

# Σημειώσεις θεωρίας τύπων

Νίκος Ρήγας

Έκδοση 2023-11-25

# Περιεχόμενα

<b>I</b>	<b>Η θεωρία τύπων τού Martin-Löf</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Τύποι και αναδρομή</b>	<b>4</b>
1.1	Οι φυσικοί αριθμοί	4
1.2	Αναδρομή στους φυσικούς αριθμούς	5
1.3	Άλλα παραδείγματα τύπων	7
1.4	Ασκήσεις	10
<b>2</b>	<b>Οικογένειες τύπων και επαγωγή</b>	<b>12</b>
2.1	Οικογένειες τύπων	12
2.2	Βασισμένη ισότητα	13
2.3	Επαγωγή	16
2.4	Ισότητα	20
2.5	Ασκήσεις	23
<b>3</b>	<b>Θεωρία τύπων τού Martin-Löf: Τά βασικά</b>	<b>27</b>
3.1	Γινόμενα	27
3.2	Αθροίσματα	28
3.3	Τύποι συναρτήσεων	29
3.4	Ο τύπος <b>0</b>	30
3.5	Ο τύπος <b>1</b>	30
3.6	Ειδικοί κανόνες απαλοιφής	31
3.7	Εξαρτώμενα αθροίσματα	32
3.8	Εξαρτώμενα γινόμενα	33
3.9	Αρχές επαγωγής	36
3.10	Ασκήσεις	40
<b>4</b>	<b>Σύμπαντα</b>	<b>42</b>
4.1	Αναδρομικές οικογένειες τύπων	42
4.2	Σύμπαντα κατά Tarski	44
<b>II</b>	<b>Ομοτοπική θεωρία τύπων</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>Η ομοτοπική δομή των τύπων</b>	<b>47</b>
5.1	Οι τύποι είναι ανώτερα ομαδοειδή	49
5.2	Οι συναρτήσεις είναι συναρτητές	51
5.3	Οι ομοτοπίες είναι φυσικοί μετασχηματισμοί	53
5.4	Οι οικογένειες τύπων είναι fibrations	54

5.4.1	Ετερογενής ισότητα	55
5.5	Ασκήσεις	59
<b>6</b>	<b>Λογική και σύνολα I</b>	<b>60</b>
6.1	Λογική κατά Curry-Howard	60
6.2	Συναρτήσεις επιλογής	61
6.3	Απλές προτάσεις	62
6.4	Σύνολα κ.λπ.	64
6.5	Ασκήσεις	65
<b>7</b>	<b>Ανώτεροι επαγωγικοί τύποι</b>	<b>66</b>
7.1	Τό διάστημα	66
7.2	Ο κύκλος	69
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>72</b>

**Μέρος Ι**

**Η θεωρία τύπων του  
Martin-Löf**

# Κεφάλαιο 1

## Τύποι και αναδρομή

Όλες οι θεωρίες τύπων πραγματεύονται τυχόντες τύπους. Εκείνο που τις διαφοροποιεί μεταξύ τους είναι ποιούς τύπους προβλέπει η κάθε μία να υπάρχουν και τί μπορεί να πει για αυτούς. Μία ιδιαιτερότητα της θεωρίας τύπων του Martin-Löf είναι ότι δεν προβλέπει την ύπαρξη οποιωνδήποτε συγκεκριμένων τύπων· αντ' αυτού, περιέχει τὰ μέσα για την περιγραφή τύπων. Οι τύποι που μπορούν να οριστούν έτσι είναι οι επαγωγικοί τύποι.

Ένας επαγωγικός τύπος  $A$  μπορεί να γίνει αντιληπτός διαισθητικά ως ένας τύπος που προσδιορίζεται από μηδέν ή περισσότερους κατασκευαστές, καθένας από τους οποίους είναι ένας τρόπος σχηματισμού (με παραμέτρους) στοιχείων του  $A$ . Αυτό περιλαμβάνει σαν ειδική περίπτωση κατασκευαστές χωρίς παραμέτρους, οι οποίοι είναι μεμονομένα στοιχεία του  $A$ .

### 1.1 Οι φυσικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί παράγονται από τό επαγωγικό σχήμα

- τό μηδέν είναι φυσικός αριθμός, και
- ο επόμενος καθενός φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός.

Σε τυποθεωρητικό συμβολισμό, η παραπάνω επαγωγική περιγραφή τών φυσικών αριθμών παίρνει τή μορφή

- $0 : \text{Nat}$ ,
- εάν  $n : \text{Nat}$ , τότε  $s(n) : \text{Nat}$ .

Επομένως, ο τύπος  $\text{Nat}$  έχει δύο κατασκευαστές: Τόν  $0$ , που δεν έχει παραμέτρους, και τόν  $s$ , που έχει μία παράμετρο η οποία είναι επίσης στοιχείο του  $\text{Nat}$  (οπότε είναι αναδρομικός κατασκευαστής). Αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι τὰ στοιχεία του  $\text{Nat}$  είναι τὰ

$$0, s(0), s(s(0)), \dots,$$

τὰ οποία καλούμε  $0, 1, 2$  και λοιπά.

Αν μάς έχει δοθεί ένα στοιχείο  $t(x)$  ενός τύπου  $A$  για κάθε στοιχείο  $x$  του τύπου  $A'$ , αυτό που έχουμε είναι μία οικογένεια στοιχείων του  $A$  παραμετροποιημένη από τόν

$A'$ , ή, στην ορολογία που θα υιοθετήσουμε, για έναν μετασχηματισμό τών στοιχείων του  $A'$  σε στοιχεία του  $A$ .

Προκειμένου να δηλώσουμε έναν τέτοιο μετασχηματισμό, γράφουμε

$$(x : A') t(x) : A$$

ή τον ισοδύναμο κανόνα σχηματισμού

$$\frac{x : A'}{t(x) : A}$$

και λέμε «για  $x$  στόν  $A'$ ,  $t(x)$  στόν  $A$ », ή «ένα στοιχείο  $t(x)$  του  $A$  για τό τυχόν στοιχείο  $x$  του  $A'$ ». Ο ίδιος ο μετασχηματισμός γράφεται

$$(x : A') t(x)$$

(και, ενίοτε, απλώς  $t$ ). Ομοίως, η έκφραση

$$(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) t(x_1, \dots, x_n) : A$$

δηλώνει έναν μετασχηματισμό με  $n$  τό πλήθος παραμέτρους. (Ένας μετασχηματισμός  $() t() : A$  με μηδέν τό πλήθος παραμέτρους δεν είναι παρά ένα στοιχείο του  $A$ . γενικά, στην έννοια του μετασχηματισμού συμπεριλαμβάνουμε και τά στοιχεία ως οριακή περίπτωση.)

Οι παράμετροι ενός μετασχηματισμού μπορεί να είναι οι ίδιες μετασχηματισμοί· αυτό αποτυπώνεται σε εκφράσεις όπως

$$(x : A, (y : B) z(y) : C) t(x, z),$$

όπου ο σημαινόμενος μετασχηματισμός έχει δύο παραμέτρους, εκ τών οποίων η μία είναι στοιχείο του  $A$  και η άλλη είναι μετασχηματισμός στοιχείων του  $B$  σε στοιχεία του  $C$ .

Περίπτωση μετασχηματισμού είναι και οι κατασκευαστές.

## 1.2 Αναδρομή στους φυσικούς αριθμούς

Οι κύριες χρησιμότητες τής επαγωγικής περιγραφής ενός τύπου είναι η διατύπωση ορισμών με αναδρομή και αποδείξεων με επαγωγή. Θα εξετάσουμε τώρα τήν περίπτωση τής αναδρομής· για τήν επαγωγή θα είμαστε σε θέση να μιλήσουμε μόλις εμπλουτίσουμε τή γλώσσα με οικογένειες τύπων.

Έστω  $C$  τύπος. Δοθέντων ενός  $c_0 : C$  και ενός ενός  $(x : \text{Nat}, y : C) c_s(x, y) : C$ , μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό  $(x : \text{Nat}) t(x) : C$  θέτοντας

$$\begin{aligned} t(0) & \equiv c_0, \\ t(s(n)) & \equiv c_s(n, t(n)). \end{aligned}$$

Λέμε ότι ο  $t$  ορίζεται με *αναδρομή* (*recursion*) από τά  $c_0$  και  $c_s$ · η δυνατότητα διατύπωσης τέτοιων ορισμών είναι η *αρχή τής αναδρομής* (*recursion principle*) για τόν  $\text{Nat}$ .

Ως πρώτο παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής αναδρομής, ας ορίσουμε έναν μετασχηματισμό  $(x : \text{Nat}) \text{pred}(x) : \text{Nat}$  που στέλνει τό μηδέν στό μηδέν και καθέναν άλλον φυσικόν αριθμό στόν προηγούμενό του· Στην περίπτωση αυτή, ο τύπος  $C$  είναι

ο  $\text{Nat}$  (ο μόνος τύπος που έχουμε αυτή τη στιγμή), και οι ορίζουσες σχέσεις έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \text{pred}(0) & \equiv 0, \\ \text{pred}(s(n)) & \equiv n. \end{aligned}$$

Πρόκειται δηλαδή για τó στιγμιότυπο τού γενικού σχήματος τής αναδρομής όπου τó  $c_0$  είναι τó 0 και τó  $c_s(x, y)$  είναι τó  $x$ .

Μπορούμε επίσης να ορίζουμε μετασχηματισμούς που έχουν περισσότερες από μία παραμέτρους, κάνοντας αναδρομή σε μία από αυτές. Τέτοια περίπτωση είναι η πρόσθεση φυσικών αριθμών, τήν οποία θα ορίσουμε με αναδρομή στόν δεξιό προσθετό:

$$\begin{aligned} m + 0 & \equiv m, \\ m + s(n) & \equiv s(m + n). \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι τó  $m + n$  ορίζεται με αναδρομή από τά  $m$  και  $(x : \text{Nat}, y : \text{Nat}) s(y)$ .

