλειστός κανονικός όρος είναι όρος εισαγωγής.*

Απόδειξη. Με δομική επαγωγή.

Για παράδειγμα, αν ένας όρος MN είναι κλειστός και κανονικός, τότε (από την υπόθεση της επαγωγής) ο M είναι όρος εισαγωγής, άρα $M = \lambda x.M'$. Έτσι, $MN = (\lambda x.M')N$ (*redex*), που μας οδηγεί εις άτοπον έχοντας υποθέσει ότι ο ότος MN είναι κανονικός. □

Ορίζουμε τώρα τα **ψηφία** του συστήματος **T**.

Ορισμός. Το μικρότερο σύνολο **Num** που περιέχει τον όρο 0 και τον όρο $s(N)$ για κάθε $N \in$ **Num** λέγεται σύνολο των ψηφίων.

Δηλαδή Num $= \{0, \mathsf{s}(0), \mathsf{s}(\mathsf{s}(0)), \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(0))), \ldots\}$.

Πρόταση. *Κάθε κλειστός όρος M:Nat έχει κανονική μορφή $N \in$* **Num**.

Απόδειξη. Με δομική επαγωγή και αξιοποιώντας το προηγούμενο λήμμα και την ιδιότητα της κανονικοποίησης. □

Η παραπάνω ιδιότητα του τύπου Nat είναι γνωστή ως *canonicity* και παρουσιάζεται γενικότερα σε όλους τους «γειωμένους» τύπους (*ground type*). Γειωμένος χαρακτηρίζεται ένας τύπος απλώς αν οι κατασκευαστές αυτού και κάθε άλλου τύπου που εμπλέκεται στον ορισμό του είναι απλοί μετασχηματισμοί (τα ορίσματά τους δεν έχουν ορίσματα). Ένα σημαντικό ανοιχτό πρόβλημα στην ομοτοπική θεωρία τύπων είναι εάν η εν λόγω ιδιότητα εξακολουθεί να ισχύει παρουσία του αξιώματος της μονοτιμίας (*univalence axiom*).

7 Επίλογος

There may, indeed, be other applications of the system [of λ-calculus] than its use as a logic.

ALONZO CHURCH, 1932

Οι διάφορες ιδέες που παρουσιάστηκαν εδώ έχουν έχουν μακρά και πολύ καρποφόρα ιστορία, με προεκτάσεις που αγγίζουν πολλούς κλάδους των μαθηματικών και της πληροφορικής.

Ο λ-λογισμός εισήχθη από τον Church περί το 1930 με σκοπό να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της λογικής. Σήμερα, βέβαια, γνωρίζουμε το λ-λογισμό σαν έναν από τους φορμαλισμούς της θεωρίας υπολογισμού, ισοδύναμο προς τις μηχανές Turing. Ωστόσο, υπάρχουν πολύ περισσότερες εφαρμογές. Ιδιαίτερα, ο λ-λογισμός με τύπους (Church, 1940), λόγω ακριβώς των αποτελεσμάτων κανονικοποίησης σαν κι αυτό που παρουσιάσαμε, αποτελεί τη θεωρητική βάση για το σχεδιασμό των σύγχρονων γλωσσών προγραμματισμού οι οποίες χρησιμοποιούν ένα σύστημα τύπων για να επιτύχουν τον έγκαιρο εντοπισμό πολλών λογικών λαθών. Τέτοιες γλώσσες προγραμματισμού επιτυγχάνουν το λεγόμενο *type safety* και εγγυούνται ότι τα προγράμματα που γράφονται σε αυτές τερματίζουν πάντα.

Gerhard Karl Erich Gentzen (1909–1945)

Το πρώτο ίσως αποτέλεσμα κανονικοποίησης οφείλεται στον Gerhard Gentzen, ο οποίος το 1934 απέδειξε το περίφημο *Hauptsatz* (= *βασικό αποτέλεσμα*), γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία και ως *Cut-Elimination Theorem*. Το θεώρημα αυτό, που αφορά το σύστημα της φυσικής παραγωγής, έχει σημαντικές συνέπειες για τη θεωρία αποδείξεων.

Περί το 1940, ο Gödel παρουσιάζει τις ιδέες που αργότερα θα οδηγήσουν στη συναρτησιακή ερμηνεία της αριθμητικής στο σύστημα **T**. Η πιο γνωστή μέθοδος για την απόδειξη της κανονικοποίησης οφείλεται στον Tait (1967)· πρόκειται για τη μέθοδο της αναγωγιμότητας (*computability*). Σε μια επέκταση της ιδέας του Tait στηρίζεται και ο Jean-Yves Girard το 1972 (και ανεξάρτητα ο John C. Reynolds το 1974) για να αποδείξει την κανονικοποίηση για το σύστημα **F**, μια επέκταση του λ-λογισμού με τύπους που καλύπτει και την περίπτωση του πολυμορφισμού και συνεπώς είναι πολύ χρήσιμο για τη θεωρητική μελέτη του συναρτησιακού προγραμματισμού (βλ. *Haskell*).

Η απόδειξη που παρουσιάσαμε εμείς οφείλεται στο Νικόλαο Ρήγα (2005) και στην προσπάθειά του να αποδείξει αρχές επαγωγής σε απειρομελείς λ-λογισμούς με ετικέτες (*labels*). Προς τούτο στηρίχθηκε σε παλαιότερη εργασία του Κολέτσου (1985) για την απόδειξη της συμβολής για απειρομελή συστήματα. Μία άλλη, πιο κλασική, μέθοδος απόδειξης της κανονικοποίησης για το σύστημα **T** είναι βέβαια η προαναφερθείσα του Tait. Κατά καιρούς πάντως έχουν προταθεί και αρκετές άλλες τέτοιες μέθοδοι.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημα **T** του Gödel αποτελεί πρότυπο για τη μεταμαθηματική μελέτη των κατασκευαστικών μαθηματικών, αλλά και των αντίστοιχων τεχνολογικών εφαρμογών.

Αναφορές

[1] **The Univalent Foundations Program**,
Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics,
https://homotopytypetheory.org/book/.
Institute for Advanced Study, 2013.

[2] M. H. **Sørensen**, P. **Urzyczyn**,
Lectures on the Curry-Howard Isomorphism.
Elsevier, 2006.

[3] B. C. **Pierce**,
Types and Programming Languages.
MIT Press, 2002.

[4] Γ. **Κολέτσος**,
Μαθηματική Λογική,
https://repository.kallipos.gr/.
ΣΕΑΒ, 2015.

Ευχαριστώ πολύ το διδάσκοντα του μαθήματος, κ. Νικόλαο Ρήγα, στον οποίο οφείλεται η απόδειξη του θεωρήματος κανονικοποίησης που παρουσιάστηκε. Η εξαιρετική του υποστήριξή του υπήρξε καταλυτική για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.