Θεωρία κατηγοριών στην ομοτοπική θεωρία τύπων

Γεώργιος Πιτσιλαδής

Εργασία για το μάθημα «Θεωρία Τύπων τού Martin-Löf»

23 Φεβρουαρίου 2021

Εισαγωγή

Η θεωρία κατηγοριών χρησιμεύει στην περιγραφή μαθηματικών δομών με έμφαση όχι στα μαθηματικά αντικείμενα, αλλά στις μεταξύ τους σχέσεις.

Παραδοσιακά, οι κατηγορίες ορίζονται με αναφορά στη θεωρία συνόλων, δηλαδή τα πρωταρχικά αντικείμενά τους είναι σύνολα ή κλάσεις. Η (ομοτοπική) θεωρία τύπων δίνει τη δυνατότητα να θεμελιωθούν εντός της οι κατηγορίες· κάτι τέτοιο ίσως είναι πιο «φυσικό», δεδομένης τής δομιστικής φύσης τής ομοτοπικής θεωρίας τύπων.

Κατηγορίες στη θεωρία κατηγοριών

Στη θεωρία κατηγοριών, οι κατηγορίες ορίζονται ως εξής:

Ορισμός

Μια κατηγορία αποτελείται από

- μια συλλογή αντικειμένων,
- για κάθε ζεύγος αντικειμένων A, B, μία συλλογή βελών ή μορφισμών από το A στο B (συμβολισμός $f : A \to B$),
- για κάθε αντικείμενο A, έναν ταυτοτικό μορφισμό από το A στο A,
- σύνθεση, που για κάθε μορφισμούς $f : A \to B$, $g : B \to C$ δίνει τη σύνθεσή τους $g \circ f$,
- η σύνθεση οφείλει να είναι προσεταιριστική με ουδέτερο στοιχείο τον ταυτοτικό μορφισμό.

Αν θεμελιώσουμε τη θεωρία κατηγοριών στη θεωρία συνόλων, οφείλουμε να υποθέσουμε ότι οι συλλογές των αντικειμένων και των μορφισμών είναι σύνολα (ή κλάσεις).

Κλασικά παραδείγματα κατηγοριών

Για κάθε είδος αλγεβρικής δομής, μπορούμε να θεωρήσουμε κατηγορία με αντικείμενα τις δομές και βέλη τους ομομορφισμούς μεταξύ τους. Για παράδειγμα, η κατηγορία των διανυσματικών χώρων έχει ως μορφισμούς τις γραμμικές απεικονίσεις.

Η κλάση όλων των συνόλων αποτελεί κατηγορία, με μορφισμούς τις συναρτήσεις.

Κάθε προδιάταξη (δηλ. ανακλαστική μεταβατική διμελής σχέση) μπορεί να ιδωθεί ως κατηγορία που μεταξύ κάθε δύο στοιχείων A, B έχει ένα μοναδικό βέλος ανν $A \leq B$.

Προκατηγορίες

Ας περάσουμε στη θεωρία τύπων.

Ορισμός

Μία *προκατηγορία* (precategory) C αποτελείται από:

- έναν τύπο C_0 *αντικειμένων* (objects)· συντομογραφία $x : C$ αντί τού $x : C_0$,
- για κάθε $x, y : C$, ένα σύνολο *βελών* (arrows) ή *μορφισμών* (morphisms) $\hom_C(x, y)$,
- για κάθε $x : C$, έναν *ταυτοτικό μορφισμό* $1_x : \hom_C(x, x)$,
- μια *συνάρτηση σύνθεσης* $\circ$, που δοθέντων $f : \hom_C(a, b)$, $g : \hom_C(b, c)$ επιστρέφει ένα $g \circ f : \hom_C(a, c)$,
- για κάθε $x, y : C$ και $f : \hom_C(x, y)$, μάρτυρες για τα $f = 1_y \circ f$ και $f = f \circ 1_x$,
- για κάθε $w, x, y, z : C$ και $f : \hom_C(w, x)$, $g : \hom_C(x, y)$, $h : \hom_C(y, z)$, μάρτυρα για το $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Παραδείγματα προκατηγοριών: θεμελιώδες ομαδοειδές

