

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Επαναληπτική Εξέταση 2024, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ονοματεπώνυμο:

ΑΜ:

Θέμα 1. [2 μονάδες] Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

1. Η διανυσματική εξίσωση $x_1a_1 + \dots + x_na_n = \beta$, όπου $a_1, a_2, \dots, a_n$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^m$ είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα με n μεταβλητές και m εξισώσεις.

(α) Σωστό β) Λάθος

2. Ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με r ελεύθερες μεταβλητές έχει σύνολο λύσεων το οποίο ισούται με τη γραμμική θήκη r διανυσμάτων.

α) Σωστό β) Λάθος

3. Η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης ισούται με το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων του V τα οποία παράγουν όλο το χώρο.

(α) Σωστό β) Λάθος

4. Αν ο $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχει 2 διακριτές ιδιοτιμές τότε και ο A^2 έχει δύο διακριτές ιδιοτιμές.

α) Σωστό β) Λάθος

5. Υπάρχουν $C \in \mathbb{R}^{60 \times 5}$ και $A \in \mathbb{R}^{5 \times 60}$ με CA αντιστρέψιμο.

α) Σωστό β) Λάθος

6. Το γινόμενο $A^T x$ με $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A .

(α) Σωστό β) Λάθος

7. Η γραμμική θήκη $\text{span}\{u, v, w\}$ για οποιαδήποτε τρία διανύσματα u, v, w σε έναν διανυσματικό χώρο V είναι υποχώρος του V .

(α) Σωστό β) Λάθος

8. Αν $u_1, u_2, \dots, u_n$ γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα σε έναν διανυσματικό χώρο V τότε σίγουρα το u_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων $n - 1$.

α) Σωστό β) Λάθος

9. Το σύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z^2 = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{R}^3$.

α) Σωστό β) Λάθος

10. Το σύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_2^3 : x + y + z^2 = 0\}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathbb{F}_2^3$. Υπενθύμιση ότι το σώμα $\mathbb{F}_2$ είναι το σύνολο $\{0, 1\}$ όπου η πρόσθεση είναι το αποκλειστικό Ή (xor) και ο πολλαπλασιασμός το λογικό ΚΑΙ.

(α) Σωστό β) Λάθος

Θέμα 2. [4 μονάδες] Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

1. Σε έναν πίνακα A ο βαθμός ισούται πάντα με
 - α) Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών
 - β) Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών
 - γ) Το πλήθος των οδηγών στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A
 - δ) Όλα τα παραπάνω.

2. Η τομή των υπερεπιπέδων $\{(x, y, z, w) : x + 2y - z = 0\}$ και $\{(x, y, z, w) : 3x - 3y + z = 0\}$ είναι

- α) μια ευθεία στον $\mathbb{R}^4$
- β) ένα υποχώρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 2
- γ) ένας κύκλος που περνάει από την αρχή των αξόνων
- δ) η γραμμική θήκη τριών διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^4$

3. Η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ισούται με

- α) 0
- β) -2
- γ) 2
- δ) 1

4. Το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ισούται με

α)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

β)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

γ)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

δ)

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Αν A αντιστρέψιμος και $A^{100} = A^{99}$ τότε

α) $A = I$

β) $A = 0$

γ) $A^{-1} = 0$

ε) Δεν μπορούμε να ξέρουμε ποιος είναι ο A

6. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες ξέρουμε σίγουρα ότι

α) Ο βαθμός του είναι n

β) Ο βαθμός του είναι m

γ) Και οι γραμμές του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες

δ) Έχει m οδηγούς στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του.

7. Ο διανυσματικός χώρος $W := \{A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} | A_{13} = A_{22} = A_{44} = A_{31} = 0\}$, όπου A_{ij} συμβολίζει το στοιχείο του πίνακα A στη γραμμή i και στήλη j , έχει διάστασης

α) 4

β) 16

γ) 12

δ) 6

8. Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ισχύει ότι

α) $T(x) = Ax$ για κάποιον $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

β) $T(x) = Ax$ για κάποιον $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και ο A αντιστρέψιμος

γ) $T(0) = 0$ όπου το πρώτο 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$ και το δεύτερο το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$.

δ) $T(0) = 0$ όπου το πρώτο 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και το δεύτερο το μηδενικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$.

9. Ο αντίστροφος ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ υπάρχει όταν

α) Οι γραμμές του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες

β) Οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες

γ) Ο βαθμός του ισούται με 4

δ) Όλα τα παραπάνω

10. Αν οι πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ έχουν ορίζουσα 3 και -3 αντίστοιχα, τότε ο πίνακας $AB^{-1}AB^{-1}$ έχει ορίζουσα

α) 1

γ) -81

γ) 81

δ) 9

Θέμα 3. [3 μονάδες] Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

α) Είναι ο A αντιστρέψιμος; Είναι η απεικόνιση $T(x) = Ax$ επί στον $\mathbb{R}^3$; Ισχύει ότι ο μηδενοχώρος του A έχει διάσταση τουλάχιστον 1;

β) Να συμπληρωθεί η μορφή του πίνακα $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου Λ είναι ο πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές του A στη διαγώνιο (εφόσον αυτό γίνεται). (Να εξηγηθεί η διαδικασία και οι πράξεις για την εύρεση των P, P^{-1} να γίνουν στο πρόχειρο).

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_\Lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{P^{-1}}$$

γ) Να υπολογισθεί ο πίνακας $A^{25} + A^3 + A^{1821}$.

