Γραμμική Άλγεβρα, Περίληψη Μαθήματος

Ισοδυναμίες 1. Τα παρακάτω αναπαριστούν το ίδιο ακριβώς σύνολο.

- το σύνολο λύσεων συστήματος με m εξισώσεις και n μεταβλητές.
- το σύνολο λύσεων του $Ax = b$ με $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
- η τομή m υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$.
- το σύνολο της λύσεων διανυσματική εξίσωσης $x_1 \cdot a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = b$ όπου $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$

Ισοδυναμίες 2. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- $a_1, a_2, \ldots, a_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα
- κάποιο a_i γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων
- το μηδενικό διάνυσμα γράφεται με πάνω από έναν τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός των a_i
- η εξίσωση $Ax = 0$ όπου A έχει ως στήλες τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$, έχει πάνω από μία λύσεις (άρα άπειρες).

Ισοδυναμίες 3. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Τα παρακάτω είνα ισοδύναμα.

- το γινόμενο Ax είναι ένα διάνυσμα του οποίου η i-οστή εγγραφή ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A με το x.
- το γινόμενο Ax είναι *γραμμικός συνδυασμός* των στηλών του A, δηλαδή $Ax = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n$.

Ισοδυναμίες 4. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- ο A έχει k βασικές μεταβλητές (βαθμό ίσο με k).
- ο A έχει $n - k$ ελεύθερες μεταβλητές.
- το σύνολο $\{x : Ax = 0\}$ (μηδενοχώρος του A) ισούται με τη γραμμική θήκη $n - k$ γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων (έχει διάσταση $n - r$).

Λύση γραμμικών συστημάτων. Το σύνολο $\{x : Ax = b\}$ είτε είναι το κενό σύνολο είτε ισούται με

$$\text{span}\{a_1, a_2, \ldots, a_f\} + b',$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_f$ γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα, τόσα όσα και οι ελεύθερες μεταβλητές του A, και b' ένα σταθερό διάνυσμα. Με άλλα λόγια, κάθε λύση του συστήματος προκύπτει παίρνοντας έναν πιο οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό των $a_1, a_2, \ldots, a_f$ και προσθέτοντας το διάνυσμα b'. Το b' είναι το διάνυσμα των σταθερών όρων όταν φέρω τον επαυξημένο πίνακα $[A|b]$ σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Όταν $b = 0$ τότε και $b' = 0$.

Ισοδυναμίες 5. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- ο A είναι αντιστρέψιμος.
- $det(A) \neq 0$.
- οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- οι στήλες του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση το $x = 0$ (ο μηδενοχώρος του A είναι το $\{0\}$).

Γραμμικές Απεικονίσεις. Κάθε απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ η οποία ικανοποιεί για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $x, y \in \mathbb{R}^n$ τη σχέση $T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$ λέγεται *γραμμική*.
Για κάθε γραμμική απεικόνιση υπάρχει μοναδικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$. Η i-οστή στήλη του A ισούται με $T(e_i)$.

Ενδιαφέροντες χώροι. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και η απεικόμιση $T(x) = Ax$. Τότε

- Ο πυρήνας της απεικόνισης $\ker(T) = \{x : T(x) = 0\}$ και ο μηδενοχώρος $\text{Null}(A) = \{x : Ax = 0\}$ είναι το ίδιο σύνολο.
- Ο χώρος στηλών $\text{col}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ και το σύνολο τιμών $\{b | \exists x, T(x) = b\}$ είναι το ίδιο σύνολο.
- $\text{Null}(A) \subseteq \mathbb{R}^n, \text{col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$, και για την ακριβεία είναι *γραμμικοί υποχώροι.*

Διανυσματικοί χώροι. Ένα σύνολο αντικειμένων ('διανυσμάτων ') V πάνω σε ένα σώμα K λέγεται διανυσματικός χώρος όταν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, ως προς τον πολλαπλασιασμό με $\lambda \in K$, περιέχει το μηδενικό διάνυσμα και, επιπρόσθετα, για κάθε $u \in V$ περιέχει το $-u$. Κάθε διανυσματικός χώρος έχει μια *βάση*, δηλαδή ένα σύνολο διανυσμάτων ελάχιστης πληθικότητας το οποίο παράγει (με γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων του) όλο τον χώρο.
Ένα σύνολο λέγεται υποχώρος του V αν είναι διανυσματικός χώρος και υποσύνολο του V. Σε ένα διανυσματικό χώρο K^n (για παράδειγμα στον $\mathbb{R}^n$) όλοι οι γραμμικοί υποχώροι είναι τα σύνολα της μορφής $\{x : Ax = 0\}$ για κάποιο $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ και μόνο αυτά – ισοδύναμα, κάθε υποχώρος είναι η γραμμική θήκη κάποιων διανυσμάτων.

Ισοδυναμίες 6. Έστω το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B} := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ σε ένα διανυσματικό χώρο V. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

- το $\mathcal{B}$ είναι βάση του V.
- τα διανύσματα στο $\mathcal{B}$ παράγουν όλο τον χώρο ($\mathrm{span}(\mathcal{B}) = V$) και είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- το $\mathcal{B}$ είναι ένα μέγιστης πληθικότητας σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων στον V.
- το $\mathcal{B}$ είναι ένα ελάχιστης πληθικότητας σύνολο διανυσμάτων τα οποία παράγουν όλο το V

Ισοδυναμίες 7. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- Ο βαθμός του A ισούται με k.
- Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του A είναι k (διάσταση χώρου στηλών $= k$).
- Το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του A είναι k (διάσταση χώρου γραμμών $= k$)
- Το μέγεθος της μέγιστης μη μηδενικής ορίζουσας του A ισούται με k.
- Ο A έχει k βασικές μεταβλητές.

Διαγωνιοποίηση. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι το $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, οι ρίζες του οποίου είναι οι ιδιοτιμές. Σε κάθε ιδιοτιμή λ αντιστοιχεί ένας ιδιοχώρος, δηλαδή ένα σύνολο διανυσμάτων u ώστε $Au = \lambda u$. Ο ιδιοχώρος της λ ισούται με $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Αλγεβρική πολλαπλότητα της $\lambda =$ πολλαπλότητα της λ στο $p()$.
Γεωμετρική πολλαπλότητα της $\lambda =$ διάστατη του $\mathrm{Null}(A - \lambda I)$.

Αν κάθε ιδιοτιμή έχει ίδια αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα, τότε και μόνο τότε A διαγωνιοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει P αντιστρέψιμος ώστε $A = P\Lambda P^{-1}$ με Λ διαγώνιος με τις ιδιοτιμές στη διαγώνιο. Το P έχει στήλες ιδιοδιανύσματα του A: για κάθε ιδιοχώρο βρίσκουμε μία βάση, συλλέγουμε όλα τα n αυτά διανύσματα από όλους τους ιδιοχώρους και τα βάζουμε σαν στήλες του P. Όταν A συμμετρικός υπάρχει P ώστε $PP^T = I$, άρα $A = P\Lambda P^T$.