

Θεωρία τύπων

Νίκος Ρήγας

Έκδοση 2023-10-24

Περιεχόμενα

I	Η θεωρία τύπων τού Martin-Löf	2
1	Τύποι και αναδρομή	3
1.1	Οι φυσικοί αριθμοί	3
1.2	Αναδρομή στους φυσικούς αριθμούς	4
1.3	Άλλα παραδείγματα τύπων	6
1.4	Ασκήσεις	9
2	Οικογένειες τύπων και επαγωγή	10
2.1	Οικογένειες τύπων	10
2.2	Βασισμένη ισότητα	11
2.3	Επαγωγή	13
2.4	Ασκήσεις	16

Μέρος Ι

**Η θεωρία τύπων του
Martin-Löf**

Κεφάλαιο 1

Τύποι και αναδρομή

Όλες οι θεωρίες τύπων πραγματεύονται τυχόντες τύπους. Εκείνο που τις διαφοροποιεί μεταξύ τους είναι ποιούς τύπους προβλέπει η κάθε μία να υπάρχουν και τί μπορεί να πει για αυτούς. Μία ιδιαιτερότητα της θεωρίας τύπων του Martin-Löf είναι ότι δεν προβλέπει την ύπαρξη οποιωνδήποτε συγκεκριμένων τύπων· αντ' αυτού, περιέχει τὰ μέσα για την περιγραφή τύπων. Οι τύποι που μπορούν να οριστούν έτσι είναι οι *επαγωγικοί* τύποι.

Ένας επαγωγικός τύπος A μπορεί να γίνει αντιληπτός διαισθητικά ως ένας τύπος που προσδιορίζεται από μηδέν ή περισσότερους κατασκευαστές, καθένας από τους οποίους είναι ένας τρόπος σχηματισμού (με παραμέτρους) στοιχείων του X . Αυτό περιλαμβάνει σαν ειδική περίπτωση κατασκευαστές χωρίς παραμέτρους, οι οποίοι είναι μεμονωμένα στοιχεία του X .

1.1 Οι φυσικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί παράγονται από τό επαγωγικό σχήμα

- τό μηδέν είναι φυσικός αριθμός, και
- ο επόμενος καθενός φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός.

Σε τυποθεωρητικό συμβολισμό, η παραπάνω επαγωγική περιγραφή τών φυσικών αριθμών παίρνει τή μορφή

- $0 : \text{Nat}$,
- εάν $n : \text{Nat}$, τότε $s(n) : \text{Nat}$.

Επομένως, ο τύπος Nat έχει δύο κατασκευαστές: Τόν 0 , που δεν έχει παραμέτρους, και τόν s , που έχει μία παράμετρο η οποία είναι επίσης στοιχείο του Nat (οπότε είναι αναδρομικός κατασκευαστής). Αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι τὰ στοιχεία του Nat είναι τὰ

$$0, s(0), s(s(0)), \dots,$$

τὰ οποία καλούμε $0, 1, 2$ και λοιπά.

Τό $s(n)$ δεν είναι κάποιο μεμονωμένο στοιχείο του Nat , παρά εξαρτάται από τό n . Γενικότερα, ένα στοιχείο ενός τύπου A ενδέχεται να εξαρτάται παραμετρικά από

ένα στοιχείο του τύπου A' . Για να δηλώσουμε μία τέτοια εξάρτηση βάζουμε τήν παράμετρο σε παρένθεση και γράφουμε, π.χ., $t(a') : A$, όπως κάναμε ήδη στο $s(n)$.

Στήν περίπτωση αυτή έχουμε ένα στοιχείο του A για κάθε στοιχείο του A' , δηλαδή για μία οικογένεια στοιχείων του A παραμετροποιημένη από τόν A' , ή, στήν ορολογία που θα υιοθετήσουμε, για έναν *μετασχηματισμό* τών στοιχείων του A' σε στοιχεία του A .

Όταν θέλουμε να αναφερθούμε στόν ίδιο τόν μετασχηματισμό, χρησιμοποιούμε τόν συμβολισμό

$$(x : A') t(x) : A,$$

ή και $(x : A') t(x)$ εάν δεν συντρέχει λόγος αναφοράς στόν A . (Σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε τόν A από τή μορφή του $t(x)$.) Ομοίως, η έκφραση

$$(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) t(x_1, \dots, x_n) : A$$

συμβολίζει έναν μετασχηματισμό με n τό πλήθος παραμέτρους. (Ένας μετασχηματισμός $() t() : A$ με μηδέν τό πλήθος παραμέτρους δεν είναι παρά ένα στοιχείο του A .) Επειδή στήν πράξη αυτός ο συμβολισμός τών μετασχηματισμών καταντάει δύσχρηστος, θα εκμεταλλευόμαστε κάθε ευκαιρία που μάς δίνεται για να γράφουμε απλώς t στή θέση του $(x : A) t(x)$, και τό ίδιο για άλλες περιπτώσεις μετασχηματισμών, έχοντας πάντοτε κατά νου ότι πρόκειται για κατάχρηση.

Οι παράμετροι ενός μετασχηματισμού μπορεί να είναι οι ίδιες μετασχηματισμοί· αυτό αποτυπώνεται σε εκφράσεις όπως

$$(x : A, (y : B) z(y) : C) d(x, z) : D,$$

όπου ο σημασιόμενος μετασχηματισμός έχει δύο παραμέτρους, εκ τών οποίων η μία είναι στοιχείο του A και η άλλη είναι μετασχηματισμός στοιχείων του B σε στοιχεία του C .

