

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εξέταση Χειμερινού Εξαμήνου 2025, Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών

Ονοματεπώνυμο:

ΑΜ:

Θέμα 1. [2 μονάδες] Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

1. Η διανυσματική εξίσωση $x_1a_1 + \dots + x_na_n = \beta$, όπου $a_1, a_2, \dots, \beta$ διανύσματα στον $\mathbb{R}^m$ είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα με n μεταβλητές και n εξισώσεις.

α) Σωστό (β) Λάθος

2. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με k ελεύθερες μεταβλητές έχει $n - k$ βασικές μεταβλητές.

(α) Σωστό β) Λάθος

3. Η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης ισούται με το ελάχιστο πλήθος διανυσμάτων του V τα οποία παράγουν όλο το χώρο.

(α) Σωστό β) Λάθος

4. Για αντιστρέψιμο πίνακα A ισχύει ότι η ορίζουσα του είναι πάντα 1.

α) Σωστό (β) Λάθος

5. Για μια γραμμική απεικόνιση $T(x) = Ax$ ισχύει ότι ο πυρήνας της, δηλαδή το σύνολο $\{x : T(x) = 0\}$, είναι το ίδιο σύνολο με τον μηδενικό χώρο του A .

(α) Σωστό β) Λάθος

6. Το γινόμενο Ax με $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ και $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των γραμμών του A .

α) Σωστό (β) Λάθος

7. Δύο ευθείες στον $\mathbb{R}^3$ οι οποίες περνάνε από την αρχή των αξόνων αποτελούν διανυσματικό χώρο.

α) Σωστό (β) Λάθος

8. Το σύνολο $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$ είναι ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$.

(α) Σωστό β) Λάθος

9. Το σύνολο $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 2z = 0\}$ είναι ένα επίπεδο στον $\mathbb{R}^4$.

α) Σωστό (β) Λάθος

10. Αν σε ένα σύνολο 3 διανυσμάτων κανένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου, τότε είναι και τα 3 γραμμικώς ανεξάρτητα.

α) Σωστό (β) Λάθος

Θέμα 2. [4 μονάδες] Κυκλώστε τη σωστή απάντηση.

1. Η γραμμική θήκη τεσσάρων διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^4$ είναι

α) ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 4

β) ένα επίπεδο στο $\mathbb{R}^4$

γ) ένας διανυσματικός χώρος διάστασης από 0 ως 4, με όλες τις τιμές να είναι πιθανές

δ) όλο το $\mathbb{R}^4$.

2. Η τομή των υπερεπιπέδων $\{(x, y, z, w) : x + y + z = 0\}$ και $\{(x, y, z, w) : x - y + z = 0\}$ είναι

α) μια ευθεία στον $\mathbb{R}^4$

β) ένας κύκλος που περνάει από την αρχή των αξόνων

γ) η γραμμική θήκη τριών διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^4$

δ) ένα υποχώρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 2

3. Η ορίζουσα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ισούται με

α) 0

β) -2

γ) 2

δ) 1

4. Το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ισούται με

α)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

β)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

γ)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

δ)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος τότε

α) έχει σίγουρα το 0 σαν ιδιοτιμή

β) η απεικόνιση $T(x) = Ax$ είναι επί στον $\mathbb{R}^n$

- γ) οι στήλες του είναι γραμμικώς εξαρτημένες
 ε) $\det(A) = 0$

6. Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες ξέρουμε σίγουρα ότι

- α) Ο βαθμός του είναι n
 β) Ο βαθμός του είναι m
 γ) Και οι γραμμές του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες
 δ) Έχει m οδηγούς στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του.

7. Ένας πίνακας 10×10 με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς λέγεται 'περίπου Σουντόκου' αν κάθε στήλη και κάθε γραμμή έχει άθροισμα 0. Έστω W ο διανυσματικός χώρος όλων των περίπου Σουντόκου πινάκων. Ο W έχει διάσταση

- α) 90
 β) 80
 γ) 81
 δ) 82

8. Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ισχύει ότι

- α) $T(x) \neq T(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
 β) $T(x+y) \neq T(x) + T(y)$ για τουλάχιστον ένα ζεύγος $x, y \in \mathbb{R}^m$
 γ) $T(x) = Ax$ για κάποιον A του οποίου η i -οστή στήλη ισούται με $T(e_i)$, όπου e_i το διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με 1 στην i -οστή συντεταγμένη και 0 οπουδήποτε αλλού
 δ) $T(x) = Ax$ για κάποιον A του οποίου η i -οστή στήλη ισούται με $T(e_i)$, όπου e_i το διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$ με 1 στην i -οστή συντεταγμένη και 0 οπουδήποτε αλλού

9. Ο αντίστροφος ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ υπάρχει όταν

- α) Οι γραμμές του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες
 β) Οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες
 γ) Ο βαθμός του ισούται με 4
 δ) Όλα τα παραπάνω

10. Ο πίνακας $AA^T, A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ είναι

- α) συμμετρικός
 β) αντιστρέψιμος
 γ) μη αντιστρέψιμος
 δ) διάφορος του μηδενικού πίνακα

Θέμα 3. [3 μονάδες] Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

α) Είναι ο A αντιστρέψιμος; Είναι η απεικόνιση $T(x) = Ax$ επί στον $\mathbb{R}^3$; Ισχύει ότι ο μηδενοχώρος του A έχει διάσταση τουλάχιστον 1;

β) Να συμπληρωθεί η μορφή του πίνακα $A = P\Lambda P^{-1}$ όπου Λ είναι ο πίνακας που έχει τις ιδιοτιμές του A στη διαγώνιο (εφόσον αυτό γίνεται). (Να εξηγηθεί η διαδικασία και οι πράξεις για την εύρεση των P, P^{-1} να γίνουν στο πρόχειρο).