Ενίοτε δεν θέλουμε να δώσουμε όνομα στόν μετασχηματισμό που ορίζεται με αναδρομή· αυτό συμβαίνει π.χ. εάν θέλουμε να τόν αποτιμήσουμε αμέσως ή όταν εμφανίζεται ως όρισμα κάποιου άλλου μετασχηματισμού. Επίσης, για τή μεταμαθηματική μελέτη τής θεωρίας τύπων είναι απαραίτητο να μπορούμε να διατυπώσουμε τήν αρχή τής αναδρομής με τρόπο που να μην απαιτεί τήν προσθήκη στή γλώσσα ενός συμβόλου για κάθε ορίσιμο μετασχηματισμό. Αυτό τó επιτυγχάνουμε υποκαθιστώντας τήν αρχή τής αναδρομής με τó ένα και μοναδικό στιγμιότυπο αυτης στο οποίο τά  $c_0$  και  $c_s$  έχουν περάσει μέσα στόν συμβολισμό ως ρητές παράμετροι. Ορίζουμε λοιπόν τόν *αναδρομέα (recursor)*

$$(z : C, (x : \text{Nat}, y : C) w(x, y) : C, n : \text{Nat}) \text{rec}_{\text{Nat}}^C(z, w, n) : C$$

τού  $\text{Nat}$  μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} \text{rec}_{\text{Nat}}^C(z, w, 0) & \equiv z, \\ \text{rec}_{\text{Nat}}^C(z, w, s(n)) & \equiv w(n, \text{rec}_{\text{Nat}}^C(z, w, n)). \end{aligned}$$

Συνήθως δεν υπάρχει ανάγκη να δηλωθεί ο τύπος  $C$  στόν συμβολισμό, οπότε τόν παραλείπουμε και γράφουμε απλώς  $\text{rec}_{\text{Nat}}(z, w, n)$ .

Ο αναδρομέας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφραστεί οποιοσδήποτε αναδρομικός ορισμός. Ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού, λόγου χάριν, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\text{pred}(n) \equiv \text{rec}_{\text{Nat}}(0, (x : \text{Nat}, y : \text{Nat}) x, n),$$

ενώ τó άθροισμα δύο φυσικών αριθμών,

$$m + n \equiv \text{rec}_{\text{Nat}}(m, (x : \text{Nat}, y : \text{Nat}) s(y), n).$$

**Άσκηση 1.1.** Έχοντας τήν πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} m \cdot 0 & \equiv 0, \\ m \cdot s(n) & \equiv (m \cdot n) + m. \end{aligned}$$

Γράψτε τó  $m \cdot n$  χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού  $\text{Nat}$ . Προαιρετικά, συνεχίστε με τά  $m^n$  και  $n!$ .

Λύση.  $m \cdot n \equiv \text{rec}_{\text{Nat}}(0, (x, y : \text{Nat}) x + m, n)$ . □

### 1.3 Άλλα παραδείγματα τύπων

#### Λίστες

Οι λίστες στοιχείων ενός τύπου  $A$  συγκροτούν έναν τύπο  $\text{List}(A)$ , ο οποίος περιγράφεται από το επαγωγικό σχήμα

- $\text{nil}_A : \text{List}(A)$ , και
- εάν  $a : A$  και  $l : \text{List}(A)$ , τότε  $\text{cons}_A(a, l) : \text{List}(A)$ ,

όπου  $\text{nil}_A$  η κενή λίστα και  $\text{cons}_A(a, l)$  η προέκταση της  $l$  με την προσθήκη του  $a$ . Στην πράξη, τα subscripts θα παραλείπονται όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με το ποιός είναι ο  $A$ .

Η αρχή της αναδρομής για τον  $\text{List}(A)$  έχει την εξής μορφή: Εάν ο  $C$  είναι ένας οποιοσδήποτε τύπος, και μάς έχουν δοθεί ένα  $c_{\text{nil}} : C$  και ένα  $c_{\text{cons}}(x, y, z) : C$  για τυχόντα  $x : A$ ,  $y : \text{List}(A)$ , και  $z : C$ , οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\text{nil}) & \equiv c_{\text{nil}}, \\ t(\text{cons}(a, l)) & \equiv c_{\text{cons}}(a, l, t(l)) \end{aligned}$$

ορίζουν το  $t(l)$  για οποιαδήποτε λίστα  $l : \text{List}(A)$ . Για παράδειγμα, το μήκος  $\text{len}(l)$  μιας λίστας  $l$  ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \text{len}(\text{nil}) & \equiv 0, \\ \text{len}(\text{cons}(a, l)) & \equiv s(\text{len}(l)), \end{aligned}$$

και η συνένωση (concatenation)  $l + k$  δύο λιστών  $l$  και  $k$  ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \text{nil} + k & \equiv k, \\ \text{cons}(a, l) + k & \equiv \text{cons}(a, l + k), \end{aligned}$$

ενώ το άθροισμα  $\text{sum}(l)$  των στοιχείων μιας λίστας  $l$  φυσικών αριθμών ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \text{sum}(\text{nil}) & \equiv 0, \\ \text{sum}(\text{cons}(a, l)) & \equiv a + \text{sum}(l). \end{aligned}$$

Όπως κάναμε και με τον  $\text{Nat}$ , μπορούμε να «πακετάρουμε» την αρχή της αναδρομής του  $\text{List}(A)$  σε έναν αναδρομέα

$$(v : C, (x : A, y : \text{List}(A), z : C) w(x, y, z) : C, l : \text{List}(A)) \text{rec}_{\text{List}(A)}(v, w, l) : C$$

οριζόμενο από την αναδρομή

$$\begin{aligned} \text{rec}_{\text{List}(A)}(v, w, \text{nil}) & \equiv v, \\ \text{rec}_{\text{List}(A)}(v, w, \text{cons}(a, l)) & \equiv w(a, l, \text{rec}_{\text{List}(A)}(v, w, l)), \end{aligned}$$

οπότε το μήκος μιας λίστας μπορεί εναλλακτικά να οριστεί ως

$$\text{len}(l) \equiv \text{rec}_{\text{List}(A)}(0, (x : A, y : \text{List}(A), z : \text{Nat}) s(z), l),$$

η συνένωση δύο λιστών,

$$l + k \equiv \text{rec}_{\text{List}(A)}(k, (x : A, y : \text{List}(A), z : \text{List}(A)) \text{cons}(x, z), l),$$

και το άθροισμα μιας λίστας φυσικών αριθμών,

$$\text{sum}(l) \equiv \text{rec}_{\text{List}(\text{Nat})}(0, (x : A, y : \text{List}(A), z : \text{Nat}) x + z, l).$$

**Άσκηση 1.2.** Η συνένωση  $\text{cat}(L) : \text{List}(A)$  μιας λίστας  $L : \text{List}(\text{List}(A))$  λιστών μελών ενός τύπου  $A$  έχει τον αναδρομικό ορισμό

$$\begin{aligned} \text{cat}(\text{nil}_{\text{List}(A)}) & \equiv \text{nil}_A, \\ \text{cat}(\text{cons}_{\text{List}(A)}(l, L)) & \equiv l + \text{cat}(L). \end{aligned}$$

Γράψτε τό  $\text{cat}(L)$  χρησιμοποιώντας τον αναδρομέα του  $\text{List}(\text{List}(A))$ .

*Λύση.*  $\text{cat}(L) \equiv \text{rec}_{\text{List}(\text{List}(A))}(\text{nil}_A, (x : \text{List}(A), y : \text{List}(\text{List}(A)), z : \text{List}(A)) x + z, L)$ . □

## Δέντρα

Ο τύπος  $\text{BTree}$  των δυαδικών δέντρων συλλαμβάνεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\text{triv} : \text{BTree}$ ,
- εάν  $r : \text{BTree}$  και  $s : \text{BTree}$ , τότε  $\text{join}(r, s) : \text{BTree}$ .

Στόν  $\text{BTree}$  αντιστοιχεί η εξής αρχή αναδρομής: Δοθέντων ενός  $c_{\text{triv}} : C$  και ενός  $(x, y : \text{BTree}, z, w : C) c_{\text{join}}(x, y, z, w) : C$ , όπου  $C$  τυχών τύπος, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό  $(x : \text{BTree}) t(x) : C$  θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\text{triv}) & \equiv c_{\text{triv}}, \\ t(\text{join}(r, s)) & \equiv c_{\text{join}}(r, s, t(r), t(s)). \end{aligned}$$

**Άσκηση 1.3.** Περιγράψτε τή μορφή του  $\text{rec}_{\text{BTree}}$  και διατυπώστε τίς ορίζουσες σχέσεις του.

*Λύση.* Ο αναδρομέας του  $\text{BTree}$  είναι ο μετασχηματισμός

$$(x : C, (w_1, w_2 : \text{BTree}, w_3, w_4 : C) y(w_1, w_2, w_3, w_4) : C, z : \text{BTree}) \text{rec}_{\text{BTree}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned} \text{rec}_{\text{BTree}}(x, y, \text{triv}) & \equiv x, \\ \text{rec}_{\text{BTree}}(x, y, \text{join}(u, v)) & \equiv y(u, v, \text{rec}_{\text{BTree}}(x, y, u), \text{rec}_{\text{BTree}}(x, y, v)). \end{aligned} \quad \square$$

Τά δυαδικά δέντρα είναι ειδική περίπτωση δέντρων δεδομένης διακλάδωσης. Ο τύπος  $\text{Tree}(A)$  των δέντρων με τύπο διακλάδωσης  $A$  ορίζεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\text{triv}_A : \text{Tree}(A)$ ,
- εάν  $(x : A) b(x) : \text{Tree}(A)$ , τότε  $\text{join}_A(x : A) b(x) : \text{Tree}(A)$ .