1.2 Αναδρομή στους φυσικούς αριθμούς

Οι κύριες χρησιμότητες τής επαγωγικής περιγραφής ενός τύπου είναι η διατύπωση ορισμών με αναδρομή και αποδείξεων με επαγωγή. Θα εξετάσουμε τώρα τήν περίπτωση τής αναδρομής· για τήν επαγωγή θα είμαστε σε θέση να μιλήσουμε μόλις εμπλουτίσουμε τή γλώσσα με οικογένειες τύπων.

Έστω C τυχών τύπος. Δοθέντων ενός $c_0 : C$ και ενός $(x : \text{Nat}, y : C) c_s(x, y) : C$ μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \text{Nat}) t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(0) & \equiv c_0, \\ t(s(n)) & \equiv c_s(n, t(n)). \end{aligned}$$

Λέμε ότι ο t ορίζεται με *αναδρομή* (*recursion*) από τά c_0 και c_s · η δυνατότητα διατύπωσης τέτοιων ορισμών είναι η *αρχή τής αναδρομής για τόν Nat*.

Ως πρώτο παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής αναδρομής, ας ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \text{Nat}) \text{pred}(x) : \text{Nat}$ που στέλνει τό μηδέν στο μηδέν και καθέναν άλλο φυσικό αριθμό στόν προηγούμενό του: Στήν περίπτωση αυτή, ο τύπος C είναι

ο Nat (ο μόνος τύπος που έχουμε αυτή τη στιγμή), και οι ορίζουσες σχέσεις έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \text{pred}(0) &::= 0, \\ \text{pred}(s(n)) &::= n. \end{aligned}$$

Πρόκειται δηλαδή για τό στιγμιότυπο τού γενικού σχήματος τής αναδρομής όπου τό c_0 είναι τό 0 και τό $c_s(x, y)$ είναι τό x .

Μπορούμε επίσης να ορίζουμε μετασχηματισμούς που έχουν περισσότερες από μία παραμέτρους, κάνοντας αναδρομή σε μία από αυτές. Τέτοια περίπτωση είναι η πρόσθεση φυσικών αριθμών, τήν οποία θα ορίσουμε με αναδρομή στόν δεξιό προσθετέο:

$$\begin{aligned} m + 0 &::= m, \\ m + s(n) &::= s(m + n). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι τό $m + n$ ορίζεται με αναδρομή από τά m και $(x : \text{Nat}, y : \text{Nat}) s(y)$.

Ενίοτε δεν θέλουμε να δώσουμε όνομα στόν μετασχηματισμό που ορίζεται με αναδρομή· αυτό συμβαίνει π.χ. εάν θέλουμε να τόν αποτιμήσουμε αμέσως ή όταν εμφανίζεται ως όρισμα κάποιου άλλου μετασχηματισμού. Επίσης, για τή μεταμαθηματική μελέτη τής θεωρίας τύπων είναι απαραίτητο να μπορούμε να διατυπώσουμε τήν αρχή τής αναδρομής με τρόπο που να μην απαιτεί τήν προσθήκη στή γλώσσα ενός συμβόλου για κάθε ορίσιμο μετασχηματισμό. Αυτό τό επιτυγχάνουμε υποκαθιστώντας τήν αρχή τής αναδρομής με τό ένα και μοναδικό στιγμιότυπό της στό οποίο τά ίδια τά c_0 και c_s έχουν περάσει μέσα στόν συμβολισμό ως παράμετροι. Ορίζουμε λοιπόν τόν *αναδρομέα (recursor)*

$$(z : C, (x : \text{Nat}, y : C) w(x, y) : C, n : \text{Nat}) \text{rec}_{\text{Nat}}(z, w, n) : C$$

τού Nat μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \text{rec}_{\text{Nat}}(z, w, 0) &::= z, \\ \text{rec}_{\text{Nat}}(z, w, s(n)) &::= w(n, \text{rec}_{\text{Nat}}(z, w, n)). \end{aligned}$$

Ο αναδρομέας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφραστεί οποιοσδήποτε αναδρομικός ορισμός. Ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού, λόγου χάριν, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\text{pred}(n) ::= \text{rec}_{\text{Nat}}(0, (x : \text{Nat}, y : \text{Nat}) x, n),$$

ενώ τό άθροισμα δύο φυσικών αριθμών,

$$m + n ::= \text{rec}_{\text{Nat}}(m, (x : \text{Nat}, y : \text{Nat}) s(y), n).$$

Άσκηση 1.1. Έχοντας τήν πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} m \cdot 0 &::= 0, \\ m \cdot s(n) &::= (m \cdot n) + m. \end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \cdot n$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού Nat . Προαιρετικά, συνεχίστε με τά m^n και $n!$.

1.3 Άλλα παραδείγματα τύπων

Λίστες

Οι λίστες στοιχείων ενός τύπου A συγκροτούν έναν τύπο $\text{List}(A)$, ο οποίος περιγράφεται από το επαγωγικό σχήμα

- $\text{nil}_A : \text{List}(A)$, και
- εάν $a : A$ και $l : \text{List}(A)$, τότε $\text{cons}_A(a, l) : \text{List}(A)$,

όπου nil_A η κενή λίστα και $\text{cons}_A(a, l)$ η προέκταση τής l με τήν προσθήκη του a . Στην πράξη, τὰ subscripts θα παραλείπονται όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με τὸ ποιὸς εἶναι ὁ A .