Απάντηση:

α) Ο A έχει δύο ίδιες στήλες, άρα δεν γίνεται να είναι αντιστρέψιμος (γραμμικώς εξαρτημένες στήλες). Η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ δεν είναι επί εφόσον ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Ο μηδενοχώρος έχει διάσταση τουλάχιστον 1 (πχ το διάνυσμα $[1, 0, -1]^T$ ανήκει στον μηδενοχώρο).

β) Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ με ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή: $p(\lambda) = (-1 - \lambda)((\frac{1}{2} - \lambda)^2 - (\frac{1}{2})^2) = -(\lambda + 1)\lambda \cdot (1 - \lambda)$. Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του $p(\lambda)$ άρα οι $-1, 0, 1$. Εφόσον όλες είναι διακριτές, A διαγωνιοποιήσιμος και εφόσον A συμμετρικός υπάρχει P ώστε $A = P\Lambda P^T$. Βρίσκω τους μηδενοχώρους που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή:

$$\text{Null}(A + I) = \text{span}\{[0, 1, 0]^T\},$$

$$\text{Null}(A - I) = \text{span}\{[1, 0, 1]^T\}$$

$$\text{Null}(A) = \text{span}\{[-1, 0, 1]^T\}.$$

Παίρνω ένα ιδιοδιάνυσμα από κάθε μηδενοχώρο, το κανονικοποιώ (διαιρώντας το με τη ρίζα του εσωτερικού γινομένου με τον εαυτό του, βλέπε τρίτη σειρά ασκήσεων) έτσι να φτιάξω τις στήλες του P . Τότε υπάρχει η εγγύση ότι $P^{-1} = P^T$. Βάζω τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο του Λ στη σωστή σειρά.

γ) Γνωρίζουμε ότι $A^\kappa = P\Lambda^\kappa P^{-1}$ και εφόσον οι ιδιοτιμές είναι $-1, 0, 1$ έχουμε $\Lambda^\kappa = \Lambda$ αν κ περιττός. Άρα το ζητούμενο άθροισμα ισούται με $3P\Lambda P^{-1} = 3A$.

Θέμα 4. [2 μονάδες] Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

α) [0, 5 μονάδες] Να αποδειχθεί ότι $AA^T = 0$ συνεπάγεται $A = 0$. Να αποδειχθεί ομοίως ότι $A^T A = 0$ συνεπάγεται $A = 0$ (στις προαναφερθείσες εξισώσεις 0 είναι ο $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει παντού μηδενικά).

β) $[0, 5 \text{ μονάδες}]$ Αν $B^2 + (B^T)^2 = BB^T + B^T B$ να αποδειχθεί ότι ο B είναι συμμετρικός, δηλαδή $B = B^T$.

γ) $[0, 5 \text{ μονάδες}]$ Έστω $W := \{C \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid C^2 + (C^T)^2 = -CC^T - C^T C\}$. Να αποδειχθεί ότι το W είναι διανυσματικός χώρος και να βρεθεί η διάστασή του.

δ) $[0, 5 \text{ μονάδες}]$ Να δειχθεί ότι η συνθήκη $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι απαραίτητη για να ισχύει η συνεπαγωγή του ερωτήματος α). Με άλλα λόγια, να βρείτε ένα σώμα K , έναν αριθμό n και έναν πίνακα $A \in K^{n \times n}$ έτσι ώστε $AA^T = 0$ αλλά $A \neq 0$.

Απάντηση:

α) Προκύπτει άμεσα από το Πρόβλημα 5 της Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων. Πιο αναλυτικά, έχουμε ότι το $(AA^T)_{ii}$ ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i -οστής γραμμής του A με τον εαυτό της και άρα με το άθροισμα των τετραγώνων αυτής της γραμμής. Οπότε, εφόσον $(AA^T)_{ii} = 0$ πρέπει όλη η i -οστή γραμμή να ισούται με 0. Εφόσον ισχύει για κάθε i , έχουμε $A = 0$. Όμοια όταν $A^T A = 0$, ή πιο απλά εφαρμόζουμε το προηγούμενο στον $A' := A^T$.

β) Η συνθήκη ισοδυναμεί με $(B - B^T)^2 = 0$. Ωστόσο, από εδώ **δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $B - B^T = 0$ (δεν ισχύει $X^2 = 0 \Rightarrow X = 0$ σε πίνακες). Αντί αυτού, την γράφουμε $(B - B^T)^T(B - B^T) = 0$ και εφαρμόζουμε το α) στον πίνακα $B - B^T$ για να πάρουμε $B - B^T = 0$.

γ) Παρόμοια η συνθήκη γράφεται $(C + C^T)^T(C + C^T) = 0$ και άρα για τον ίδιο λόγο έχουμε $C = -C^T$ και έτσι $W = \{C \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid C = -C^T\}$. Επαληθεύουμε ότι ισχύουν ιδιότητες του διανυσματικού χώρου ($0 \in W$, κλειστότητα ως προς πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό κλπ). Η συνθήκη $C = -C^T$ σημαίνει ότι $C_{ii} = 0$ και $C_{ij} = -C_{ji}$ για $i \neq j$. Μια βάση του χώρου είναι η συλλογή πινάκων $\{E^{(i,j)}\}_{i < j}$ με $E^{(i,j)}$ να έχει 1 στη θέση (i,j) , -1 στη θέση (j,i) και 0 οπουδήποτε αλλού. Άρα η διάσταση του W είναι $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

δ) Παίρνουμε $K = \mathbb{F}_2$ (το σύνολο $\{0, 1\}$ με πρόσθεση το αποκλειστικό Ή και πολλαπλασιασμό το λογικό ΚΑΙ) και παίρνουμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$