Περιγραφικότερα, αυτό που λέει η δεύτερη ρήτρα είναι ότι εάν έχουμε ένα δέντρο  $b(x)$  για κάθε  $x : A$ , μπορούμε να ενώσουμε αυτά τά δέντρα με μία καινούργια ρίζα και να φτιάξουμε ένα μεγάλο δέντρο  $\text{join}_A(x : A) b(x)$ , τό οποίο περιέχει τά διάφορα  $b(x)$  ως άμεσα υποδέντρα. Για να επεκτείνουμε τόν ορισμό ενός μετασχηματισμού  $t$  στό  $\text{join}_A(x : A) b(x)$ , έχοντας ήδη διαθέσιμα τά  $t(b(x))$  για  $x : A$ , χρειαζόμαστε έναν μετασχηματισμό

$$((x : A) y(x) : \text{Tree}(A), (x : A) z(x) : C) c_{\text{join}_A}(y, z) : C$$

οπότε, μαζί με ένα  $c_{\text{triv}_A} : C$  μπορούμε να ορίσουμε τον  $t$  θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\text{triv}_A) & \equiv c_{\text{triv}_A}, \\ t(\text{join}_A(x : A) b(x)) & \equiv c_{\text{join}_A}((x : A) b(x), (x : A) t(b(x))). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο τύπος  $A$  εμφανίζεται αρνητικά στον κατασκευαστή  $\text{join}_A$ , οπότε αναμένεται ότι τό  $\text{Tree}(A)$  συναρτάται ανταλλοίωτα με τό  $A$ . Πράγματι, ένας μετασχηματισμός

$$(x : B) u(x) : A$$

επάγει μία αναπαραμετροποίηση δέντρων

$$(x : \text{Tree}(A)) \text{Tree}(u)(x) : \text{Tree}(B)$$

με ορισμό

$$\begin{aligned} \text{Tree}(u)(\text{triv}_A) & \equiv \text{triv}_B, \\ \text{Tree}(u)(\text{join}_A(x : A) b(x)) & \equiv \text{join}_B(y : B) \text{Tree}(u)(b(u(y))). \end{aligned}$$

**Άσκηση 1.4.** Περιγράψτε τον αναδρομέα του  $\text{Tree}(A)$ , και εκφράστε τον  $\text{Tree}(u)$  με τή βοήθειά του.

*Λύση.* Πρόκειται για τόν μετασχηματισμό

$$(x : C, ((a : A) v(a) : \text{Tree}(A), (a : A) w(a) : C) y(v, w) : C, z : \text{Tree}(A)) \text{rec}_{\text{Tree}(A)}(x, y, z) : C$$

που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \text{rec}_{\text{Tree}(A)}(x, y, \text{triv}_A) & \equiv x, \\ \text{rec}_{\text{Tree}(A)}(x, y, \text{join}_A(a : A) b(a)) & \equiv y((a : A) b(a), (a : A) \text{rec}_{\text{Tree}(A)}(x, y, b(a))). \end{aligned}$$

Ο  $\text{Tree}(u)$  γράφεται

$$\text{Tree}(u)(x) \equiv \text{rec}_{\text{Tree}(A)}(\text{triv}_B, ((a : A) v(a) : \text{Tree}(A), (a : A) w(a) : \text{Tree}(B)) \text{join}_B(y : B) w(u(y)), x).$$

□

**Άσκηση 1.5.** Στόν ορισμό του  $\text{List}(A)$ , ο τύπος  $A$  εμφανίζεται θετικά. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού  $(x : A) u(x) : B$  ορίστε, χρησιμοποιώντας τήν αρχή τής αναδρομής ή τόν αναδρομέα του  $\text{List}(A)$ , τόν μετασχηματισμό  $(x : \text{List}(A)) \text{List}(u)(x) : \text{List}(B)$  ο οποίος απεικονίζει μία λίστα μελών του  $A$  στη λίστα τών εικόνων τους μέσω του  $u$ .

*Λύση.* Με αναδρομή:

$$\begin{aligned} \text{List}(u)(\text{nil}_A) & \equiv \text{nil}_B, \\ \text{List}(u)(\text{cons}_A(a, l)) & \equiv \text{cons}_B(u(a), \text{List}(u)(l)). \end{aligned}$$

Με τόν αναδρομέα:

$$\text{List}(u)(l) \equiv \text{rec}_{\text{List}(A)}(\text{nil}_B, (x : \text{List}(A), y : A, z : \text{List}(B)) \text{cons}_B(u(y), z), x). \quad \square$$

## Αληθοτιμές

Ο Bool είναι ο τύπος που έχει ακριβώς δύο μέλη false και true· επομένως, περιγράφεται από τό επαγωγικό σχήμα

- false : Bool,
- true : Bool.

Η αρχή τής αναδρομής για τόν Bool εκφράζει τό γεγονός ότι προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό μελών τού Bool σε μέλη ενός τύπου  $C$  δεν έχουμε παρά να πούμε τί κάνει με τό false και τί με τό true· συγκεκριμένα, δοθέντων ενός  $c_{\text{false}} : C$  και ενός  $c_{\text{true}} : C$ , οι σχέσεις

$$\begin{aligned}t(\text{false}) &::= c_{\text{false}}, \\t(\text{true}) &::= c_{\text{true}}\end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό  $(x : \text{Bool})t(x) : C$ . Όπως πάντα, έχουμε έναν αναδρομέα

$$(x : C, y : C, z : \text{Bool}) \text{rec}_{\text{Bool}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned}\text{rec}_{\text{Bool}}(x, y, \text{false}) &::= x, \\ \text{rec}_{\text{Bool}}(x, y, \text{true}) &::= y.\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε τόν αληθοπίνακα τής διάζευξης μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned}\text{or}(b, \text{false}) &::= b, \\ \text{or}(b, \text{true}) &::= \text{true},\end{aligned}$$

ή, εναλλακτικά, με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού Bool,

$$\text{or}(b, c) ::= \text{rec}_{\text{Bool}}(b, \text{true}, c).$$

**Άσκηση 1.6.** Ορίστε τούς αληθοπίνακες τής σύζευξης, τής συνεπαγωγής, και τής άρνησης.

*Λύση.* Υπάρχουν διάφοροι τρόποι· π.χ., με αναδρομή στην πρώτη μεταβλητή:

$$\begin{aligned}\text{and}(b, c) &::= \text{rec}_{\text{Bool}}(\text{false}, c, b), \\ \text{ifthen}(b, c) &::= \text{rec}_{\text{Bool}}(\text{true}, c, b). \\ \text{not}(b) &::= \text{ifthen}(b, \text{false}).\end{aligned}$$

□

## 1.4 Ασκήσεις

**Άσκηση 1.7.** Για  $n : \text{Nat}$ , τό  $\text{iszero}(n) : \text{Bool}$  ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned}\text{iszero}(0) &::= \text{true}, \\ \text{iszero}(s(n)) &::= \text{false}.\end{aligned}$$

Γράψτε τό  $\text{iszero}(n)$  με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού Nat.

Λύση.  $\text{iszero}(n) := \text{rec}_{\text{Nat}}(\text{true}, (x : \text{Nat}, y : \text{Bool}) \text{false}, n)$ . □

**Άσκηση 1.8** (almost minus). Για  $m, n : \text{Nat}$ , η πράξη  $m \dot{-} n$  ορίζεται από την αναδρομή

$$\begin{aligned} m \dot{-} 0 &:= m, \\ m \dot{-} s(n) &:= \text{pred}(m \dot{-} n). \end{aligned}$$

Γράψτε τό  $m \dot{-} n$  χρησιμοποιώντας τόν  $\text{rec}_{\text{Nat}}$ .

Λύση.  $m \dot{-} n := \text{rec}_{\text{Nat}}(m, (x, y : \text{Nat}) \text{pred}(y), n)$ . □

**Άσκηση 1.9** (insertion sort). Ο μετασχηματισμός  $(a : A, l : \text{List}(A)) \text{insert}(a, l) : \text{List}(A)$  τής ένθεσης μέλους σε (ταξινομημένη) λίστα ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \text{insert}(a', \text{nil}) &:= \text{cons}(a', \text{nil}), \\ \text{insert}(a', \text{cons}(a, l)) &:= \text{rec}_{\text{Bool}}(\text{cons}(a, \text{insert}(a', l)), \text{cons}(a', \text{cons}(a, l)), a \leq a'), \end{aligned}$$

όπου  $a \leq a' := \text{iszero}(a \dot{-} a')$ . Χρησιμοποιήστε αυτόν τόν μετασχηματισμό για να περιγράψετε τόν αλγόριθμο ταξινόμησης insertion sort. (Πρόκειται για τόν αλγόριθμο ο οποίος, προκειμένου να ταξινομήσει μία λίστα  $\text{cons}(a, l)$ , ταξινομεί πρώτα τήν  $l$  και μετά κάνει insert τό  $a$ .)

Λύση. Με αναδρομή:

$$\begin{aligned} \text{isort}(\text{nil}) &:= \text{nil}, \\ \text{isort}(\text{cons}(a, l)) &:= \text{insert}(a, \text{isort}(l)). \end{aligned}$$

Με τόν αναδρομέα:

$$\text{isort}(l) := \text{rec}_{\text{List}(A)}(\text{nil}, (x : A, y, z : \text{List}(A)) \text{insert}(x, z), l). \quad \square$$

**Άσκηση 1.10.** Ορίστε ακολουθία  $(n : \text{Nat}) a_n$  με

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i.$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τόν  $\text{List}(\text{Nat})$ .]

