- Γραμμική Άλγεβρα – 6 πρώτες διαλέξεις

Πρόβλημα 1

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

α) Να γράψετε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -4 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

β) Να γράψετε το παραπάνω σύστημα σαν διανυσματική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

γ) Να γράψετε το σύστημα στη μορφή Ax=β για κάποιον πίνακα A και κάποιο διάνυσμα β. Ποιές είναι οι διαστάσεις των A, β;

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\substack{A \\ (3\times 4)}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\substack{x \\ (4\times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{\substack{\beta \\ (3\times 1)}} \rightsquigarrow \boxed{Ax=\beta}$$

δ) Να φέρετε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Πόσες βασικές και πόσες ελεύθερες μεταβλητές έχει; Ποιός είναι ο βαθμός του πίνακα;

Για να φέρουμε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή, εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & -4 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 := \Gamma_1]{\Gamma_1 := \Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_1 := -\Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3 + \Gamma_2]{\Gamma_1 := \Gamma_1 + \Gamma_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & +1 & +2 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι -από την παραπάνω κλιμακωτή μορφή του πίνακα- έχουμε 2 βασικές και 2 ελεύθερες μεταβλητές. Δεδομένου ότι ο βαθμός του πίνακα είναι ίσος με το πλήθος των βασικών μεταβλητών, ο πίνακας είναι 2ου βαθμού.

ε) Η γραμμική απεικόνιση $T(x)=Ax$ για τον πίνακα του ερωτήματος (γ) είναι επί;

Όχι, διότι ο βαθμός του είναι 2, και άρα μικρότερος από το πλήθος των γραμμών.

ζ) Να φέρετε τον επαυξημένο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και να περιγράψετε τις λύσεις του συστήματος, ενδεχομένως σε παραμετρική μορφή.

Από το ερώτημα δ, έχουμε:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Έχουμε: $x_1 + 3x_3 - x_4 = -3 \Leftrightarrow x_1 = x_4 - 3x_3 - 3$

$x_2 + 2x_3 - x_4 = -2 \Leftrightarrow x_2 = x_4 - 2x_3 - 2$

Άρα,
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_3} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_4} x_4 + \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

η) Εξετάστε αν η απεικόνιση $T(x)=Ax$ είναι (1-1), όπου A ο πίνακας του ερωτήματος γ.

Η απεικόνιση $T(x) = Ax$ δεν είναι (1-1) διότι οι στήλες του A δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

δ) $C = span\{\vec{a}_3, \vec{\alpha}_4\}$

Πρόβλημα 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1 := 2\Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 15 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

1º σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 15 \\ -2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 6 \end{aligned}$$

3º σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 1 \\ -2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 1/2 \\ x_1 &= 1/2 \end{aligned}$$

2º σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= -1 \\ -2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= -1/2 \\ x_1 &= -1/2 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_1 \quad \vec{\alpha}_2 \quad \vec{\alpha}_3 \quad \vec{\alpha}_4$$

α) Εξηγήστε γιατί αυτά τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα και να εκφράσετε ένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων τριών.

$$\begin{bmatrix}1&4&2&5\\2&5&1&7\\3&6&0&9\end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix}1&4&2&5\\0&-3&-3&-3\\0&-6&-6&-6\end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3/-6]{\Gamma_2 := \Gamma_2/-3}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}1&4&2&5\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{bmatrix}1&4&2&5\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&4&2&5\\0&1&1&1\end{bmatrix} \; (*)$$

Υπάρχουν 2 οδηγοί, άρα 2 βασικές μεταβλητές αντί για τρείς, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

$$(*) \; \left[\begin{array}{cccc|c}1&4&2&5&0\\0&1&1&1&0\end{array}\right] \xRightarrow{\Gamma_1 : \Gamma_1 - 4\Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&1&0\\0&1&1&1&0\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x_3 - x_4\\-x_3 - x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\1\\0\end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{bmatrix} x_4$$

$$x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3 + x_4 \cdot \vec{a}_4 = \vec{0} \quad (1)$$

Για $x_3 = 1$ και $x_4 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -2$

Άρα (1) $\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = 0$

Δηλαδή ένα διάνυσμα $\vec{a}_4$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, ως εξής

$$\vec{a}_4 = -\vec{a}_1 - \vec{a}_3 + 2\vec{a}_2$$

β) Αφού λύσετε το (α) και γράψετε κάποιο διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων, αγνοήστε το και μείνετε με 3 διανύσματα. Εξετάσετε αν αυτά τα 3 διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή όχι και στη συνέχεια, στην περίπτωση που είναι, να γράψετε ένα από τα τρία διανύσματα ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο.