Παράδειγμα

Για κάθε τύπο X, ορίζεται προκατηγορία, με

- ✓ τον X ως τύπο αντικειμένων,
- ✓ για κάθε $x, y : X$, $\hom_X(x, y) :\equiv \|x = y\|_0$,
- ✓ για κάθε $x : X$, $1_x :\equiv |\mathrm{refl}_x|_0 : \hom_C(x, x)$,
- ✓ σύνθεση $\circ : \|y = z\|_0 \to \|x = y\|_0 \to \|x = z\|_0$, που ορίζεται ώστε $|q|_0 \circ |p|_0 = |p \bullet q|_0$,
  - Υπενθύμιση (λήμμα 52 των σημειώσεων): Για $n \geq -2$, εάν για κάθε $x : A$ έχουμε is-n-type$(B(x))$, τότε is-n-type$(\Pi_{x:A} B(x))$.
  - Υπενθύμιση (λήμμα 70 των σημειώσεων): Αν isSet(B), τότε $(A \to B) \cong (\|A\|_0 \to B)$.
- ✓ για κάθε $|p|_0 : \|x = y\|_0$, έχουμε $1_y \circ |p|_0 = \left|p \bullet \mathrm{refl}_y\right|_0 = |p|_0$ και όμοια $|p|_0 = |p|_0 \circ 1_x$,
- ✓ η $\circ$ κληρονομεί την προσεταιριστική ιδιότητα από την $\bullet$.

Η προκατηγορία αυτή καλείται το *θεμελιώδες ομαδοειδές* (fundamental groupoid) τού X.

Παραδείγματα προκατηγοριών: ομοτοπική προκατηγορία των τύπων

Παράδειγμα

Για κάθε σύμπαν $\mathcal{U}$, ορίζεται η *ομοτοπική προκατηγορία των τύπων* (homotopy precategory of types), με

- ✓ το $\mathcal{U}$ ως τύπο αντικειμένων,
- ✓ για κάθε $A, B : \mathcal{U}$, $\hom_{\mathcal{U}}(A, B) :\equiv \|A \to B\|_0$,
- ✓ για κάθε $A : \mathcal{U}$, $1_A :\equiv |\mathrm{id}_A|_0 : \hom_{\mathcal{U}}(A, A)$,
- ✓ σύνθεση $\circ_{\mathcal{U}}$ που για κάθε $|f|_0 : \|A \to B\|_0$, $|g|_0 : \|B \to C\|_0$, δίνει το $|g \circ f|_0$ (όμοια με προηγουμένως),
- ✓ για κάθε $A, B : \mathcal{U}$ και $|f|_0 : \hom_{\mathcal{U}}(A, B)$, έχουμε $1_B \circ_{\mathcal{U}} |f|_0 = |\mathrm{id}_B \circ f|_0 = |f|_0$ και όμοια $|f|_0 = |f|_0 \circ_{\mathcal{U}} 1_A$,
- ✓ η $\circ_{\mathcal{U}}$ κληρονομεί την προσεταιριστική ιδιότητα από την $\circ$.

Παραδείγματα προκατηγοριών: προδιατάξεις

Παράδειγμα

Μία προκατηγορία P για την οποία isProp($\hom_P(a, b)$) για κάθε $a, b : P_0$ καλείται *προδιάταξη* (preorder).
Μπορεί ισοδύναμα να θεωρηθεί ως ο τύπος P_0 εφοδιασμένος με μία απλή σχέση $\leq$ όπου $a \leq b :\equiv \hom_{P_0}(a, b)$.

- Η ύπαρξη ταυτοτικών μορφισμών είναι ισοδύναμη με την ανακλαστικότητα τής $\leq$.
- Η συνθεσιμότητα των μορφισμών είναι ισοδύναμη με τη μεταβατικότητα τής $\leq$.