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & - & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & - & - \\ - & \frac{1}{\sqrt{2}} & - \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}}_\Lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & - \\ - & - & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & - & - \end{bmatrix}}_{P^{-1}}$$

γ) Να υπολογισθεί ο πίνακας $A^5 - A$.

Απάντηση.

Το πρόβλημα είναι τελείως ανάλογο με το Πρόβλημα 3 από το προηγούμενο διαγώνισμα. Οι ιδιοτιμές είναι $-1, 0, 1$ και ο πίνακας διαγωνιοποιήσιμος. Λόγω Caley-Hamilton ή λόγω διαγωνιοποιησιμότητας έχουμε $A^3 = A$ (το Caley-Hamilton δίνει $(A + I)(A - I)A = 0 \Rightarrow A^3 = A$). Άρα και $A^5 = A^3 \cdot A^2 = A \cdot A^2 = A^3 = A$.

Θέμα 4. [2 μονάδες] Έστω σώμα K και πίνακες $A, B \in K^{n \times n}$. Σκοπός είναι να αποδείξουμε ότι $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. Υπενθυμίζουμε ότι ένας χαρακτηρισμός του βαθμού ενός πίνακα είναι το πλήθος των βασικών του μεταβλητών, δηλαδή των οδηγών του όταν έρθει σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Ορίζουμε τον πίνακα $Q \in K^{2n \times 2n}$ ως

$$Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

όπου $0 \in K^{n \times n}$ ο πίνακας που έχει παντού το μηδενικό στοιχείο του K . Με άλλα λόγια, οι n πρώτες γραμμές του Q σχηματίζονται παίρνοντας τις γραμμές του A και γεμίζοντάς τις με n μηδενικά στο τέλος. Οι επόμενες n γραμμές του Q σχηματίζονται παίρνοντας τις γραμμές του B και γεμίζοντάς τις με n μηδενικά στην αρχή.

α) [0, 5 μονάδες] Ναδειχθεί ότι $\text{rank}(Q) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

β) [0, 5 μονάδες] Ναδειχθεί ότι ο Q έχει τον ίδιο βαθμό με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

γ) [0, 5 μονάδες] Ναδειχθεί ότι ο Q έχει τον ίδιο βαθμό με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A + B \end{pmatrix}$$

δ) [0, 5 μονάδες] Να αποδειχθεί η σχέση $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$.

Απάντηση.

α) Κάνουμε απαλοιφή Gauss φέρνοντας τον Q σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Παρατηρούμε ότι οι πράξεις που κάνουμε για να φέρουμε το πάνω αριστερά μπλοκ, το οποίο περιέχει τον A σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή

δεν επηρεάζουν το κάτω δεξιά κομμάτι, το οποίο περιέχει B , και αντίστροφα. Στο τέλος θα πάρουμε έναν πίνακα Q' ο οποίος ισούται με

$$\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

όπου A', B' οι ανηγμένες κλιμακωτές μορφές των A, B αντίστοιχα. Λόγω γραμμοπράξεων, το βαθμός του Q και του Q' είναι ίδιος. Το πλήθος των βασικών μεταβλητών του πίνακα αυτού είναι το άθροισμα τους πλήθους των βασικών μεταβλητών των πινάκων A', B' , εφόσον κάθε βασική τους μεταβλητή μπορεί να αντιστοιχιστεί σε μια βασική μεταβλητή του Q' λόγω της μπλοκ μορφής που έχει ο Q' . Ομως ο βαθμός ενός πίνακα είναι το πλήθος των βασικών του μεταβλητών, άρα το ζητούμενο έπεται.

β) Έστω Γ_i οι γραμμές του Q . Για κάθε i από 1 ως n κάνουμε $\Gamma_{i+n} := \Gamma_{i+n} + \Gamma_i$. Οι γραμμοπράξεις δεν αλλάζουν τον βαθμό του πίνακα και μετατρέπουν τον Q στον ζητούμενο πίνακα.

γ) Έστω Σ_i οι στήλες του πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος. Για κάθε i από 1 ως n κάνουμε $\Sigma_{i+n} := \Sigma_{i+n} + \Sigma_i$. Αυτές οι πράξεις δεν αλλάζουν τον βαθμό του πίνακα¹ και μετατρέπουν τον πίνακα του προηγούμενου ερωτήματος στον ζητούμενο πίνακα.

δ) Ο βαθμός ενός πίνακα ισούται και με το μέγεθος της μη μηδενικής υπο-ορίζουσας του. Ο πίνακας $A+B$ έχει βαθμό $\text{rank}(A+B)$ άρα έχει μια υπο-ορίζουσα αντίστοιχου μεγέθους. Ως υπο-πίνακας του πίνακα του ερωτήματος γ), η υπο-ορίζουσα του αυτή μεταφέρεται και στον πίνακα του ερωτήματος γ). Αυτό σημαίνει ότι ο βαθμός του πίνακα του ερωτήματος γ) είναι τουλάχιστον $\text{rank}(A+B)$. Λόγω των ερωτημάτων α), β), γ) ωστόσο, ο βαθμός του είναι ακριβώς $\text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. Το ζητούμενο έπεται.

¹Ο βαθμός δεν αλλάζει διότι δεν αλλάζει ο χώρος στηλών. Μπορεί κανείς εναλλακτικά να το δει εφαρμόζοντας τις αντίστοιχες γραμμοπράξεις στον ανάστροφο πίνακα, χρησιμοποιώντας ότι ένας πίνακας και ο ανάστροφός του έχουν τον ίδιο βαθμό. Κοινώς, αναστροφή, ίδιες γραμμοπράξεις με το προηγούμενο ερώτημα και πάλι αναστροφή.