Ἡ ἀρχὴ τῆς ἀναδρομῆς γιὰ τὸν $\text{List}(A)$ ἔχει τὴν ἐξῆς μορφή: Εάν ο C εἶναι ἕνας οποιοσδήποτε τύπος, και μᾶς ἔχουν δοθεῖ ἕνα $c_{\text{nil}} : C$ και ἕνα $c_{\text{cons}}(x, y, z) : C$ γιὰ τυχόντα $x : A$, $y : \text{List}(A)$, και $z : C$, οἱ σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\text{nil}) & \equiv c_{\text{nil}}, \\ t(\text{cons}(a, l)) & \equiv c_{\text{cons}}(a, l, t(l)) \end{aligned}$$

ορίζουν τὸ $t(l)$ γιὰ οποιαδήποτε λίστα $l : \text{List}(A)$. Γιὰ παράδειγμα, τὸ μήκος $\text{len}(l)$ μιᾶς λίστας l ορίζεται ἀπὸ τὴν ἀναδρομὴ

$$\begin{aligned} \text{len}(\text{nil}) & \equiv 0, \\ \text{len}(\text{cons}(a, l)) & \equiv s(\text{len}(l)), \end{aligned}$$

και ἡ συνένωση (concatenation) $l + k$ δύο λιστῶν l και k ορίζεται ἀπὸ τὴν ἀναδρομὴ

$$\begin{aligned} \text{nil} + k & \equiv k, \\ \text{cons}(a, l) + k & \equiv \text{cons}(a, l + k), \end{aligned}$$

εἰς τὸ ἄθροισμα $\text{sum}(l)$ τῶν στοιχείων μιᾶς λίστας l φυσικῶν ἀριθμῶν ορίζεται ἀπὸ τὴν ἀναδρομὴ

$$\begin{aligned} \text{sum}(\text{nil}) & \equiv 0, \\ \text{sum}(\text{cons}(a, l)) & \equiv a + \text{sum}(l). \end{aligned}$$

Ὅπως κάναμε και με τὸν Nat , μπορούμε να «πακετάρουμε» τὴν ἀρχὴ τῆς ἀναδρομῆς τοῦ $\text{List}(A)$ σε ἕναν ἀναδρομέα

$$(\nu : C, (x : A, y : \text{List}(A), z : C) w(x, y, z) : C, l : \text{List}(A)) \text{rec}_{\text{List}(A)}(\nu, w, l) : C$$

οριζόμενο ἀπὸ τὴν ἀναδρομὴ

$$\begin{aligned} \text{rec}_{\text{List}(A)}(\nu, w, \text{nil}) & \equiv \nu, \\ \text{rec}_{\text{List}(A)}(\nu, w, \text{cons}(a, l)) & \equiv w(a, l, \text{rec}_{\text{List}(A)}(\nu, w, l)), \end{aligned}$$

ὁπότε τὸ μήκος μιᾶς λίστας μπορεί ἐναλλακτικὰ να οριστεῖ ὡς

$$\text{len}(l) \equiv \text{rec}_{\text{List}(A)}(0, (x : A, y : \text{List}(A), z : \text{Nat}) s(z), l),$$

ἡ συνένωση δύο λιστῶν,

$$l + k \equiv \text{rec}_{\text{List}(A)}(k, (x : A, y : \text{List}(A), z : \text{List}(A)) \text{cons}(x, z), l),$$

και τὸ ἄθροισμα μιᾶς λίστας φυσικῶν ἀριθμῶν,

$$\text{sum}(l) \equiv \text{rec}_{\text{List}(\text{Nat})}(0, (x : A, y : \text{List}(A), z : \text{Nat}) x + z, l).$$

Άσκηση 1.2. Η συνένωση $\text{cat}(L) : \text{List}(A)$ μιας λίστας $L : \text{List}(\text{List}(A))$ λιστών μελών ενός τύπου A έχει τον αναδρομικό ορισμό

$$\begin{aligned} \text{cat}(\text{nil}_{\text{List}(A)}) & \equiv \text{nil}_A, \\ \text{cat}(\text{cons}_{\text{List}(A)}(l, L)) & \equiv l + \text{cat}(L). \end{aligned}$$

Γράψτε τό $\text{cat}(L)$ χρησιμοποιώντας τον αναδρομέα του $\text{List}(\text{List}(A))$.

Δέντρα

Ο τύπος BTree των δυαδικών δέντρων συλλαμβάνεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\text{triv} : \text{BTree}$,
- εάν $r : \text{BTree}$ και $s : \text{BTree}$, τότε $\text{join}(r, s) : \text{BTree}$.

Στόν BTree αντιστοιχεί η εξής αρχή αναδρομής: Δοθέντων ενός $c_{\text{triv}} : C$ και ενός $(x : \text{BTree}, y : \text{BTree}, z : C, w : C) c_{\text{join}}(x, y, z, w) : C$, όπου C τυχών τύπος, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \text{BTree}) t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\text{triv}) & \equiv c_{\text{triv}}, \\ t(\text{join}(r, s)) & \equiv c_{\text{join}}(r, s, t(r), t(s)). \end{aligned}$$

Άσκηση 1.3. Περιγράψτε τή μορφή του $\text{rec}_{\text{BTree}}$ και διατυπώστε τίς ορίζουσες σχέσεις του.