Λύση. Ορίζουμε μία βοηθητική ακολουθία  $b_n : \text{List}(\text{Nat})$  με

$$\begin{aligned} b_0 &:= \text{nil}, \\ b_{s(n)} &:= \text{cons}(\text{sum}(b_n), b_n), \end{aligned}$$

και θέτουμε  $a_n := \text{sum}(b_n)$ . □

## Κεφάλαιο 2

# Οικογένειες τύπων και επαγωγή

Στό προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε κάποιες αρχές αναδρομής, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να εκφράσουμε μετασχηματισμούς μεταξύ των διαφόρων τύπων. Αυτό που φτιάξαμε, εν ολίγοις, είναι μία απλή συναρτησιακή γλώσσα. Ενδιαφερόμαστε όμως επίσης για τις ιδιότητες αυτών των μετασχηματισμών. Σε αυτό τό κεφάλαιο, καθώς και στο επόμενο, θα δούμε πώς μπορούμε, στο πλαίσιο της θεωρίας τύπων, να διατυπώνουμε και να αποδεικνύουμε προτάσεις.

Σε αντίθεση με άλλες μαθηματικές θεωρίες και θεμελιώσεις των μαθηματικών όπως η θεωρία συνόλων, στη θεωρία τύπων οι μαθηματικές προτάσεις, καθώς και οι αποδείξεις τους, είναι μαθηματικά αντικείμενα πρώτης κατηγορίας. Συγκεκριμένα, οι μαθηματικές προτάσεις αναπαρίστανται από τύπους, που μπορούν να θεωρηθούν ταυτόχρονα μαθηματικές δομές και μαθηματικοί ισχυρισμοί, μία σύλληψη γνωστή ως *propositions-as-types*. Υπό αυτή τη σκοπιά, τά στοιχεία ενός τύπου νοούνται ως *τεκμήρια* ή *μάρτυρες* αλήθειας της αντίστοιχης πρότασης. (Μερικές φορές λέγονται επίσης αποδείξεις, αλλά αυτή η ορολογία μπορεί να είναι παραπλανητική, επομένως γενικά τήν αποφεύγουμε.) Μία άμεση μεθοδολογική συνέπεια είναι ότι προκειμένου να δείξουμε ότι μία πρόταση αληθεύει δεν έχουμε παρά να εμφανίσουμε ένα στοιχείο του τύπου που αντιστοιχεί σε αυτή τήν πρόταση.

Ωστόσο, αυτή η οπτική σχετικά με τις αποδείξεις διαφέρει ουσιωδώς από τή συνήθη. Ο τρόπος με τον οποίο η λογική γίνεται αντιληπτή από τή θεωρία τύπων είναι ότι μια πρόταση δεν είναι απλώς αληθής ή ψευδής, αλλά μάλλον μπορεί να νοηθεί ως η συλλογή όλων των δυνατών τεκμηρίων αλήθειας της. Σύμφωνα με αυτήν τή σύλληψη, οι αποδείξεις δεν είναι μόνο τό μέσο επικοινωνίας των μαθηματικών, αλλά αποτελούν και οι ίδιες αντικείμενο μελέτης ισότιμο με πιο οικεία αντικείμενα όπως οι αριθμοί και οι συναρτήσεις.

### 2.1 Οικογένειες τύπων

Θα μιλήσουμε τώρα για τό ένα από τά δύο δομικά στοιχεία των προτάσεων, τά κατηγορήματα· τό άλλο, οι λογικές σταθερές (οι σύνδεσμοι και οι ποσοδείκτες), είναι τό αντικείμενο του επόμενου κεφαλαίου.

Μία *οικογένεια τύπων* (*type family*) είναι ένας μετασχηματισμός των στοιχείων κάποιων τύπων σε τύπους. Σε μία οικογένεια  $(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n) A(x_1, \dots, x_n)$ , οι

$A_1, \dots, A_n$  λέγονται *τύποι δεικτών* (*indexing types*), και οι επιμέρους τύποι  $A(x_1, \dots, x_n)$  λέγονται *στιγμιότυπα* (*instances*) τής οικογένειας.

Οι οικογένειες τύπων, που επίσης λέγονται εξαρτώμενοι τύποι (*dependent types*), ήταν μία από τις σημαντικότερες καινοτομίες τής θεωρίας τύπων του Martin-Löf. Τυπικά παραδείγματα οικογενειών τύπων αποτελούν τά διάφορα κατηγορήματα  $(x, y : A)x = y$ ,  $(x : \text{Nat})\text{Prime}(x)$  κ.λπ. που συναντάμε στά μαθηματικά. Ένα στοιχειώδες, αλλά σημαντικό, παράδειγμα οικογένειας είναι η σταθερή οικογένεια  $(x : A) B$  όπου  $A$  και  $B$  είναι τύποι. Και βέβαια, μία οικογένεια  $(\ ) A()$  με μηδέν τό πλήθος ορίσματα δεν είναι παρά ένας τύπος.

Ο απλούστερος τρόπος να ορίσουμε μία οικογένεια είναι προδιαγράφοντας κατασκευαστές στά διάφορα στιγμιότυπά της, όπως κάναμε ήδη για μεμονωμένους τύπους. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τόν τρόπο για να ορίσουμε τήν ισότητα. Μάλιστα, θα τήν ορίσουμε με δύο τρόπους: Πρώτα σαν οικογένεια ως προς τό ένα από τα δύο σκέλη (με τό άλλο να λειτουργεί σαν παράμετρος), και μετά σαν οικογένεια ως προς αμφότερα τά σκέλη.

## 2.2 Βασισμένη ισότητα

Έστω  $a : A$ , όπου  $A$  τύπος. Η *ισότητα προς  $a$*  είναι η οικογένεια

$$(x : A) a =_A x$$

που έχει τόν μοναδικό κατασκευαστή

$$\text{refl}_a : a =_A a.$$

Εφ' όσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης (ο  $A$  προσδιορίζεται μονοσήμαντα ως ο τύπος τών σκελών τής ισότητας), ο δείκτης παραλείπεται και γράφουμε, απλούστερα,  $a = b$ . Πρέπει, ωστόσο, να θυμόμαστε ότι πρόκειται για μία διαφορετική οικογένεια για κάθε τύπο  $A$  και για κάθε στοιχείο  $a$  αυτού.

Η ισότητα προς  $a$  λέγεται επίσης *βασισμένη* (*based*) ισότητα, διότι τό ένα σκέλος (τό αριστερό στόν συμβολισμό μας) κρατιέται σταθερό, σε αντιδιαστολή με τήν (απλώς) ισότητα που θα ορίσουμε παρακάτω, η οποία είναι οικογένεια ως προς αμφότερα τά σκέλη. Οι δύο ορισμοί διαφέρουν όσον αφορά τή μορφή τού αναδρομέα, αλλά είναι ισοδύναμοι· για τόν λόγο αυτόν χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο.

Σχετικά με τήν αρχή τής αναδρομής, παρατηρήστε ότι η ισότητα προς  $a$  είναι οικογένεια, οπότε αυτό που ορίζεται είναι μετασχηματισμοί προς οικογένειες επί τού ίδιου τύπου δεικτών  $A$ , και επίσης ότι έχουμε μόνο έναν κατασκευαστή, οπότε αρκεί να πούμε τί κάνει ένας τέτοιος μετασχηματισμός με αυτόν. Αναλυτικότερα, ας θεωρήσουμε ότι μάς έχουν δοθεί

- μία οικογένεια  $(x : A) C(x)$ , και
- ένα στοιχείο  $c_{\text{refl}_a}$  τού  $C(a)$ .

Τότε, η σχέση

$$t(a, \text{refl}_a) := c_{\text{refl}_a}$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό  $(x : A, p : a = x) t(x, p) : C(x)$ .

Αν συγκρίνουμε αυτή τήν αρχή αναδρομής με εκείνες τών μεμονωμένων τύπων, θα παρατηρήσουμε ότι εδώ έχουμε ένα παραπάνω όρισμα, ο ρόλος τού οποίου είναι να προσδιορίζει σε ποιο στιγμιότυπο βρισκόμαστε κάθε φορά.

Ο αναδρομέας τής ισότητας προς  $a$  είναι ο μετασχηματισμός

$$(b : A, c : C(a), p : a = b) \text{rec}_{a=b}^C(c, p) : C(b) \quad (2.1)$$

που ορίζεται από την αναδρομή

$$\text{rec}_{a=a}^C(c, \text{refl}_a) \equiv c. \quad (2.2)$$

Ο κανόνας σχηματισμού τού αναδρομέα (συμπεριλαμβάνοντας και τήν παράμετρο  $a$ ) μάς δίνει τήν ευκαιρία να εισαγάγουμε τόν συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε στό εξής:

$$\frac{a : A \quad b : A \quad c : C(a) \quad p : a = b}{\text{transport}^C(p, c) \equiv \text{rec}_{a=b}^C(c, p) : C(b)}. \quad (2.3)$$

Ο συμβολισμός  $\text{transport}^C(p, c)$  προέρχεται από τήν ομοτοπική θεωρία τύπων και διαβάζεται «μεταφορά τού  $c : C(a)$  στό  $C(b)$  κατά μήκος τού  $p : a = b$ ».

Αν από τόν (2.3) διατηρήσουμε μόνο τούς τύπους εκείνους που είναι ερμηνεύσιμοι ως προτάσεις, παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C(a) \quad a = b}{C(b)} \quad (=^*E)$$

τής βασισμένης ισότητας, γνωστό και ως *indiscernibility of identicals*, ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι τά ίσα μοιράζονται τίς ίδιες ιδιότητες.

