Επίλυση γραμμικών συστημάτων Ι.

Βασίλειος Νάκος

9 Οκτωβρίου 2023

Παράδειγμα 1. Φέρτε τον παρακάτω επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

Ποιες είναι οι ελεύθερες και ποιες οι βασικές μεταβλητές?

Λύση.

Στα παρακάτω μία γραμμοπράξη της μορφής $\Gamma_i := \Gamma_i - \lambda\Gamma_j$ σημαίνει ότι από την γραμμή i αφαιρώ λ φορές τη γραμμή j. Επίσης, $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ σημαίνει οτι εναλλάσω την i-οστή με τη j-οστή γραμμή.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & \underline{3} & -6 & 6 & 4 & -5 \\ \underline{3} & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ \underline{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}$$

(εναλλάσουμε γραμμές για να έρθει μια γραμμή με τον αριστερότερο οδηγό πρώτη)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \frac{1}{3}\Gamma_1}$$

(διαιρούμε με $1/3$ για να κάνουμε τον οδηγό της δεύτερης γραμμής 0, θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει αυτή την πράξη τελευταία, στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αλλά διευκολύνονται οι πράξεις αν το κάνουμε τώρα)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 + -3\Gamma_1}$$

(θέλουμε να κάνουμε όλη τη στήλη κάτω από τον πρώτο οδηγό ίση με 0, άρα ξεκινάμε αφαιρόντας το κατάλληλο πολλαπλάσιο για να μηδενιστεί το τριάρι)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

(ξεχνάμε την πρώτη γραμμή και διαιρούμε με $1/2$ για να κάνουμε τον οδηγό της δεύτερης γραμμής 0 - θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει αυτή την πράξη τελευταία, στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αλλά διευκολύνονται οι πράξεις αν το κάνουμε τώρα)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & \underline{1} & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & \underline{3} & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_3:=\Gamma_3-3\Gamma_2}$$

(κάνουμε την στήλη κάτω από τον οδηγό της δεύτερης γραμμής όλη 0 και φτάνουμε σε κλιμακωτή μορφή)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_2-\Gamma_3}$$

(κάνουμε τη στήλη πάνω από τον *δεξιότερο* οδηγό ίση με 0 - πρώτα μηδενίζουμε το 1)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_2:=\Gamma_1-2\Gamma_3}$$

(μετά μηδενίζουμε το 2)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 4 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_1:=\Gamma_1+3\Gamma_2}$$

(κάνουμε τη στήλη πάνω από τον επόμενο οδηγό ίση με 0 - μηδενίζουμε το -3)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Ας ονομάσουμε τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Οι βασικές μεταβλητές είναι οι στήλες στις οποίες υπάρχει οδηγός (είπαμε ότι κάθε στήλη λόγω της ιδιότητας της σκάλας περιέχει το πολύ έναν οδηγό) και άρα είναι οι x_1, x_2, x_5. Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι υπόλοιπες, δηλαδή οι $x_3, x4$.

Παράδειγμα 2.
Λύστε το σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & 15 \end{array}\right]$$

Λύση.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 & 15 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_3 := \Gamma_3 - 2\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \end{array}\right] \Rightarrow_{\Gamma_3 := \Gamma_3 - 2\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Εφόσον βρεθήκαμε σε μια κατάσταση με εξίσωση $0 = 1$ (τελευταία γραμμή), το σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα 3.

Φέρτε τον παρακάτω επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή κάνοντας απαλοιφή Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 9 & -20 & 22 & -13 & 26 & 28 \\ 6 & -16 & 20 & -14 & 14 & 24 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

Συζήτηση επί του παραδείγματος.

Αυτός είναι ο πίνακας του πρώτου παραδείγματος συν δύο ακόμη γραμμές, τις $[3, -7, 8, -5, 8, 9]$ και $[9, -20, 22, -13, 26, 28]$.

Οι επιπρόσθετες γραμμές επιλέχθηκαν έτσι ώστε $\Gamma_4 = \Gamma_2 + \Gamma_5$ και $\Gamma_3 = \Gamma_1 + 2\Gamma_2 + \Gamma_5$.

Αυτό σημαίνει ότι η τρίτη και η τέταρτη εξίσωση είναι *περιττές*, δηλαδή μπορούμε να τις παράξουμε προσθέτοντας την πρώτη, δεύτερη και πέμπτη εξίσωση. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα του πρώτου παραδείγματος. Όταν κάνετε απαλοιφή Gauss θα προκύψουν λοιπόν δύο γραμμές που είναι μόνο μηδενικά και οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο ταυτοτικές εξισώσεις $(0 = 0)$, τις οποίες μπορείτε να αφαιρέσετε από τον επαυξημένο πίνακα.