Ισομορφισμοί

Ορισμός

Για $f : \hom_C(a,b)$, η f καλείται *ισομορφισμός* ανν υπάρχει $g : \hom_C(b,a)$ με $g \circ f = 1_a$ και $f \circ g = 1_b$· δηλαδή,

$$\mathrm{isCatIso}(f) :\equiv \Sigma_{g:\hom_C(b,a)} \left((g \circ f = 1_a) \times (f \circ g = 1_b) \right).$$

Ορίζεται επομένως ο *τύπος των ισομορφισμών* μεταξύ των a, b:

$$a \cong_C b :\equiv \Sigma_{f:\hom_C(a,b)} \mathrm{isCatIso}(f).$$

Λήμμα

Σε κάθε προκατηγορία C, για κάθε $a, b : C$, $\mathrm{isSet}(a \cong_C b)$.

Απόδειξη.

Υπενθύμιση (λήμμα 51 των σημειώσεων): Για $n \geq -2$, εάν $\text{is-}n\text{-type}(A)$ και για κάθε $x : A$ έχουμε $\text{is-}n\text{-type}(B(x))$, τότε $\text{is-}n\text{-type}(\Sigma_{x:A} B(x))$.
Το $\hom_C(a,b)$ είναι εξ ορισμού σύνολο, άρα αρκεί ο τύπος $\mathrm{isCatIso}(f)$ να είναι σύνολο. Για την ακρίβεια, είναι απλή πρόταση. □

isProp(isCatIso(f))

Λήμμα

Σε κάθε προκατηγορία C, για κάθε $f : \mathrm{hom}_C(a,b)$, $\mathrm{isProp}(\mathrm{isCatIso}(f))$.

Απόδειξη.

Έστω $(h,\eta,\epsilon), (h',\eta',\epsilon') : \Sigma_{g:\mathrm{hom}_C(b,a)} ((g \circ f = 1_a) \times (f \circ g = 1_b))$.
Κατ' αρχάς, $h = 1_a \circ h = h' \circ f \circ h = h' \circ 1_b = h'$, έχουμε δηλαδή $p : h = h'$.
Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι

$$\mathrm{transport}^H(p,\eta) = \eta', \tag{1}$$

$$\mathrm{transport}^E(p,\epsilon) = \epsilon', \tag{2}$$

όπου $H(g) :\equiv (g \circ f = 1_a)$ και $E(g) :\equiv (f \circ g = 1_b)$.
Όμως, τα $\mathrm{hom}_C(a,a)$ και $\mathrm{hom}_C(b,b)$ είναι σύνολα, οπότε τα (1) και (2) ισχύουν, ως ισότητες μεταξύ μελών απλών προτάσεων. □

Συμβολισμός

Επειδή isProp(isCatIso(f)), ορίζεται καλώς ο συμβολισμός f^{-1} για τον αντίστροφο ισομορφισμό τής f.

`idtoiso`

Έχουμε δύο διαφορετικές έννοιες ταύτισης αντικειμένων μιας προκατηγορίας: ισότητα και ισομορφισμό.

Λήμμα

Σε κάθε προκατηγορία C, για κάθε $a, b : C$,

$$\texttt{idtoiso} : (a =_C b) \to (a \cong_C b)$$

Απόδειξη.

Με επαγωγή στην ισότητα: έστω $\mathsf{refl}_a : a = a$, τότε $1_a : a \cong_C a$.
(αυτό βεβαίως σημαίνει πως $\texttt{idtoiso}(\mathsf{refl}_a) :\equiv 1_a$) $\square$

`idtoiso`: Ιδιότητες

Λήμμα

Αν $p : x = x'$, $q : y = y'$, $f : \hom_C(x, y)$, *τότε*

$$\begin{aligned}(p, q)_*(f) &= \mathtt{idtoiso}(q) \circ f \circ \mathtt{idtoiso}(p)^{-1},\\ \mathtt{idtoiso}(p^{-1}) &= (\mathtt{idtoiso}(p))^{-1},\\ \mathtt{idtoiso}(p \bullet q) &= \mathtt{idtoiso}(q) \circ \mathtt{idtoiso}(p),\end{aligned}$$

όπου $(p, q)_*(f)$ *συντομογραφία τού* $\mathrm{transport}(p, (\mathrm{transport}(q, f)))$.

Απόδειξη.