Όπως αναμένεται, η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. Η ανακλαστικότητα εξασφαλίζεται από τόν κανόνα εισαγωγής

$$\overline{a = a} \quad (=I)$$

τής ισότητας, ο οποίος προκύπτει από τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{a : A}{\text{refl}_a : a = a}$$

τού  $\text{refl}_a$ . Εν συνεχεία, αν θεωρήσουμε τήν οικογένεια  $(x : A) C(x)$  με

$$C(x) \equiv x = a,$$

ο  $(=^*E)$  παίρνει τή μορφή

$$\frac{\overline{a = a} \quad a = b}{b = a}.$$

Αν επαναφέρουμε τά στοιχεία, παίρνουμε τήν τυποθεωρητική κατασκευή

$$\frac{\text{refl}_a : a = a \quad p : a = b}{\text{transport}^{-a}(p, \text{refl}_a) : b = a}.$$

**Λήμμα 2.2.1** (Συμμετρία). Για  $a, b : A$  και  $p : a = b$  ορίζεται πράξη

$$p^{-1} \equiv \text{transport}^{-a}(p, \text{refl}_a) : b = a.$$

Επιπλέον,  $\text{refl}_a^{-1} \equiv \text{refl}_a$ .

Τέλος, αν θέσουμε  $C(x) := a = x$ , παίρνουμε την απαγωγή

$$\frac{a = b \quad b = c}{a = c}.$$

Αν επαναφέρουμε τά στοιχεία, παίρνουμε την τυποθεωρητική κατασκευή

$$\frac{p : a = b \quad q : b = c}{\text{transport}^{a=}(q, p) : a = c}.$$

**Λήμμα 2.2.2** (Μεταβατικότητα). Για  $a, b, c : A$ ,  $p : a = b$ , και  $q : b = c$  ορίζεται πράξη

$$p \cdot q := \text{transport}^{a=}(q, p) : a = c.$$

Επιπλέον,  $\text{refl}_a \cdot \text{refl}_a \equiv \text{refl}_a$ .

Άλλο πόρισμα του ( $=^*E$ ) είναι ότι η βασισμένη ισότητα διατηρείται από μετασχηματισμούς προκειμένου για έναν μετασχηματισμό  $(x : A) u(x) : B$ , τό ζητούμενο προκύπτει θεωρώντας στή θέση του  $C(x)$  τό  $u(a) = u(x)$ . Τό επόμενο λήμμα εισάγει έναν χρήσιμο συμβολισμό.

**Λήμμα 2.2.3.** Έστω  $(x : A) u(x) : B$  μετασχηματισμός. Για οποιαδήποτε  $a, b : A$  και  $p : a = b$ , ορίζεται

$$u(p) : u(a) = u(b),$$

ούτως ώστε  $u(\text{refl}_a) \equiv \text{refl}_{u(a)}$ .

*Απόδειξη.* Θα ορίσουμε τό  $u(p)$  με αναδρομή στό  $p$ . Θεωρούμε λοιπόν, για  $a : A$ , τήν οικογένεια  $(x : A) u(a) = u(x)$ , τήν οποία θα γράφουμε συντομότερα  $u(a) = u(\_)$ , και ορίζουμε τόν μετασχηματισμό  $(x : A, p : a = x) t(x, p) : u(a) = u(x)$  μέσω τής αναδρομής

$$t(a, \text{refl}_a) := \text{refl}_{u(a)} : u(a) = u(a).$$

Για  $p : a = b$  θέτουμε  $u(p) := t(b, p)$ . Τό δεύτερο ζητούμενο είναι άμεσο:

$$u(\text{refl}_a) \equiv t(a, \text{refl}_a) \equiv \text{refl}_{u(a)}. \quad \square$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε απ' ευθείας τό  $u(p)$  επικαλούμενοι τόν αναδρομεία τής ισότητας:

$$u(p) := \text{transport}^{u(a)=u(\_)}(p, \text{refl}_{u(a)}).$$

Αυστηρά μιλώντας, θα έπρεπε να γράφουμε  $u(a, b, p)$  αντί για  $u(p)$ , αλλά ακολουθούμε τήν πρακτική τής παράλειψης τών εννοουμένων. Επιπλέον, θεωρητικά, ο συμβολισμός αυτός είναι διφορούμενος (χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο για έναν μετασχηματισμό στοιχείων του  $A$  και έναν μετασχηματισμό στοιχείων του  $a = b$ ), αλλά στή πράξη δεν προκαλεί σύγχυση. Ακολουθεί τήν καθιερωμένη στή θεωρία κατηγοριών πρακτική τής χρήσης του ίδιου συμβόλου για τήν εφαρμογή ενός συναρτητή σε αντικείμενα και σε μορφισμούς.

## 2.3 Επαγωγή

Η προσθήκη οικογενειών τύπων στη θεωρία μάς δίνει τη δυνατότητα να ισχυροποιήσουμε τις αρχές αναδρομής των διαφορών τύπων. Θα πάρουμε ως παράδειγμα τους φυσικούς αριθμούς: Η έννοια ενός αναδρομικού ορισμού

$$\begin{aligned} t(0) & \equiv c, \\ t(s(n)) & \equiv f_n(t(n)), \end{aligned}$$

όπου  $c : C$  και  $(n : \text{Nat}, x : C) f_n(x) : C$ , είναι ότι ο  $t$  μπορεί να υπολογιστεί σε βήματα:

$$\begin{aligned} t(0) & \equiv c, \\ t(1) & \equiv f_0(t(0)), \\ t(2) & \equiv f_1(t(1)), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής. Σχηματικά, οι τιμές του  $t$  λαμβάνονται «κυνηγώντας» τό  $c$  κατά μήκος του διαγράμματος

$$C \xrightarrow{f_0} C \xrightarrow{f_1} C \xrightarrow{f_2} \dots$$

Η ίδια, όμως, διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται και στο γενικότερο διάγραμμα

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \dots,$$

όπου, αντί για έναν τύπο  $C$ , έχουμε μία οικογένεια τύπων  $(n : \text{Nat}) C_n$ . Οδηγούμαστε έτσι στην αρχή της επαγωγής του  $\text{Nat}$ : Δοθέντων

- μιας οικογένειας  $(x : \text{Nat}) C(x)$ ,
- ενός  $c_0 : C(0)$ , και
- ενός μετασχηματισμού  $(x : \text{Nat}, y : C(x)) c_s(x, y) : C(s(x))$ ,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(0) & \equiv c_0, \\ t(s(n)) & \equiv c_s(n, t(n)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό

$$(x : \text{Nat}) t(x) : C(x).$$

Με ανάλογο τρόπο γενικεύονται οι αρχές αναδρομής των άλλων τύπων. Η αρχή της επαγωγής για τον  $\text{List}(A)$ , π.χ., διαμορφώνεται ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας  $(x : \text{List}(A)) C(x)$ ,
- ενός  $c_{\text{nil}} : C(\text{nil})$ , και
- ενός μετασχηματισμού  $(x : A, y : \text{List}(A), z : C(x)) c_{\text{cons}}(x, y, z) : C(\text{cons}(x, y))$ ,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\text{nil}) & \equiv c_{\text{nil}}, \\ t(\text{cons}(a, l)) & \equiv c_{\text{cons}}(a, l, t(l)), \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό  $(x : \text{List}(A)) t(x) : C(x)$ .

**Άσκηση 2.1.** Διατυπώστε τις αρχές επαγωγής των  $\text{Tree}(A)$  και  $\text{Bool}$ .

*Λύση.* Διατυπώνουμε την αρχή επαγωγής για τον  $\text{Tree}(A)$ : Δοθέντων

- μιας οικογένειας  $(x : \text{Tree}(A)) C(x)$ ,
- ενός  $c_{\text{triv}_A} : C(\text{triv}_A)$ , και
- ενός μετασχηματισμού  $((x : A) y(x) : \text{Tree}(A), (x : A) z(x) : C) c_{\text{join}_A}(y, z) : C(\text{join}_A(x : A) y(x))$ ,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\text{triv}_A) & \equiv c_{\text{triv}_A}, \\ t(\text{join}_A(x : A) b(x)) & \equiv c_{\text{join}_A}((x : A) b(x), (x : A) t(b(x))) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό  $(x : \text{Tree}(A)) t(x) : C(x)$ . □

Η αρχή της επαγωγής του  $\text{Nat}$  οφείλει την ονομασία της στο ότι εμπεριέχει την οικεία μέθοδο απόδειξης ιδιοτήτων των φυσικών με επαγωγή: Εάν  $\phi(x)$  είναι μία ιδιότητα φυσικών αριθμών, από μία απόδειξη  $c_0$  της  $\phi(0)$  και μία απόδειξη  $c_s(x, y)$  της  $\phi(s(x))$  από την  $\phi(x)$  λαμβάνουμε, μέσω του μετασχηματισμού  $t$  που ορίζεται με επαγωγή από τα  $c_0$  και  $c_s$ , μία απόδειξη  $t(x)$  της  $\phi(x)$  για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό  $x$ . Αυτό είναι σκόπιμο να το διατυπώσουμε ξεχωριστά:

*Αρχή της απόδειξης με επαγωγή στον  $\text{Nat}$ :* Προκειμένου να αποδείξουμε τό  $C(n)$  για τόν τυχόντα φυσικό αριθμό  $n$ , αρκεί

- να δείξουμε τό  $C(0)$ , και
- να δείξουμε τό  $C(s(n))$  από τό  $C(n)$ , για τυχόν  $n$ .

