Πανεπιστημιο Αθηνων, Γραμμικη Αλγεβρα
Ενδεικτικα Προβληματα στις πρωτες 6 διαλεξεις

Πρόβλημα 1. Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Απαντήστε τα κατώθι ερωτήματα.
α) Να γράψετε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος.
β) Να γράψετε το πιο πάνω σύστημα σαν διανυσματική εξίσωση.
γ) Να γράψετε το σύστημα στη μορφή $Ax = \beta$ για κάποιον πίνακα A και κάποιο διάνυσμα β. Ποιες είναι οι διαστάσεις των A, β;
δ) Να φέρετε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές έχει; Ποιος είναι ο βαθμός του πίνακα;
ε) Η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ για τον πίνακα A του ερωτήματος γ) είναι επί;
ζ) Να φέρετε τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και να περιγράψετε τις λύσεις του συστήματος, ενδεχομένως σε παραμετρική μορφή.
η) Εξετάστε αν η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι 1-1, όπου A ο πίνακας του ερωτήματος γ).
ϑ) Έστω $a_1, a_2, \ldots$ οι στήλες του πίνακα A του ερωτήματος γ). Έστω C το σύνολο που περιέχει όλα τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

έτσι ώστε $0 = c_1 \cdot a_1 + c_2 a_2 + \ldots$ (το 0 στο αριστερό μέλος είναι το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$). Εκφράστε το C ως τη γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων, όσων και των ελεύθερων μεταβλητών που αντιστοιχούν στον πίνακα A.

Πρόβλημα 2. Λύστε τα συστήματα

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 8 \\ x - y + 3z = 9 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x - y + 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι τα τρία συστήματα έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών, άρα η απαλοιφή Gauss θα κάνει τα ίδια βήματα κι κατά συνέπεια μπορούμε να τα λύσουμε και τα 3 ταυτόχρονα, φτιάχνοντας έναν επαυξημένο πίνακα με τρεις αντί για 1 στήλη μετά την κάθετη γραμμή.

Πρόβλημα 3. Έστω τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}$$

α) Εξηγήστε γιατί αυτά τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα και εκφράστε ένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων τριών.
β) Αφού λύσετε το α) και γράψετε κάποιο διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων, αγνοήστε το και μείνετε με τρία διανύσματα. Εξετάστε αν αυτά τα 3 διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή όχι και στην περίπτωση που είναι γράψτε ένα από τα τρία διανύσματα ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο.

Πρόβλημα 4. Έστω τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix}3\\2\\-4\end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix}-6\\1\\7\end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix}0\\-5\\2\end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix}5\\5\\5\end{bmatrix}$$

α) Είναι τα διανύσματα u, v γραμμικώς ανεξάρτητα; Τα διανύσματα u, w; Τα διανύσματα u, z; Τα διανύσματα v, w ; Τα διανύσματα v, z; Τα διανύσματα w, z;
β) Κάποιος βιαστικός συμφοιτητής σας είπε ότι αν όλα τα ζεύγη διανυσμάτων μεταξύ των u, v, w, z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και όλα τα u, v, z, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συμφωνείτε ;
γ) Κάποιος συμφοιτητής σας ήθελε να ελέγξει αν τα διανύσματα u, v, z, w είναι γραμμικώς εξαρτημένα και ισχυρίστηκε με περίσσια θέρμη ότι αρκεί να ελέγξει αν το w είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων τριών. Έχει δίκιο;
δ) Τελικά, είναι τα διανύσματα u, v, z, w γραμμικώς εξαρτημένα;

Πρόβλημα 5. Έστω

$$A = \begin{bmatrix}1 & -3\\3 & 5\\-1 & 7\end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} b = \begin{bmatrix}3\\2\\-5\end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$$

και έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$.
α) Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με τι ισούται τα m και n ;
β) Βρείτε την εικόνα του u υπό την T, κοινώς το $T(u)$.
γ) Να βρεθεί ένα x (αν υπάρχει) έτσι ώστε η εικόνα του x υπό την T να ισούται με b.
δ) Υπάρχουν περισσότερα από δύο x ώστε η εικόνα τους υπό την T να ισούται με b;
(ε) Είναι η T επί στον $\mathbb{R}^3$;
(ζ) Είναι το διάνυσμα c στο πεδίο τιμών της T, δηλαδή υπάρχει x ώστε $T(x) = c$;

Πρόβλημα 6. Έστω η απεικόνιση

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

δηλαδη $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
α) Με τι ισούται το m και με τι το n;
β) Εξηγήστε γιατί η απεικόνιση T είναι γραμμική.
γ) Βρείτε έναν πίνακα A ώστε $T(x) = Ax$.
Υπενθύμιση: Το διάνυσμα $e_i \in \mathbb{R}^n$ έχει 1 στην i-οστή του συντεταγμένη και 0 οπουδήποτε αλλού. Υπάρχουν ακριβώς n τέτοια διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Για να βρω τον πίνακα της T αρκεί να βρω τα $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$ και να φτιάξω τον πίνακα με στήλες αυτά τα διανύσματα.

Πρόβλημα 7. Έστω η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία ικανοποιεί

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Εξηγήστε γιατί η T είναι γραμμική και γράψτε την T ως $T(x) = Ax$ για κάποιον πίνακα A. Τι σας θυμίζει αυτή η απεικόνιση; Δεν στέλνει το σημείο (x, y) στο συμμετρικό του ως προς την ευθεία $y = x$;

Πρόβλημα 8. Έστω η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η οποία στέλνει ένα σημείο (x, y) στο συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$. Γιατί η T είναι γραμμική απεικόνιση; Γράψτε τον πίνακα A ο οποίος αντιστοιχεί στην T. Το ίδιο με την T' η οποία στέλνει ένα σημείο (x, y) στο συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$.