Τά δυαδικά δέντρα είναι ειδική περίπτωση δέντρων δεδομένης διακλάδωσης. Ο τύπος $\text{Tree}(A)$ των δέντρων με τύπο διακλάδωσης A ορίζεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\text{triv}_A : \text{Tree}(A)$,
- εάν $(x : A) b(x) : \text{Tree}(A)$, τότε $\text{join}_A(x : A) b(x) : \text{Tree}(A)$.

Περιγραφικότερα, αυτό που λέει η δεύτερη ρήτρα είναι ότι εάν έχουμε ένα δέντρο $b(x)$ για κάθε $x : A$, μπορούμε να ενώσουμε αυτά τά δέντρα με μία καινούργια ρίζα και να φτιάξουμε ένα μεγάλο δέντρο $\text{join}_A(x : A) b(x)$, τό οποίο περιέχει τά διάφορα $b(x)$ ως άμεσα υποδέντρα. Για να επεκτείνουμε τόν ορισμό ενός μετασχηματισμού t στό $\text{join}_A(x : A) b(x)$, έχοντας ήδη διαθέσιμα τά $t(b(x))$ για $x : A$, χρειαζόμαστε έναν μετασχηματισμό

$$((x : A) y(x) : \text{Tree}(A), (x : A) z(x) : C) c_{\text{join}}(y, z) : C$$

οπότε, μαζί με ένα $c_{\text{triv}} : C$ μπορούμε να ορίσουμε τόν t θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\text{triv}_A) & \equiv c_{\text{triv}}, \\ t(\text{join}_A(x : A) b(x)) & \equiv c_{\text{join}}((x : A) b(x), (x : A) t(b(x))). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο τύπος A εμφανίζεται αρνητικά στόν κατασκευαστή join_A , οπότε αναμένεται ότι τό $\text{Tree}(A)$ συναρτάται ανταλλοίωτα με τό A . Πράγματι, ένας μετασχηματισμός

$$(x : B) u(x) : A$$

επάγει μία αναπαραμετροποίηση δέντρων

$$(x : \text{Tree}(A)) \text{Tree}(u)(x) : \text{Tree}(B)$$

με ορισμό

$$\begin{aligned} \text{Tree}(u)(\text{triv}_A) & \equiv \text{triv}_B, \\ \text{Tree}(u)(\text{join}_A(x : A) b(x)) & \equiv \text{join}_B(y : B) \text{Tree}(u)(b(u(y))). \end{aligned}$$

Άσκηση 1.4. Περιγράψτε τόν αναδρομέα τού $\text{Tree}(A)$, και εκφράστε τόν $\text{Tree}(u)$ με τή βοήθειά του.

Άσκηση 1.5. Στόν ορισμό τού $\text{List}(A)$, ο τύπος A εμφανίζεται θετικά. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A) u(x) : B$ ορίστε, χρησιμοποιώντας τήν αρχή τής αναδρομής ή τόν αναδρομέα τού $\text{List}(A)$, τόν μετασχηματισμό $(x : \text{List}(A)) \text{List}(u)(x) : \text{List}(B)$ ο οποίος απεικονίζει μία λίστα μελών τού A στή λίστα τών εικόνων τους μέσω τού u .

Αληθοτιμές

Ο Bool είναι ο τύπος που έχει ακριβώς δύο μέλη false και true . επομένως, περιγράφεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\text{false} : \text{Bool}$,
- $\text{true} : \text{Bool}$.

Η αρχή τής αναδρομής για τόν Bool εκφράζει τό γεγονός ότι προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό μελών τού Bool σε μέλη ενός τύπου C δεν έχουμε παρά να πούμε τί κάνει με τό false και τί με τό true . συγκεκριμένα, δοθέντων ενός $c_{\text{false}} : C$ και ενός $c_{\text{true}} : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\text{false}) & \equiv c_{\text{false}}, \\ t(\text{true}) & \equiv c_{\text{true}} \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \text{Bool}) t(x) : C$. Όπως πάντα, έχουμε έναν αναδρομέα

$$(x : C, y : C, z : \text{Bool}) \text{rec}_{\text{Bool}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned} \text{rec}_{\text{Bool}}(x, y, \text{false}) & \equiv x, \\ \text{rec}_{\text{Bool}}(x, y, \text{true}) & \equiv y. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε τόν αληθοπίνακα τής διάζευξης μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \text{or}(b, \text{false}) & \equiv b, \\ \text{or}(b, \text{true}) & \equiv \text{true}, \end{aligned}$$

ή, εναλλακτικά, με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού Bool ,

$$\text{or}(b, c) \equiv \text{rec}_{\text{Bool}}(b, \text{true}, c).$$

Άσκηση 1.6. Ορίστε τούς αληθοπίνακες τής σύζευξης, τής συνεπαγωγής, και τής άρνησης.

1.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1.7. Η πράξη (almost minus) $m \dot{-} n$ ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned}m \dot{-} 0 & \quad \equiv m, \\m \dot{-} (n + 1) & \equiv \text{pred}(m \dot{-} n).\end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \dot{-} n$ χρησιμοποιώντας τόν rec_{Nat} .