Η γενίκευση τού αναδρομέα για την αρχή της επαγωγής ονομάζεται *επαγωγέας* και συμβολίζεται  $\text{ind}$ : για τούς φυσικούς αριθμούς, έχει τή μορφή

$$\frac{z : C(0) \quad (x : \text{Nat}, y : C(x)) w(x, y) : C(s(x)) \quad n : \text{Nat}}{\text{ind}_{\text{Nat}}(z, w, n) : C(n)}.$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής της αρχής της επαγωγής, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόσθεση φυσικών αριθμών είναι αντιμεταθετική,

$$n + m = m + n,$$

με επαγωγή στο  $n$ . Αφ' ενός έχουμε να δείξουμε ότι  $0 + m = m + 0$ , τό οποίο, δεδομένου ότι  $m + 0 \equiv m$ , γράφεται ισοδύναμα

$$0 + m = m. \tag{2.4}$$

Αφ' ετέρου, έχουμε να δείξουμε ότι εάν  $n + m = m + n$ , τότε  $s(n) + m = m + s(n)$ , τό οποίο, δεδομένου ότι  $m + s(n) \equiv s(m + n)$ , και αξιοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, γράφεται ισοδύναμα

$$s(n) + m = s(n + m). \tag{2.5}$$

Παρατηρήστε ότι οι σχέσεις (2.4) και (2.5) είναι οι ορίζουσες σχέσεις τής πρόσθεσης αντεστραμμένες· αυτό φαίνεται καλύτερα εάν θεσούμε  $m +' n := n + m$ :

$$\begin{aligned} m +' 0 &= m, \\ m +' s(n) &= s(m +' n). \end{aligned}$$

Αυτό που μόλις διαπιστώσαμε είναι ειδική περίπτωση τού εξής αποτελέσματος.

**Θεώρημα 2.3.1** (μοναδικότητα τού definiendum). *Ας θεωρήσουμε τόν αναδρομικό ορισμό*

$$\begin{aligned} t(0) &::= c_0, \\ t(s(n)) &::= c_s(n, t(n)), \end{aligned}$$

όπου  $c_0 : C$  και  $(n : \text{Nat}, x : C) c_s(n, x) : C$ , και ας υποθέσουμε ότι μάς έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός  $(n : \text{Nat}) u(n) : C$  μαζί με τά εξής δεδομένα:

1. ένα  $p_0 : u(0) = c_0$ , και
2. ένα  $p_s(n) : u(s(n)) = c_s(n, u(n))$  για κάθε  $n : \text{Nat}$ .

Τότε, ορίζεται μετασχηματισμός

$$(n : \text{Nat}) p(n) : u(n) = t(n).$$

*Απόδειξη.* Θα ορίσουμε τόν  $p$  με επαγωγή. Η μία ρήτρα τού ορισμού είναι προφανής:

$$p(0) ::= p_0 : u(0) = c_0 \equiv t(0). \quad (2.6)$$

Όσον αφορά τήν άλλη, εάν  $p(n) : u(n) = t(n)$ , τότε παίρνουμε

$$p_s(n) : u(s(n)) = c_s(n, u(n))$$

και

$$c_s(n, p(n)) : c_s(n, u(n)) = c_s(n, t(n)) \equiv t(s(n))$$

(με τόν συμβολισμό που εισαγάγαμε παραπάνω για τό  $c_s(n, \_)(p(n))$ ), οπότε μπορούμε να επικαλεστούμε τή μεταβατικότητα τής ισότητας και να θέσουμε

$$p(s(n)) ::= p_s(n) \cdot c_s(n, p(n)) : u(s(n)) = t(s(n)). \quad (2.7)$$

Ο  $p$  ορίστηκε με επαγωγή από τίσ (2.6) και (2.7). □

**Άσκηση 2.2.** Συμπληρώστε τήν απόδειξη τής αντιμεταθετικότητας τής πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, ορίστε, με επαγωγή στό  $m$ , μετασχηματισμούς

$$(m : \text{Nat}) p_0(m) : 0 + m = m$$

και

$$(n, m : \text{Nat}) p_s(n, m) : s(n) + m = s(n + m)$$

και μετά εφαρμόστε τό θεώρημα 2.3.1 για να συμπεράνετε ότι  $n + m = m + n$  για οποιαδήποτε  $m, n : \text{Nat}$ .

Λύση. Για να ορίσουμε τό  $p_0$  χρειαζόμαστε, αφ' ενός, ένα

$$p_0(0) : 0 + 0 = 0.$$

Εν τώ μεταξύ,  $0 + 0 \equiv 0$ , οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$p_0(0) := \text{refl}_0.$$

Αφ' ετέρου, υποθέτοντας ότι έχουμε ορίσει τό  $p_0(m) : 0 + m = m$ , χρειαζόμαστε ένα

$$p_0(s(m)) : 0 + s(m) = s(m).$$

Εφ' όσον  $0 + s(m) \equiv s(0 + m)$ , μπορούμε να θέσουμε

$$p_0(s(m)) := s(p_0(m)).$$

Για τό  $p_s$  χρειαζόμαστε, κατά πρώτον, ένα

$$p_s(n, 0) : s(n) + 0 = s(n + 0).$$

Τά σκέλη αυτής τής ισότητας υπολογίζονται:

$$s(n) + 0 \equiv s(n),$$

$$s(n + 0) \equiv s(n).$$

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε

$$p_s(n, 0) := \text{refl}_{s(n)}.$$

Κατά δεύτερον, χρειάζεται από τό  $p_s(n, m) : s(n) + m = s(n + m)$  να ορίσουμε τό

$$p_s(n, s(m)) : s(n) + s(m) = s(n + s(m)).$$

Τά σκέλη αυτής τής ισότητας υπολογίζονται:

$$s(n) + s(m) \equiv s(s(n) + m),$$

$$s(n + s(m)) \equiv s(s(n + m)).$$

Μπορούμε, επομένως, να θέσουμε

$$p_s(n, s(m)) := s(p_s(n, m)).$$

Εάν θεωρήσουμε ένα  $m : \text{Nat}$ , τό ζητούμενο,  $n + m = m + n$  για οποιοδήποτε  $n : \text{Nat}$ , λαμβάνεται ως τό συμπέρασμα του θεωρήματος 2.3.1 εάν θέσουμε

- όπου  $c_0$  τό  $m$ ,
- όπου  $c_s(n, x)$  τό  $s(x)$ ,
- όπου  $u(n)$  τό  $n + m$ ,
- όπου  $p_0$  τό  $p_0(m)$ ,
- όπου  $p_s(n)$  τό  $p_s(n, m)$ .

□

**Άσκηση 2.3.** Διατυπώστε και αποδείξτε τό ανάλογο τού θεωρήματος 2.3.1 για λίστες.

*Λύση.* Η μοναδικότητα τού definiendum για αναδρομές επί τού  $\text{List}(A)$  διατυπώνεται ως εξής: Αν θεωρήσουμε ένα  $c_{\text{nil}} : C$  και ένα  $(x : A, y : \text{List}(A), z : C) c_{\text{cons}}(x, y, z) : C$ , καθώς και έναν μετασχηματισμό  $(x : \text{List}(A)) u(x) : C$  που ικανοποιεί τίς σχέσεις

1.  $u(\text{nil}) = c_{\text{nil}}$ , και
2.  $u(\text{cons}(a, l)) = c_{\text{cons}}(a, l, u(l))$  για οποιαδήποτε  $a : A$  και  $l : \text{List}(A)$ ,

τότε

$$u(l) = \text{rec}_{\text{List}(A)}(c_{\text{nil}}, c_{\text{cons}}, l)$$

για όλα τά  $l : \text{List}(A)$ .

Η ζητούμενη ισότητα θα αποδειχθεί με επαγωγή στό  $l$ . Αφ' ενός,

$$\begin{aligned} u(\text{nil}) &= c_{\text{nil}} \\ &\equiv \text{rec}_{\text{List}(A)}(c_{\text{nil}}, c_{\text{cons}}, \text{nil}). \end{aligned}$$

Αφ' ετέρου, αν υποθέσουμε ότι  $u(l) = \text{rec}_{\text{List}(A)}(c_{\text{nil}}, c_{\text{cons}}, l)$ , τότε

$$\begin{aligned} u(\text{cons}(a, l)) &= c_{\text{cons}}(a, l, u(l)) \\ &= c_{\text{cons}}(a, l, \text{rec}_{\text{List}(A)}(c_{\text{nil}}, c_{\text{cons}}, l)) \\ &\equiv \text{rec}_{\text{List}(A)}(c_{\text{nil}}, c_{\text{cons}}, \text{cons}(a, l)). \end{aligned} \quad \square$$

## 2.4 Ισότητα

Έστω  $A$  τύπος. Η ισότητα τού  $A$  είναι η οικογένεια

$$(x, y : A) x =_A y$$

που ορίζεται από τή μοναδική ρήτρα

- για  $x : A$ ,  $\text{refl}_x : x =_A x$ .

Σε αντίθεση με τή βασισμένη ισότητα, η ισότητα είναι οικογένεια ως προς αμφοτέρα τά σκέλη, και μάλιστα ο ορισμός της είναι συμμετρικός. Κατ' επέκταση, η αναδρομή στην ισότητα ορίζει μετασχηματισμούς προς οικογένειες εξαρτώμενες, γενικά, από δύο παραμέτρους. Αναλυτικότερα, δοθέντων

- μιας οικογένειας  $(x, y : A) C(x, y)$ , και
- ενός μετασχηματισμού  $(x : A) c_{\text{refl}}(x) : C(x, x)$ ,

η σχέση

$$t(x, x, \text{refl}_x) := c_{\text{refl}}(x)$$

ορίζει τό  $t(x, y, p) : C(x, y)$  για τυχόντα  $x, y : A$  και  $p : x = y$ .