Με επαγωγή. Αν τα p και q είναι refl_x και refl_y αντίστοιχα, τότε τα ζητούμενα προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό τής `idtoiso` και τις ιδιότητες των μονοπατιών. □

Κατηγορίες

Έχουμε δύο διαφορετικές έννοιες ταύτισης αντικειμένων μιας προκατηγορίας: ισότητα και ισομορφισμό.

Ορισμός

Μία *κατηγορία* (category) C είναι μία προκατηγορία όπου η συνάρτηση $\mathtt{idtoiso}$ είναι ισοδυναμία για κάθε $a, b : C$· άρα, υπάρχει αντίστροφή της,

$$\mathtt{isotoid} : (a \cong_C b) \to (a =_C b).$$

Έπεται ότι ο τύπος των αντικειμένων μιας κατηγορίας είναι 1-τύπος.

Λήμμα

$$\mathtt{isotoid}(f \circ g) = \mathtt{isotoid}(g) \bullet \mathtt{isotoid}(f)$$

Αυστηρές και ισχνές κατηγορίες

Ορισμός

Μία *αυστηρή κατηγορία* (strict category) είναι μια προκατηγορία τής οποίας ο τύπος των αντικειμένων είναι σύνολο.

Οι αυστηρές κατηγορίες δεν είναι πάντα κατηγορίες.

Ορισμός

Μία κατηγορία καλείται *ισχνή* (gaunt) αν είναι επιπλέον αυστηρή.

Παρατήρηση

Μια κατηγορία C είναι ισχνή ανν κάθε αυτομορφισμός είναι ταυτοτικός.

- $\Rightarrow$ Αφού $\mathrm{isSet}(C_0)$ και $(a \cong_C b) \cong (a =_C b)$, έχουμε $\mathrm{isProp}(a \cong_C b)$. Επομένως, κάθε $a \cong_C a$ είναι συσταλτός με κέντρο συστολής το 1_a.
- $\Leftarrow$ Έστω $f, g : a \cong_C b$. Ο $f \circ g^{-1}$ είναι αυτομορφισμός (με αντίστροφο $g \circ f^{-1}$)· από υπόθεση, $f \circ g^{-1} = 1_b$. Όμοια, $g^{-1} \circ f = 1_a$. Άρα $f^{-1} = g^{-1}$, οπότε και $f = g$. Επομένως, $\mathrm{isProp}(a \cong_C b)$ και, αφού $(a \cong_C b) \cong (a =_C b)$, προκύπτει ότι $\mathrm{isSet}(C_0)$.

Παραδείγματα κατηγοριών

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας το univalence, μπορούμε να δείξουμε ότι ο τύπος $\mathcal{S}et$ έχει τη δομή κατηγορίας, με $\hom_{\mathcal{S}et}(A, B) :\equiv A \to B$.

Παράδειγμα

Αν is-1-type(X), τότε ο X μπορεί να ιδωθεί ως κατηγορία, με $\hom_X(x, y) :\equiv (x = y)$. Αν επιπλέον isSet$(X)$, η (ισχνή) κατηγορία αυτή καλείται η *διακριτή* (discrete) κατηγορία τού X.

Σημείωση

Είναι δυνατόν από μία προκατηγορία C να πάρουμε μία κατηγορία $\hat{C}$, που λέγεται η *πλήρωση Rezk* (Rezk completion) τής C.

Παραδείγματα κατηγοριών: μερικές διατάξεις

Παράδειγμα

Μία προδιάταξη P που είναι ταυτόχρονα κατηγορία καλείται *μερική διάταξη* (partial order). Ουσιαστικά, η επιπλέον ιδιότητα ότι $(a \cong_C b) \to (a =_{P_0} b)$ δίνει την αντισυμμετρικότητα. Παράλληλα, όμως,

$$a \cong_C b :\equiv \Sigma_{f:\hom_C(a,b)} \mathrm{isCatIso}(f),$$
$$\mathrm{isProp}(\hom_C(a,b)),$$
$$\mathrm{isProp}(\mathrm{isCatIso}(f)),$$
$$(a \cong_C b) \cong (a =_{P_0} b),$$

επομένως $\mathrm{isSet}(P_0)$, δηλαδή κάθε μερική διάταξη είναι ισχνή κατηγορία.

