π.χ 1

(i) Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(ii) Να λυθεί η εξίσωση: $AX + A^2 = I - A$

ΛΥΣΗ

i]
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 : \Gamma_3 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\Gamma_2 : \Gamma_2/4]{\Gamma_3 : \Gamma_3/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 : \Gamma_2 + \Gamma_3/4} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$\Gamma_1 : \Gamma_1 - 3\Gamma_3$

$$\xrightarrow{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5/2 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$\Gamma_1 : \Gamma_1 - 2\Gamma_2$

$$\xrightarrow{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/4 & -1/2 & -7/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{}_{A^{-1}}$$

ii] $AX + A^2 = I - A$

$\Rightarrow AX = I - A - A^2$

$\xRightarrow{\cdot A^{-1}} (A^{-1}A)X = IA^{-1} - AA^{-1} - A^2(A^{-1})$

$\Rightarrow X = A^{-1} - I - A$

π.χ 2

Έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

(i) να βρεθεί ο αντίστροφος (αν υπάρχει)

(ii) να λυθεί η $AX + A^2 = I - A$

ΛΥΣΗ

i)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 : \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 : \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ A^{-1} !

ii] $AX = I - A - A^2$ $\rightarrow$ Ax_1 = 1η στήλη του $I-A-A^2$

$\rightarrow$ Ax_2 = 2η στήλη του $I-A-A^2$

$\rightarrow$ Ax_3 = 3η στήλη του $I-A-A^2$

π.χ 3

① Με δεδομένους τους:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Να λυθεί η εξίσωση:

$$A^TA + A^2X = I + A^2 + B$$

$$\overset{\cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} A^{-1}A^TA + A^{-1}A^2X = A^{-1}I + A^{-1}A^2 + A^{-1}B$$

$$\Longrightarrow A^{-1}A^TA + AX = A^{-1}I + A + A^{-1}B$$

$$\overset{\cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} (A^{-1})^2 \cdot A^T \cdot A + A^{-1}AX = (A^{-1})^2 \cdot I + A^{-1}A + (A^{-1})^2B$$

$$\Longrightarrow (A^{-1})^2 \cdot A^T \cdot A + X = (A^{-1})^2 + I + (A^{-1})^2B$$

$$\Longrightarrow X = (A^{-1})^2 + I + (A^{-1})^2B - (A^{-1})^2A^TA$$

π.χ 4

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $A-I$ αντιστρέψιμο

Ν.δ.ο:

① $(A^3 - I)(A-I)^{-1} = I + A + A^2$

② $(A-I)^{-1}\cdot(A^3-I) = I + A + A^2$

AYSH

① $(A^3-I)(A-I)^{-1} = I + A + A^2$

$\Rightarrow (A^3-I)(A-I)^{-1}\cdot(A-I) = I(A-I) + A(A-I) + A^2(A-I)$

$\Rightarrow A^3 - I = A - I + A^2 - A + A^3 - A^2$

$\Rightarrow A^3 - I = A^3 - I$

② $(A-I)^{-1}\cdot(A^3-I) = I + A + A^2$

$\Rightarrow (A-I)\cdot(A-I)^{-1}\cdot(A^3-I) = I(A-I) + A(A-I) + A^2(A-I)$

$\Rightarrow A^3 - I = A - I + A^2 - A + A^3 - A^2$

$\Rightarrow A^3 - I = A^3 - I$

Scanned with CamScanner