Αγνοώντας το $\vec{a}_4$, μένουμε με τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$. Εξετάζουμε εαν αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή ανεξάρτητα.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3 - 2\Gamma_2]{\Gamma_2 := \Gamma_2 / -3} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circledast$$

Παρατηρούμε ότι επειδή οι βασικές μεταβλητές είναι 2 και όχι 3, ότι τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

$$\circledast \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1 : \Gamma_1 - 4\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$

$$x_1 \cdot \vec{a}_1 + x_2 \cdot \vec{a}_2 + x_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0} \quad (1)$$

Για $x_3 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

Άρα $(1) \Longrightarrow 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = 0$

Δηλαδή $\vec{a}_2 = \vec{a}_3 + 2\vec{a}_1$

Πρόβλημα 4. Έστω τα διανύσματα

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

α) Είναι τα διανύσματα u, v γραμμικώς ανεξάρτητα; Τα διανύσματα u, w; Τα διανύσματα u, z; Τα διανύσματα v, w ; Τα διανύσματα v, z; Τα διανύσματα w, z;
Απάντηση. Ο τρόπος να ελέγχξουμε γραμμική ανεξαρτησία είναι να φτιάξουμε τον πίνακα με στήλες αυτά τα δύο διανύσματα και να κάνουμε απαλοιφή Gauss και να δούμε αν όλες οι μεταβλητές είναι βασικές. Όταν έχουμε δύο διανύσματα ωστόσο (διάφορα του μηδενικού διανύσματος, στην οποία περίπτωση πάντα είναι γραμμικώς εξαρτημένα) μπορούμε πιο απλά να ελέγξουμε γραμμική εξάρτηση κοιτώντας αν ισχύει η σχέση $u = cv$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Αυτό είναι πιο γρήγορο από το να κάνουμε απαλοιφή Gauss. Στην προκειμένη, θα έπρεπε να έχουμε $3c = -6, 2c = 1$ και $-4c = 7$ το οποίο δεν γίνεται, άρα u, v γραμμικώς ανεξάρτητα. Ενδεικτικά, κοιτάμε και το ζεύγος z, v: η σχέση $z = c \cdot v$ θα έδινε $5 = -6c, 5 = c, 5 = 7c$ και εφόσον δεν υπάρχει τέτοιο $c \in \mathbb{R}$ αυτό σημαίνει ότι z, v γραμμικώς ανεξάρτητα. Τα υπόλοιπα είναι όμοια.

β) Κάποιος βιαστικός συμφοιτητής σας είπε ότι αν όλα τα ζεύγη διανυσμάτων μεταξύ των u, v, w, z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και όλα τα u, v, z, w είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συμφωνείτε ;
Απάντηση. Δεν ισχύει αυτό, διότι 4 διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα, οπότε ακόμη κι αν ανά τρία να ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα τότε δεν είναι όλα μαζί γραμμικώς ανεξάρτητα. Επιπρόσθετη παρατήρηση: Μπορώ να φτιάξω ένα οσοδήποτε μεγάλο σύνολο διανυσμάτων , ήδη στον $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε ανά δύο να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά ανά 3 να είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Πως ;