Άσκηση 1.8 (insertion sort). Ο μετασχηματισμός $(a : A, l : \text{List}(A)) \text{insert}(a, l) : \text{List}(A)$ τής ένθεσης μέλους σε (ταξινομημένη) λίστα ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned}\text{insert}(a', \text{nil}) & \quad \equiv \text{cons}(a', \text{nil}), \\ \text{insert}(a', \text{cons}(l, a)) & \equiv \text{rec}_{\text{Bool}}(\text{cons}(a', \text{cons}(a, l)), \text{cons}(a, \text{insert}(a', l)), \text{isless}(a', a))\end{aligned}$$

(όπου τό $\text{isless}(a', a)$ είναι true ή false ανάλογα με τό αν τό a' είναι ή δεν είναι μικρότερο τού a). Χρησιμοποιήστε αυτόν τόν μετασχηματισμό για να περιγράψετε τόν αλγόριθμο ταξινόμησης insertion sort. (Πρόκειται για τόν αλγόριθμο ο οποίος, προκειμένου να ταξινομήσει μία λίστα $\text{cons}(l, a)$, ταξινομεί πρώτα τήν l και μετά κάνει insert τό a .)

Κεφάλαιο 2

Οικογένειες τύπων και επαγωγή

Στό προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε κάποιες αρχές αναδρομής, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να εκφράσουμε μετασχηματισμούς μεταξύ των διαφόρων τύπων. Αυτό που φτιάξαμε, εν ολίγοις, είναι μία απλή συναρτησιακή γλώσσα. Ενδιαφερόμαστε όμως επίσης για τις ιδιότητες αυτών των μετασχηματισμών. Σε αυτό τό κεφάλαιο, καθώς και στο επόμενο, θα δούμε πώς μπορούμε, στο πλαίσιο της θεωρίας τύπων, να διατυπώνουμε και να αποδεικνύουμε προτάσεις.

Σε αντίθεση με άλλες μαθηματικές θεωρίες και θεμελιώσεις των μαθηματικών όπως η θεωρία συνόλων, στη θεωρία τύπων οι μαθηματικές προτάσεις, καθώς και οι αποδείξεις τους, είναι μαθηματικά αντικείμενα πρώτης κατηγορίας. Συγκεκριμένα, οι μαθηματικές προτάσεις αναπαρίστανται από τύπους, που μπορούν να θεωρηθούν ταυτόχρονα μαθηματικές δομές και μαθηματικοί ισχυρισμοί, μία σύλληψη γνωστή ως *propositions-as-types*. Υπό αυτή τη σκοπιά, τά στοιχεία ενός τύπου νοούνται ως *τεκμήρια* ή *μάρτυρες* αλήθειας της αντίστοιχης πρότασης. (Μερικές φορές λέγονται επίσης αποδείξεις, αλλά αυτή η ορολογία μπορεί να είναι παραπλανητική, επομένως γενικά τήν αποφεύγουμε.) Μία άμεση μεθοδολογική συνέπεια είναι ότι προκειμένου να δείξουμε ότι μία πρόταση αληθεύει δεν έχουμε παρά να εμφανίσουμε ένα στοιχείο του τύπου που αντιστοιχεί σε αυτή τήν πρόταση.

Ωστόσο, αυτή η οπτική σχετικά με τις αποδείξεις διαφέρει ουσιωδώς από τή συνήθη. Ο τρόπος με τον οποίο η λογική γίνεται αντιληπτή από τή θεωρία τύπων είναι ότι μια πρόταση δεν είναι απλώς αληθής ή ψευδής, αλλά μάλλον μπορεί να νοηθεί ως η συλλογή όλων των δυνατών τεκμηρίων αλήθειας της. Σύμφωνα με αυτήν τή σύλληψη, οι αποδείξεις δεν είναι μόνο τό μέσο επικοινωνίας των μαθηματικών, αλλά αποτελούν και οι ίδιες αντικείμενο μελέτης ισότιμο με πιο οικεία αντικείμενα όπως οι αριθμοί και οι συναρτήσεις.

2.1 Οικογένειες τύπων

Θα μιλήσουμε τώρα για τό ένα από τά δύο δομικά στοιχεία των προτάσεων, τά κατηγορήματα· τό άλλο, οι λογικές σταθερές, είναι τό αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

Μία *οικογένεια τύπων* (*type family*) είναι ένας μετασχηματισμός των στοιχείων κάποιων τύπων σε τύπους. Σε μία οικογένεια $(x_1:A_1, \dots, x_n:A_n)A(x_1, \dots, x_n)$, οι A_1, \dots, A_n

λέγονται τύποι δεικτών (indexing types), και οι επιμέρους τύποι $A(x_1, \dots, x_n)$ λέγονται στιγμιότυπα (instances) τής οικογένειας.

Οι οικογένειες τύπων, που επίσης λέγονται εξαρτώμενοι τύποι (dependent types), ήταν μία από τις σημαντικότερες καινοτομίες τής θεωρίας τύπων του Martin-Löf. Τυπικά παραδείγματα οικογενειών τύπων αποτελούν τὰ διάφορα κατηγορήματα $(x, y:A)x = y$, $(x:\text{Nat})\text{Prime}(x)$ κ.λπ. που συναντάμε στὰ μαθηματικά. Ένα στοιχειώδες, αλλά σημαντικό, παράδειγμα οικογένειας είναι η σταθερή οικογένεια $(x : A) B$ όπου A και B είναι τύποι. Και βέβαια, μία οικογένεια $() A()$ με μηδέν τό πλήθος ορίσματα δεν είναι παρά ένας τύπος.

2.2 Βασισμένη ισότητα

Ο απλούστερος τρόπος να ορίσουμε μία οικογένεια είναι προδιαγράφοντας κατασκευαστές στὰ διάφορα στιγμιότυπά της, όπως κάναμε και για μεμονωμένους τύπους. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τόν τρόπο για να ορίσουμε τήν πλέον κοινή και πλέον χρήσιμη σχέση στὰ μαθηματικά, τήν ισότητα.