Ο αναδρομέας

$$(a, b : A, (x : A) c(x) : C(x, x), p : a = b) \text{rec}_{a=b}^C(c, p) : C(a, b)$$

τής ισότητας ορίζεται από την αναδρομή

$$\text{rec}_{x=x}^C(c, \text{refl}_x) := c(x)$$

και έχει τον κανόνα σχηματισμού

$$\frac{a, b : A \quad (x : A) c(x) : C(x, x) \quad p : a = b}{\text{rec}_{a=b}^C(c, p) : C(a, b)},$$

ο οποίος μάς δίνει τον άλλον κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C(x, x) \quad a = b}{C(a, b)} \quad (=E)$$

τής ισότητας (με τον περιορισμό ότι τό  $x$  δεν εμφανίζεται ελεύθερο σε ανοιχτές υποθέσεις πάνω από τό  $C(x, x)$ ), ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι η ισότητα είναι η ελάχιστη ανακλαστική σχέση. Ειδικότερα, εφ' όσον η βασισμένη ισότητα είναι ανακλαστική σχέση, έπεται ότι η ισότητα συνεπάγεται τή βασισμένη ισότητα. Ισχύει και τό αντίστροφο.

Για τίς ανάγκες αυτής τής ενότητας, η βασισμένη ισότητα θα συμβολίζεται  $=^*$ . Αφ' ενός, ο  $(=E)$  μάς δίνει

$$\frac{\overline{x =^* x} \quad a = b}{a =^* b}$$

Επαναφέροντας τή διακόσμηση παίρνουμε τό τυποθεωρητικό γεγονός

$$u(p) := \text{rec}_{a=b}^{(x,y:A) x=y}((x:A) \text{refl}_x^*, p) : a =^* b$$

Αφ' ετέρου, θέτοντας  $C(x) := a = x$  στον  $(=^*E)$ , παίρνουμε τήν απαγωγή

$$\frac{\overline{a = a} \quad a =^* b}{a = b},$$

και τό αντίστοιχο τυποθεωρητικό γεγονός

$$v(q) := \text{transport}^{a=}(q, \text{refl}_a) : a = b$$

**Λήμμα 2.4.1.** *Η ισότητα και η βασισμένη ισότητα είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα,*

1. Για  $a, b : A$  και  $p : a = b$  ορίζεται  $u(p) : a =^* b$ .
2. Για  $a, b : A$  και  $q : a =^* b$  ορίζεται  $v(q) : a = b$ .

Η ύπαρξη τών παραπάνω μετασχηματισμών  $u$  και  $v$  σημαίνει ότι οι δύο ισότητες είναι λογικώς ισοδύναμες ως προτάσεις. Ισχύει κάτι περισσότερο: Οι  $u$  και  $v$  είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

**Λήμμα 2.4.2.** *Για  $a, b : A$ ,  $p : a = b$ , και  $q : a =^* b$ ,*

$$\begin{aligned} v(u(p)) &= p, \\ u(v(q)) &= q. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι εδώ έχουμε να κάνουμε με ισότητες μεταξύ στοιχείων κάποιας ισότητας. Κάθε ισότητα, εφ' όσον είναι τύπος, είναι εφοδιασμένη με τη δική της ισότητα, κι αυτό δημιουργεί μία ιεραρχία

$$a =_A b \quad p =_{a=_A b} q \quad r =_{p=_{a=_A b} q} s \quad \dots$$

ισότητων που δεν καταρρέει, γενικά, σε κανένα πεπερασμένο στάδιο<sup>1</sup>.

Σύμφωνα με τό λήμμα 2.4.2, οι δύο ισότητες ταυτίζονται ως τύποι (τί ακριβώς σημαίνει αυτό θα φανεί όταν θα μιλήσουμε για univalence). Αυτή είναι μία πολύ πιο ισχυρή σχέση από τη λογική ισοδυναμία. Στά επόμενα δεν θα διακρίνουμε ανάμεσα στις δύο ισότητες· θα χρησιμοποιούμε τό σύμβολο «=» για αμφότερες, όπως κάναμε μέχρι τώρα, και όταν εννοούμε τη βασισμένη ισότητα, αυτό θα διευκρινίζεται.

Τό λήμμα αποδεικνύεται με επαγωγή στά  $p$  και  $q$  αντίστοιχα. Θα χρειαστεί να διατυπώσουμε πρώτα τις αρχές επαγωγής των δύο ισότητων. Για τήν ισότητα προς  $a$ , η αρχή τής επαγωγής έχει ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας  $(x : A, p : a = x) C(x, p)$ , και
- ενός  $c_{\text{refl}_a} : C(a, \text{refl}_a)$ ,

η σχέση

$$t(a, \text{refl}_a) := c_{\text{refl}_a}$$

ορίζει τό  $t(x, p) : C(x, p)$  για οποιαδήποτε  $x : A$  και  $p : a = x$ .

Αυτή η αρχή μάς δίνει τη λογική αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στη βασισμένη ισότητα: Έστω  $a : A$ . Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα  $C(x, p)$  για όλα τά  $x : A$  και  $p : a = x$ , αρκεί να δείξουμε τό  $C(a, \text{refl}_a)$ .

Η αρχή επαγωγής τής ισότητας λέει ότι, δοθέντων

- μιας οικογένειας  $(x, y : A, p : x = y) C(x, y, p)$ , και
- ενός  $c_{\text{refl}_x}(x) : C(x, x, \text{refl}_x)$  για κάθε  $x : A$ ,

η σχέση

$$t(x, x, \text{refl}_x) := c_{\text{refl}_x}(x)$$

ορίζει τό  $t(x, y, p)$  για τυχόντα  $x, y : A$  και  $p : x = y$ .

Και αυτή η αρχή μάς οδηγεί σε μία αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στην ισότητα: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα  $C(x, y, p)$  για όλα τά  $x, y : A$  και  $p : x = y$ , αρκεί να δείξουμε τό  $C(x, x, \text{refl}_x)$  για τυχόν  $x : A$ .

*Απόδειξη του λήμματος 2.4.2.* Για τήν πρώτη ισότητα, έχουμε να δείξουμε τό

$$C(a, b, p) := \text{transport}^{a=}_{\text{rec}_{a=b}^{(x,y:A) x=y}}((x : A) \text{refl}_x^*, p), \text{refl}_a = p.$$

<sup>1</sup>Κάποια στιγμή είχε εικαστεί ή υποτεθεί ότι αυτός ο πύργος ισότητων (πρέπει να) καταρρέει αμέσως· η σχετική αρχή, που ακούει στό όνομα *uniqueness of identity proofs (UIP)*, και είναι ισοδύναμη με τήν υπόθεση ότι κάθε τύπος είναι σύνολο, έρχεται σε σύγκρουση με τό univalence, αλλά είναι συνεπής με τη θεωρία τύπων του Martin-Löf.

για όλα τὰ  $a, b : A$  και  $p : a = b$ . Από τήν αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στην ισότητα, αρκεί να δείξουμε τό

$$\begin{aligned} C(a, a, \text{refl}_a) &\equiv \text{transport}^{a=}_{(\text{rec}_{a=a}^{(x,y:A)} x=y)} ((x : A) \text{refl}_x^*, \text{refl}_a), \text{refl}_a = \text{refl}_a \\ &\equiv \text{transport}^{a=}_{(\text{refl}_a^*, \text{refl}_a)} = \text{refl}_a \\ &\equiv \text{refl}_a = \text{refl}_a, \end{aligned}$$

για τυχόν  $a : A$ , τό οποίο, βεβαίως, ισχύει. Η άλλη ισότητα αποδεικνύεται ομοίως.  $\square$

## 2.5 Ασκήσεις

**Άσκηση 2.4.** Δείξτε ότι η συνένωση λιστών είναι προσεταιριστική, περιγράφοντας, για οποιαδήποτε  $l, k, j : \text{List}(A)$ , ένα στοιχείο τού τύπου

$$(l + k) + j = l + (k + j).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό  $l$ .]

*Λύση.* Θα ορίσουμε, με επαγωγή στό  $l$ , έναν μετασχηματισμό

$$(l, k, j : \text{List}(A)) t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j).$$

Κατά πρώτον, πρέπει να ορίσουμε τό

$$t(\text{nil}, k, j) : (\text{nil} + k) + j = \text{nil} + (k + j).$$

Από τόν ορισμό τής συνένωσης, όμως, παρατηρούμε ότι

$$(\text{nil} + k) + j \equiv k + j \equiv \text{nil} + (k + j),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\text{nil}, k, j) \equiv \text{refl}_{k+j}.$$

Κατά δεύτερον, ας υποθέσουμε ότι έχουμε τό  $t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j)$ , και θέλουμε να ορίσουμε τό

$$t(\text{cons}(a, l), k, j) : (\text{cons}(a, l) + k) + j = \text{cons}(a, l) + (k + j).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών αυτής τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned} (\text{cons}(a, l) + k) + j &\equiv \text{cons}(a, (l + k)) + j \\ &\equiv \text{cons}(a, (l + k) + j), \\ \text{cons}(a, l) + (k + j) &\equiv \text{cons}(a, l + (k + j)). \end{aligned}$$

Εφ' όσον  $t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j)$ , τό λήμμα 2.2.3 μάς δίνει ένα στοιχείο

$$\text{cons}(a, t(l, k, j)) : \text{cons}(a, (l + k) + j) = \text{cons}(a, l + (k + j)),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\text{cons}(a, l), k, j) \equiv \text{cons}(a, t(l, k, j)).$$

$\square$

**Άσκηση 2.5.** Δοθέντος ενός μετασχηματισμού  $(x : A)u(x) : B$ , περιγράψτε, για οποιαδήποτε  $l, k : \text{List}(A)$ , ένα στοιχείο τού τύπου

$$\text{List}(u)(l + k) = \text{List}(u)(l) + \text{List}(u)(k).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο  $l$ .]