γ) Κάποιος συμφοιτητής σας ήθελε να ελέγξει αν τα διανύσματα u, v, z, w είναι γραμμικώς εξαρτημένα και ισχυρίστηκε με περίσσια θέρμη ότι αρκεί να ελέγξει αν το w είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων τριών. Έχει δίκιο;
Απάντηση. Ο συμφοιτητής σας κάνει λάθος. Η γραμμική εξάρτηση σημαίνει ότι **υπάρχει** ένα διάνυσμα το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, αλλά ο ίδιος εμμέσως ισχυρίστηκε ότι γραμμική εξάρτηση σημαίνει ότι '*κάθε* διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων' (και άρα αρκεί να κοιτάξω ένα αυθαίρετα), το οποίο δεν ισχύει. Παραδείγματος χάρην, τα διανύσματα $e_1, e_2, 2e_2, 3e_2, 4e_2, 5e_2, 6e_2, \ldots$ είναι ασφαλώς γραμμικώς εξαρτημένα, αλλά το e_1 **δεν είναι** γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων – όλα τα υπόλοιπα είναι ωστόσο. Υπό μια άλλη οπτική, το e_1 στο προηγούμενο παράδειγμα είναι απαραίτητο για να διατηρηθεί η γραμμική θήκη ίδια και άρα δεν μπορούμε να το πετάξουμε.

δ) Τελικά, είναι τα διανύσματα u, v, z, w γραμμικώς εξαρτημένα;
Απάντηση. Όπως προείπαμε, τέσσερα διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.

Πρόβλημα 5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

και έστω η γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$

α) Αν $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, με τι ισούται το m και n;

$m=3$ και $n=2$

β) Βρείτε την εικόνα του u υπό την T, κοινώς το $T(u)$

$$T(u) = A \cdot u = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

γ) Να βρεθεί ένα x (αν υπάρχει) έτσι ώστε η εικόνα του x υπό την T να ισούται με b.

Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $\exists x$: $T(x)=b$ και επειδή $T(x)=Ax$ $\Rightarrow Ax=b$

Κάνουμε τον επαυξημένο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 = \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Άρα έχουμε ότι $\left.\begin{array}{r} x_1 - 3x_2 = 3 \\ 2x_2 = -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x_2 = -1/2 \\ x_1 = +3/2 \end{array}$

Συνεπώς, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

δ) Υπάρχουν περισσότερα από 2 x ώστε η εικόνα τους υπό την T να ισούται με b;

Όχι, όπως φαίνεται από το ερώτημα (γ).

ε) Είναι η T επί στον $\mathbb{R}^3$;

Η T δεν είναι επί στον $\mathbb{R}^3$ διότι $m=3$ και έχει 2 βασικές μεταβλητές.

γ) Είναι το διάνυσμα c στο πεδίο τιμών της T, δηλαδή, υπάρχει x: T(x)=c;

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει x: $Ax = c$.

Δηλαδή ότι ο πίνακας (επαυξημένος) της $Ax=c$ να έχει λύσεις:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 := \Gamma_3 + \Gamma_1]{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 := \Gamma_3 (7/2)}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 14 & 28 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 := \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 35 \end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα
είναι αδύνατο. Άρα $\nexists x: Ax=c$.

Πρόβλημα 6

α) Με τι ισούται το m και το n;
$m=3$ και $n=4$

β) Εξηγήστε γιατί η απεικόνιση T είναι γραμμική:

$$T(x) = A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x$$

Πρόβλημα 6. Έστω η απεικόνιση

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

δηλαδη $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
α) Με τι ισούται το m και με τι το n;
Απάντηση. Το m ισούται με 4 και το n ισούται με 4, εφόσον παίρνει διανύσματα μήκους 4 και τα στέλνει σε διανύσματα μήκους 4.

β) Εξηγήστε γιατί η απεικόνιση T είναι γραμμική.
Απάντηση. Ένας τρόπος είναι να ελέγξουμε τις ιδιότητες όπως κάναμε στο φροντιστήριο. Εναλλακτικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $T(x) = Ax$ για

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

γ) Βρείτε έναν πίνακα A ώστε $T(x) = Ax$.
Υπενθύμιση: Το διάνυσμα $e_i \in \mathbb{R}^n$ έχει 1 στην i-οστή του συντεταγμένη και 0 οπουδήποτε αλλού. Υπάρχουν ακριβώς n τέτοια διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Για να βρω τον πίνακα της T αρκεί να βρω τα $T(e_1), T(e_2), \ldots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$ και να φτιάξω τον πίνακα με στήλες αυτά τα διανύσματα.
Απάντηση. Κοιτώντας τα $T(e_1), T(e_2), T(e_3), T(e_4)$ θα βρούμε τον ίδιο πίνακα A όπως στο ερώτημα β).