Συναρτητές

Οι συναρτητές είναι απεικονίσεις μεταξύ κατηγοριών που σέβονται τη σύνθεση και τα ταυτοτικά στοιχεία.

Ορισμός

Ένας συναρτητής $F : C \to D$ αποτελείται από μία συνάρτηση $F : C_0 \to D_0$ και για κάθε $a, b : C$ μία συνάρτηση $F_{a,b} : \hom_C(a, b) \to \hom_D(F(a), F(b))$ ώστε για κάθε $a, b, c : C$ και $f : \hom_C(a, b)$, $g : \hom_C(b, c)$ να ισχύουν $F_{a,a}(1_a) = 1_{F(a)}$ και $F_{a,c}(g \circ f) = F_{b,c}(g) \circ F_{a,b}(f)$.

Ορισμός

Ένας συναρτητής $F : C \to D$ είναι *πιστός και πλήρης* ανν για κάθε $a, b : C$ ο $F_{a,b}$ είναι ισοδυναμία μεταξύ των $\hom_C(a, b)$ και $\hom_D(F(a), F(b))$.

Ορισμός

Ένας συναρτητής $F : C \to D$ είναι *ισομορφικά επί* ανν για κάθε $b : D$ υπάρχει απλώς ένα $a : C$ με $F(a) \cong_D b$.

Πιστοί, πλήρεις και ισομορφικά επί συναρτητές

Ιδιότητα

Κάθε πιστός, πλήρης και ισομορφικά επί συναρτητής είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

Στη θεμελίωση της θεωρίας κατηγοριών στη θεωρία συνόλων, η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της επιλογής.

Στη θεμελίωση στην ομοτοπική θεωρία τύπων, η ιδιότητα αυτή

- για τις αυστηρές κατηγορίες, εξακολουθεί να είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της επιλογής,
- για τις κατηγορίες, είναι αποδείξιμη χωρίς κάποια επιπλέον υπόθεση,
- για τις προκατηγορίες, δεν είναι δυνατόν να αποδειχθεί.

Ανασκόπηση των ορισμών

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Κατηγορία} \arrow[dr] & \\
\text{Ισχνή κατηγορία} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{Προκατηγορία} \\
 & \text{Αυστηρή κατηγορία} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Σχήμα: Η σχέση μεταξύ των τεσσάρων εννοιών κατηγορίας που είδαμε.

	C_0	$\hom_C(a,b)$	$(a \cong_C b) \cong (a =_C b)$	$a \cong_C b$	(F)
Προκατηγορία	$C_0 : \mathcal{U}$	isSet	✗	isSet	✗
Κατηγορία	is-1-type	isSet	✓	isSet	✓
Αυστηρή κατηγορία	isSet	isSet	✗	isSet	AC
Ισχνή κατηγορία	isSet	isSet	✓	isProp	✓

Πίνακας: Οι ιδιότητες των εννοιών κατηγορίας. Τα σκιασμένα κελιά είναι ιδιότητες που περιλαμβάνονται στον ορισμό της εκάστοτε έννοιας. Το (F) είναι ότι «Κάθε πιστός, πλήρης και ισομορφικά επί συναρτητής είναι ισοδυναμία κατηγοριών.»

Περαιτέρω δυνατότητες

Βεβαίως, το επόμενο βήμα είναι να οριστούν φυσικοί μετασχηματισμοί (natural transformations) και προσαρτήσεις (adjunctions).

Μπορούν επίσης να οριστούν (προ)κατηγορίες ανώτερης τάξης (2-κατηγορίες, ∞-κατηγορίες, κλπ), αντικαθιστώντας το $\mathrm{isSet}(\mathrm{hom}_C(a,b))$ με άλλες συνθήκες.

Μπορούν να οριστούν και άλλες περιπτώσεις προκατηγοριών, που ταυτίζουν αντικείμενα της προκατηγορίας με διαφορετικούς τρόπους από ισομορφισμούς.
Για παράδειγμα, οι $\dagger$-κατηγορίες γενικεύουν τον τρόπο που οι μοναδιαίοι γραμμικοί μετασχηματισμοί σχετίζουν χώρους Hilbert.