Έστω $a : A$, όπου A τύπος. Η *ισότητα προς a* είναι η οικογένεια

$$(x : A) a =_A x$$

που έχει τόν μοναδικό κατασκευαστή

$$\text{refl}_a : a =_A a.$$

Εφ' όσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, ο δείκτης θα παραλείπεται και θα γράφουμε απλούστερα $a = b$.

Η ισότητα προς a λέγεται επίσης *βασισμένη (based) ισότητα*, διότι τό ένα σκέλος (τό αριστερό στόν συμβολισμό μας) κρατιέται σταθερό, σε αντιδιαστολή με τήν (απλώς) ισότητα που θα ορίσουμε παρακάτω, η οποία είναι οικογένεια ως προς αμφότερα τὰ σκέλη. Οι δύο διαφέρουν όσον αφορά τή μορφή τού αναδρομέα, αλλά είναι ισοδύναμες· για τόν λόγο αυτόν χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο.

Σχετικά με τήν αρχή τής αναδρομής, παρατηρήστε ότι η ισότητα προς x είναι οικογένεια, οπότε αυτό που ορίζεται είναι μετασχηματισμοί προς οικογένειες ως προς τόν ίδιο τύπο δεικτών A , και επίσης ότι έχουμε μόνο έναν κατασκευαστή, οπότε αρκεί να πούμε τι κάνει ένας τέτοιος μετασχηματισμός με αυτόν. Αναλυτικότερα, ας θεωρήσουμε ότι μάς έχουν δοθεί

1. μία οικογένεια $(x : A) C(x)$ τύπων, και
2. ένα στοιχείο c_{refl_a} τού $C(a)$.

Τότε, η σχέση

$$t(a, \text{refl}_a) := c_{\text{refl}_a}$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : A, p : a = x) t(x, p) : C(x)$.

Αν συγκρίνουμε αυτή τήν αρχή αναδρομής με εκείνες τών μεμονωμένων τύπων, θα παρατηρήσουμε ότι εδώ έχουμε ένα παραπάνω όρισμα, ο ρόλος τού οποίου είναι να προσδιορίζει σε ποιο στιγμιότυπο βρισκόμαστε κάθε φορά.

Ο αναδρομέας τής ισότητας προς a είναι ο μετασχηματισμός

$$(b : A, c : C(a), p : a = b) \text{rec}_{a=b}^C(c, p) : C(b) \quad (2.1)$$

που ορίζεται από την αναδρομή

$$\text{rec}_{a=a}^C(c, \text{refl}_a) := c. \quad (2.2)$$

Ο κανόνας σχηματισμού τού αναδρομέα (συμπεριλαμβάνοντας και την παράμετρο a) μάς δίνει την ευκαιρία να εισαγάγουμε τόν καθιερωμένο συμβολισμό:

$$\frac{a; A \quad b: A \quad c: C(a) \quad p: a = b}{\text{transport}^C(p, c) := \text{rec}_{a=b}^C(c, p): C(b)}. \quad (2.3)$$

Στήν οποιοτική θεωρία τύπων, ο αναδρομέας τής βασισμένης ισότητας συμβολίζεται transport , επειδή μεταφέρει ένα οποιοδήποτε στοιχείο τού $C(a)$ «κατά μήκος τού $p: a = b$ » στό $C(b)$.

Εάν από τόν (2.3) διατηρήσουμε μόνο τίς προτάσεις, παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C(a) \quad a = b}{C(b)} \quad (=E)$$

τής βασισμένης ισότητας, γνωστό και ως *indiscernibility of identicals*, ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι τά ίσα μοιράζονται τίς ίδιες ιδιότητες.

Όπως αναμένεται, η βασισμένη ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. Η ανακλαστικότητα εξασφαλίζεται από τόν κανόνα εισαγωγής

$$\overline{a = a} \quad (=I)$$

Εν συνεχεία, αν θεωρήσουμε τήν οικογένεια $(x: A) C(x)$ με

$$C(x) := x = a,$$

ο $(=E)$ παίρνει τή μορφή

$$\frac{\overline{a = a} \quad a = b}{b = a}.$$

Αν επαναφέρουμε τά στοιχεία, παίρνουμε τήν τυποθεωρητική κατασκευή

$$\frac{\overline{\text{refl}_a: a = a} \quad p: a = b}{\text{transport}^{-a}(p, \text{refl}_a): b = a}.$$

Λήμμα 2.2.1 (Συμμετρία). *Εάν $a, b: A$ και $p: a = b$, τότε*

$$p^{-1} := \text{transport}^{-a}(p, \text{refl}_a): b = a.$$

Επιπλέον, $\text{refl}_a^{-1} \equiv \text{refl}_a$.

Τέλος, αν θέσουμε $C(x) := a = x$, παίρνουμε

$$\frac{\overline{a = b} \quad b = c}{a = c}.$$

Αν επαναφέρουμε τά στοιχεία, παίρνουμε τήν τυποθεωρητική κατασκευή

$$\frac{\overline{p: a = b} \quad q: b = c}{\text{transport}^{a=}(q, p): a = c}.$$

Λήμμα 2.2.2 (Μεταβατικότητα). Αν $a, b, c : A$, $p : a = b$, και $q : b = c$, τότε

$$p \cdot q := \text{transport}^{a=}(q, p) : a = c.$$

Επιπλέον, $\text{refl}_a \cdot \text{refl}_a \equiv \text{refl}_a$.