Πρόβλημα 7

Έστω η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, η οποία ικανοποιεί:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Εξηγήστε γιατί η T είναι γραμμική και γράψτε την T ως $T(x)=Ax$ για κάποιον πίνακα A. Τι σας θυμίζει αυτή η απεικόνιση; Δεν στέλνει το σημείο (x,y) στο συμμετρικό του ως προς την ευθεία $y=x$;

Εξετάζουμε την ισχύ των ιδιοτήτων προκειμένου να δείξουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι γραμμική.

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

1) $T(\vec{a}_1+\vec{a}_2) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T(\vec{a}_1) + T(\vec{a}_2)$

2) $T(\lambda \vec{a}_1) = T\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda x_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \lambda T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = \lambda T(\vec{a}_1)$

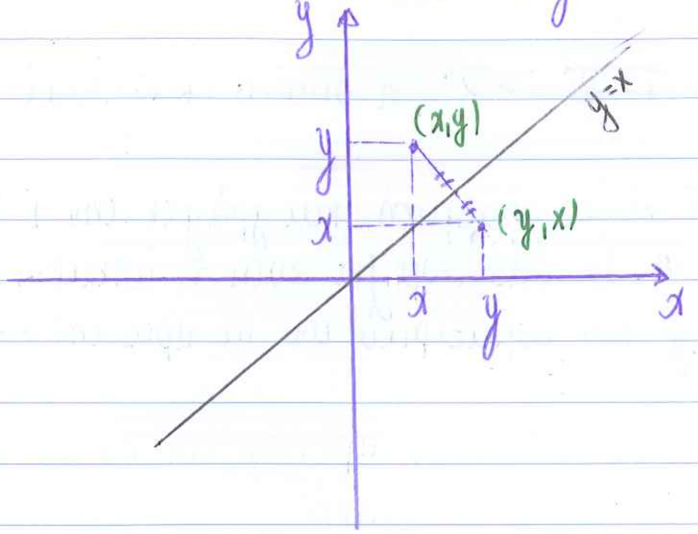
Συνεπώς, εφόσον ισχύουν και οι δύο ιδιότητες, έχουμε ότι η απεικόνιση είναι γραμμική.

→ Μπορούμε να εκφράσουμε το $T(x)=Ax$ ως εξής:

- $T(e_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $T(e_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Άρα $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$

Παρατηρούμε ότι η $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ στέλνει το διατεταγμένο ζεύγος (x,y) στο συμμετρικό του, (y,x), ως προς την διχοτόμο του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου, $y=x$.



Πρόβλημα 8

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, η οποία στέλνει ένα σημείο (x,y) στο συμμετρικό του ως προς τον άξονα $y'y$. Γιατί η T είναι γραμμική απεικόνιση;

$\rightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

Εξετάζουμε την ισχύ των ιδιοτήτων για να επαληθεύσουμε ότι η απεικόνιση είναι γραμμική.

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{a_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ και $\vec{a_2} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

1) $T(\vec{a_1}+\vec{a_2}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1-x_2 \\ y_1 \ \ y_2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T(\vec{a_1}) + T(\vec{a_2})$

2) $T(\lambda \vec{a_1}) = T\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \lambda T(\vec{a_1})$.

Άρα εφόσον ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, η απεικόνιση είναι γραμμική.

Επιπλέον, ισχύει ότι $T(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A.} \cdot x$

Γράψτε το ίδιο και για την T', η οποία στέλνει ένα σημείο (x,y), στο συμμετρικό του ως προς τον άξονα $x'x$.

$$\longrightarrow T'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Εξετάζουμε την ισχύ των ιδιοτήτων για να επαληθεύσουμε ότι η απεικόνιση είναι γραμμική.

Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ και $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

1) $T'(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = T'\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T'\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -y_1 - y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ -y_2 \end{bmatrix} =$

$= T'\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + T'\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T'(\vec{a}_1) + T'(\vec{a}_2).$

2) $T'(\lambda \vec{a}_1) = T'\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) = T'\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ -\lambda y_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix} = \lambda T'(\vec{a}_1).$

Συνεπώς, εφόσον ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες, η απεικόνιση είναι γραμμική.

Επιπλέον, ισχύει ότι $T'(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A'} \cdot x.$