Ασκηση ①

→ Να προσδιοριστεί αν το διάνυσμα $\vec{\beta}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$.

$$\vec{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Λύση

Αρκεί νδο: $c_1 \cdot \vec{a}_1 + c_2 \cdot \vec{a}_2 + c_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{\beta} \iff$

$$\iff c_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \overset{\Gamma_3 = \Gamma_3 - \Gamma_1}{\iff}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{array}\right] \overset{\text{βάσει Gauss}}{\iff}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{\Gamma_2 = \Gamma_2 + 2\Gamma_3}{\iff}$$

$$\iff \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \overset{\Gamma_2 = \Gamma_2 / 4}{\iff}$$

ανηγμένη κλιμακωτή

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Leftrightarrow c_1 = -1, \ c_2 = 0, \ c_3 = -2$$

Άσκηση ②

Να βρεθούν οι συντελεστές

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -7 & 2 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \underset{\Gamma_2 = \Gamma_2 - 3\Gamma_3}{\overset{\Gamma_1 = \Gamma_1 + 5\Gamma_3}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -7 & 2 & 0 & 3 & 30 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \overset{\Gamma_1 = \Gamma_1 + 7\Gamma_2}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -19 & 0 & 31 & -89 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{βασική} & \text{βασική} & \text{ελεύθερη} & \text{βασική} & \text{ελεύθερη} \end{array}$$

Εκφράζω τις βασικές συναρτήσει των ελεύθερων μεταβλητών.

$$x_1 - 19x_3 + 31x_5 = -89 \Leftrightarrow x_1 = 19x_3 - 31x_5 - 89$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_5 = -17 \Leftrightarrow x_2 = 3x_3 - 4x_5 - 17$$

$$x_4 - x_5 = 4 \Leftrightarrow x_4 = x_5 + 4$$

Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19x_3 - 31x_5 - 89 \\ 3x_3 - 4x_5 - 17 \\ x_3 \\ x_5 + 4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19t - 31\delta - 89 \\ 3t - 4\delta - 17 \\ t \\ \delta + 4 \\ \delta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 19t \\ 3t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31\delta \\ -4\delta \\ 0 \\ \delta \\ \delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -89 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= t \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \cdot \begin{bmatrix} -31 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -89 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Κάθε λύση του συστήματος είναι γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων συν ένα σταθερό διάνυσμα