Άλλο πόρισμα τού ($=E$) είναι ότι η ισότητα διατηρείται από μετασχηματισμούς· προκειμένου για έναν μετασχηματισμό $(x : A) u(x) : B$, τό ζητούμενο προκύπτει θεωρώντας στή θέση τού $C(x)$ τό $u(a) = u(x)$. Τό επόμενο λήμμα εισάγει έναν χρήσιμο συμβολισμό.

Λήμμα 2.2.3. Έστω $(x : A) u(x) : B$ μετασχηματισμός. Για οποιαδήποτε $a, b : A$ και $p : a = b$, ορίζεται

$$u(p) : u(a) = u(b),$$

ούτως ώστε $u(\text{refl}_a) \equiv \text{refl}_{u(a)}$.

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τό $u(p)$ με αναδρομή στό p . Θεωρούμε λοιπόν, για $a : A$, τήν οικογένεια $(x : A) u(a) = u(x)$, τήν οποία θα γράφουμε συντομότερα $u(a) = u(_)$, και ορίζουμε τόν μετασχηματισμό $(x : A, p : a = x) t(x, p) : u(a) = u(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a, \text{refl}_a) := \text{refl}_{u(a)} : u(a) = u(a).$$

Για $p : a = b$ θέτουμε $u(p) := t(b, p)$. Τό δεύτερο ζητούμενο είναι άμεσο:

$$u(\text{refl}_a) \equiv t(a, \text{refl}_a) \equiv \text{refl}_{u(a)}. \quad \square$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε απ' ευθείας τό $u(p)$ επικαλούμενοι τόν αναδρομεία τής ισότητας:

$$u(p) := \text{transport}^{u(a)=u(_)}(p, \text{refl}_{u(a)}).$$

Αυστηρά μιλώντας, θα έπρεπε να γράφουμε $u(x, y, p)$ αντί για $u(p)$, αλλά ακολουθούμε τήν πρακτική τής παράλειψης τών εννοουμένων. Επιπλέον, θεωρητικά, ο συμβολισμός αυτός είναι διφορούμενος (χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο για έναν μετασχηματισμό στοιχείων τού A και έναν μετασχηματισμό στοιχείων τού $a = b$), αλλά στήν πράξη δεν προκαλεί σύγχυση. Ακολουθεί τήν καθιερωμένη στή θεωρία κατηγοριών πρακτική τής χρήσης τού ίδιου συμβόλου για τήν εφαρμογή ενός συναρτητή σε αντικείμενα και σε μορφισμούς.

2.3 Επαγωγή

Η προσθήκη οικογενειών τύπων στή θεωρία μάς δίνει τή δυνατότητα να ισχυροποιήσουμε τίς αρχές αναδρομής τών διαφόρων τύπων. Θα πάρουμε ως παράδειγμα τούς φυσικούς αριθμούς: Η έννοια ενός αναδρομικού ορισμού

$$\begin{aligned} t(0) &:= c, \\ t(s(n)) &:= f_n(t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c : C$ και $(n : \text{Nat}, x : C) f_n(x) : C$, είναι ότι ο t μπορεί να υπολογιστεί σε βήματα:

$$\begin{aligned} t(0) &\equiv c, \\ t(1) &\equiv f_0(t(0)), \\ t(2) &\equiv f_1(t(1)), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής. Σχηματικά, οι τιμές του t λαμβάνονται «κυνηγώντας» το c κατά μήκος του διαγράμματος

$$C \xrightarrow{f_0} C \xrightarrow{f_1} C \xrightarrow{f_2} \dots$$

Η ίδια, όμως, διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται και στο γενικότερο διάγραμμα

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \dots,$$

όπου, αντί για έναν τύπο C , έχουμε μία οικογένεια τύπων $(n : \text{Nat}) C_n$. Οδηγούμαστε έτσι στην αρχή της επαγωγής του Nat : Δοθέντων

- μιας οικογένειας τύπων $(x : \text{Nat}) C(x)$,
- ενός $c_0 : C(0)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : \text{Nat}, y : C(x)) c_s(x, y) : C(s(x))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(0) & \equiv c_0, \\ t(s(n)) & \equiv c_s(n, t(n)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό

$$(x : \text{Nat}) t(x) : C(x).$$

Με ανάλογο τρόπο γενικεύονται οι αρχές αναδρομής των άλλων τύπων. Η αρχή της επαγωγής για τον BTree , π.χ., διαμορφώνεται ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \text{BTree}) C(x)$,
- ενός $c_{\text{triv}} : C(\text{triv})$, και
- ενός μετασχηματισμού

$$(x : \text{BTree}, y : \text{BTree}, z : C(x), w : C(y)) c_{\text{join}}(x, y, z, w) : C(\text{join}(x, y)),$$

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\text{triv}) & \equiv c_{\text{triv}}, \\ t(\text{join}(r, s)) & \equiv c_{\text{join}}(r, s, t(r), t(s)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \text{BTree}) t(x) : C(x)$.

Άσκηση 2.1. Διατυπώστε τις αρχές επαγωγής των $\text{List}(A)$ και Bool .

Η αρχή της επαγωγής του Nat οφείλει την ονομασία της στο ότι εμπεριέχει την οικεία μέθοδο απόδειξης ιδιοτήτων των φυσικών με επαγωγή: Εάν $\phi(x)$ είναι μία ιδιότητα φυσικών αριθμών, από μία απόδειξη c_0 της $\phi(0)$ και μία απόδειξη $c_s(x, y)$ της $\phi(s(x))$ από την $\phi(x)$ λαμβάνουμε, μέσω του μετασχηματισμού t που ορίζεται με επαγωγή από τα c_0 και c_s , μία απόδειξη $t(x)$ της $\phi(x)$ για τυχόντα φυσικό αριθμό x .

Η γενίκευση τού αναδρομεία για τήν αρχή τής επαγωγής ονομάζεται *επαγωγέας* και συμβολίζεται ind · για τούς φυσικούς αριθμούς, έχει τή μορφή

$$(z : C(0), (x : \text{Nat}, y : C(x)) w(x, y) : C(s(x)), n : \text{Nat}) \text{ind}_{\text{Nat}}^C(z, w, n) : C(n).$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής επαγωγής, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόσθεση φυσικών αριθμών είναι αντιμεταθετική,

$$n + m = m + n,$$

με επαγωγή στό n . Αφ' ενός έχουμε να δείξουμε ότι $0 + m = m + 0$, τό οποίο, δεδομένου ότι $m + 0 \equiv m$, γράφεται ισοδύναμα

$$0 + m = m. \quad (2.4)$$

Αφ' ετέρου, έχουμε να δείξουμε ότι εάν $n + m = m + n$, τότε $s(n) + m = m + s(n)$, τό οποίο, δεδομένου ότι $m + s(n) \equiv s(m + n)$, και αξιοποιώντας τήν επαγωγική υπόθεση, γράφεται ισοδύναμα

$$s(n) + m = s(m + n). \quad (2.5)$$

Παρατηρήστε ότι οι σχέσεις (2.4) και (2.5) είναι οι ορίζουσες σχέσεις τής πρόσθεσης αντεστραμμένες· αυτό φαίνεται καλύτερα εάν θεσουμε $m +' n \equiv n + m$:

$$\begin{aligned} m +' 0 &= m, \\ m +' s(n) &= s(m +' n). \end{aligned}$$

Αυτό που μόλις διαπιστώσαμε είναι ειδική περίπτωση τού εξής αποτελέσματος.

Θεώρημα 2.3.1 (μοναδικότητα τού definiendum). *Ας θεωρήσουμε τόν αναδρομικό ορισμό*

$$\begin{aligned} t(0) &\equiv c_0, \\ t(s(n)) &\equiv c_s(n, t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c_0 : C$ και $(n : \text{Nat}, x : C) c_s(n, x) : C$, και ας υποθέσουμε ότι μάς έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός $(n : \text{Nat}) u(n) : C$ μαζί με τά εξής δεδομένα:

1. ένα $p_0 : u(0) = c_0$, και
2. ένα $p_s(n) : u(s(n)) = c_s(n, u(n))$ για κάθε $n : \text{Nat}$.

Τότε, ορίζεται μετασχηματισμός

$$(n : \text{Nat}) p(n) : u(n) = t(n).$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τόν p με επαγωγή. Η μία ρήτρα τού ορισμού είναι προφανής:

$$p(0) \equiv p_0 : u(0) = c_0 \equiv t(0). \quad (2.6)$$

Όσον αφορά τήν άλλη, εάν $p(n) : u(n) = t(n)$, τότε παίρνουμε

$$p_s(n) : u(s(n)) = c_s(n, u(n))$$

και

$$c_s(n, p(n)) : c_s(n, u(n)) = c_s(n, t(n)) \equiv t(s(n))$$

(με τον συμβολισμό που εισαγάγαμε παραπάνω για το $c_s(n, _)(p(n))$), οπότε μπορούμε να επικαλεστούμε τη μεταβατικότητα τής ισότητας και να θέσουμε

$$p(s(n)) := p_s(n) \cdot c_s(n, p(n)) : u(s(n)) = t(s(n)). \quad (2.7)$$

Ο p ορίστηκε με επαγωγή από τις (2.6) και (2.7). \square

Άσκηση 2.2. Συμπληρώστε τήν απόδειξη τής αντιμεταθετικότητας τής πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, ορίστε, με επαγωγή στό m , μετασχηματισμούς

$$(m : \text{Nat}) p_0(m) : 0 + m = m$$

και

$$(n, m : \text{Nat}) p_s(n, m) : s(n) + m = s(n + m)$$

και μετά εφαρμόστε το θεώρημα 2.3.1 για να συμπεράνετε ότι $n + m = m + n$ για οποιαδήποτε $m, n : \text{Nat}$. \square

Άσκηση 2.3. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάλογο τού θεωρήματος 2.3.1 για λίστες.

2.4 Ασκήσεις

Άσκηση 2.4. Δείξτε ότι η πρόσθεση λιστών είναι προσεταιριστική, περιγράφοντας, για οποιαδήποτε $j, k, l : \text{List}(A)$, ένα στοιχείο τού τύπου

$$(j + k) + l = j + (k + l).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό l .]

Άσκηση 2.5. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A) u(x) : B$, περιγράψτε, για οποιαδήποτε $k, l : \text{List}(A)$, ένα στοιχείο τού τύπου

$$\text{List}(u)(k + l) = \text{List}(u)(k) + \text{List}(u)(l).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό l .]

Άσκηση 2.6 (Φυσικότητα τού cat). Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A) u(x) : B$, δείξτε ότι, για οποιαδήποτε $L : \text{List}(\text{List}(A))$,

$$\text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(L)) = \text{List}(u)(\text{cat}(L)).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό L .]