*Λύση.* Αφ' ενός, έχουμε να ορίσουμε τό

$$t(\text{nil}_A, k) : \text{List}(u)(\text{nil}_A + k) = \text{List}(u)(\text{nil}_A) + \text{List}(u)(k).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών αυτής τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned} \text{List}(u)(\text{nil}_A + k) &\equiv \text{List}(u)(k), \\ \text{List}(u)(\text{nil}_A) + \text{List}(u)(k) &\equiv \text{nil}_B + \text{List}(u)(k) \\ &\equiv \text{List}(u)(k), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\text{nil}_A, k) := \text{refl}_{\text{List}(u)(k)}.$$

Αφ' ετέρου, έχουμε τό  $t(l, k) : \text{List}(u)(l + k) = \text{List}(u)(l) + \text{List}(u)(k)$  και χρειαζόμαστε τό  $t(\text{cons}_A(a, l), k) : \text{List}(u)(\text{cons}_A(a, l) + k) = \text{List}(u)(\text{cons}_A(a, l)) + \text{List}(u)(k)$ . Οι υπολογισμοί τών σκελών τής τελευταίας ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned} \text{List}(u)(\text{cons}_A(a, l) + k) &\equiv \text{List}(u)(\text{cons}_A(a, l + k)) \\ &\equiv \text{cons}_B(u(a), \text{List}(u)(l + k)), \\ \text{List}(u)(\text{cons}_A(a, l)) + \text{List}(u)(k) &\equiv \text{cons}_B(u(a), \text{List}(u)(l)) + \text{List}(u)(k) \\ &\equiv \text{cons}_B(u(a), \text{List}(u)(l) + \text{List}(u)(k)), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\text{cons}_A(a, l), k) := \text{cons}_B(u(a), t(l, k)). \quad \square$$

**Άσκηση 2.6** (Φυσικότητα τού  $\text{cat}$ ). Δοθέντος ενός μετασχηματισμού  $(x : A) u(x) : B$ , δείξτε ότι, για οποιαδήποτε λίστα  $L : \text{List}(\text{List}(A))$ ,

$$\text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(L)) = \text{List}(u)(\text{cat}(L)).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο  $L$ . Χρησιμοποιήστε τήν προηγούμενη άσκηση.]

*Λύση.* Θα ορίσουμε, με επαγωγή στο  $L$ , ένα

$$t(L) : \text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(L)) = \text{List}(u)(\text{cat}(L))$$

για οποιαδήποτε λίστα  $L : \text{List}(\text{List}(A))$ . Αφ' ενός, έχουμε να ορίσουμε τό

$$t(\text{nil}_{\text{List}(A)}) : \text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(\text{nil}_{\text{List}(A)})) = \text{List}(u)(\text{cat}(\text{nil}_{\text{List}(A)})).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned} \text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(\text{nil}_{\text{List}(A)})) &\equiv \text{cat}(\text{nil}_{\text{List}(B)}) \\ &\equiv \text{nil}_B, \\ \text{List}(u)(\text{cat}(\text{nil}_{\text{List}(A)})) &\equiv \text{List}(u)(\text{nil}_A) \\ &\equiv \text{nil}_B, \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\text{nil}_{\text{List}(A)}) := \text{refl}_{\text{nil}_B}.$$

Αφ' ετέρου, έχουμε τό

$$t(L) : \text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(L)) = \text{List}(u)(\text{cat}(L))$$

και χρειαζόμαστε να ορίσουμε τό

$$t(\text{cons}_{\text{List}(A)}(l, L)) : \text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(\text{cons}_{\text{List}(A)}(l, L))) = \text{List}(u)(\text{cat}(\text{cons}_{\text{List}(A)}(l, L))). \quad (*)$$

Εν τω μεταξύ, από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ένα

$$w : \text{List}(u)(l + \text{cat}(L)) = \text{List}(u)(l) + \text{List}(u)(\text{cat}(L)).$$

Οι υπολογισμοί των σκελών της (\*) δίνουν

$$\begin{aligned} \text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(\text{cons}_{\text{List}(A)}(l, L))) &\equiv \text{cat}(\text{cons}_{\text{List}(B)}(\text{List}(u)(l), \text{List}(\text{List}(u))(L))) \\ &\equiv \text{List}(u)(l) + \text{cat}(\text{List}(\text{List}(u))(L)), \end{aligned}$$

$$\text{List}(u)(\text{cat}(\text{cons}_{\text{List}(A)}(l, L))) \equiv \text{List}(u)(l + \text{cat}(L)),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\text{cons}_{\text{List}(A)}(l, L)) := (\text{List}(u)(l) + t(L)) \cdot w^{-1}. \quad \square$$

**Άσκηση 2.7.** Έστω  $(x : A) B(x)$  οικογένεια. Δείξτε ότι, για  $p : x = y$  και  $q : y = z$  στόν  $A$ , η μεταφορά κατά μήκος τού  $p \cdot q$  ισούται με τή σύνθεση των μεταφορών κατά μήκος τών  $p$  και  $q$ : Για  $w : B(x)$ ,

$$\text{transport}^B(p \cdot q, w) = \text{transport}^B(q, \text{transport}^B(p, w)).$$

*Λύση.* Θα κάνουμε επαγωγή στά  $p$  και  $q$ . Θεωρούμε τήν οικογένεια

$$(x, y : A, p : x = y, z : A, q : y = z) C(x, y, p, z, q),$$

όπου

$$C(x, y, p, z, q) := (\text{transport}^B(p \cdot q, w) = \text{transport}^B(q, \text{transport}^B(p, w))).$$

Έχουμε

$$\text{transport}^B(\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x, w) \equiv \text{transport}^B(\text{refl}_x, w) \equiv w$$

και

$$\text{transport}^B(\text{refl}_x, \text{transport}^B(\text{refl}_x, w)) \equiv w,$$

οπότε

$$\text{refl}_w : C(x, x, \text{refl}_x, x, \text{refl}_x).$$

Μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε ένα

$$u(x, z, q) : C(x, x, \text{refl}_x, z, q)$$

μέσω τής επαγωγής

$$u(x, x, \text{refl}_x) \equiv \text{refl}_w.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τό επιθυμητό

$$v(x, y, p, z, q) : C(x, y, p, z, q)$$

μέσω τής επαγωγής

$$v(x, x, \text{refl}_x, z, q) \equiv u(x, z, q).$$

□

## Κεφάλαιο 3

# Θεωρία τύπων του Martin-Löf: Τά βασικά

Στό προηγούμενο κεφάλαιο εισαγάγαμε οικογένειες τύπων, δηλαδή κατηγορήματα, και ορίσαμε την ισότητα σαν ένα τέτοιο κατηγορημα. Στο κεφάλαιο αυτό, θα πραγματευτούμε τά τυποθεωρητικά ανάλογα των λογικών συνδέσμων.

### 3.1 Γινόμενα

Σύμφωνα με την ερμηνεία Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK), ένα τεκμήριο αλήθειας τής σύζευξης  $\phi_1 \wedge \phi_2$  δύο προτάσεων  $\phi_1$  και  $\phi_2$  αποτελείται από ένα τεκμήριο αλήθειας τής  $\phi_1$  και ένα τής  $\phi_2$ .

Ο τύπος που αντιστοιχεί στη σύζευξη δύο προτάσεων είναι ο τύπος των ζευγών, ή (καρτεσιανό) γινόμενο δύο τύπων: Δοθέντων δύο τύπων  $A_1$  και  $A_2$ , τό γινόμενο  $A_1 \times A_2$  έχει τόν κατασκευαστή (διατεταγμένο ζεύγος)

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2) \text{ pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2,$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x_1 : A_1 \quad x_2 : A_2}{\text{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2} .$$

Αν αφαιρέσουμε τά στοιχεία και μεταβούμε σέ λογικό συμβολισμό, παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής τής σύζευξης,

$$\frac{\phi_1 \quad \phi_2}{\phi_1 \wedge \phi_2} . \tag{\wedge I}$$

που εκφράζει τό στοιχειώδες λογικό γεγονός ότι από δύο προτάσεις μπορούμε να συμπεράνουμε τή σύζευξή τους. Ο κανόνας αυτός ονομάζεται *κανόνας εισαγωγής (introduction rule)* τής σύζευξης, διότι περιγράφει τόν (κανονικό) τρόπο με τόν οποίο μία σύζευξη εμφανίζεται ως συμπέρασμα μιας απόδειξης.

Η αρχή αναδρομής του γινομένου λέει ότι, δοθέντων ενός τύπου  $C$  και ενός μετασχηματισμού  $(x_1 : A_1, x_2 : A_2) c_{\text{pair}}(x_1, x_2) : C$ , η σχέση

$$t(\text{pair}(x_1, x_2)) := c_{\text{pair}}(x_1, x_2)$$

ορίζει τό  $t(x) : C$  για οποιοδήποτε  $x : A_1 \times A_2$ . Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$\frac{(x_1 : A_1, x_2 : A_2) z(x_1, x_2) : C \quad x : A_1 \times A_2}{\text{rec}_{A_1 \times A_2}(z, x) : C},$$

οριζόμενο από τή σχέση

$$\text{rec}_{A_1 \times A_2}(z, \text{pair}(x_1, x_2)) \equiv z(x_1, x_2).$$

Εάν από τόν κανόνα σχηματισμού τού  $\text{rec}_{A_1 \times A_2}$  παραλείψουμε τά στοιχεία και μεταβούμε σε λογικό συμβολισμό, παίρνουμε τόν κανόνα απαγωγής

$$\frac{\begin{array}{c} (\phi_1, \phi_2) \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \phi_1 \wedge \phi_2}{\theta}, \quad (\wedge E)$$

ο οποίος εκφράζει τόν τρόπο με τόν οποίο μία σύζευξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόθεση, και γι' αυτό λέγεται κανόνας απαλοιφής (*elimination rule*) τής σύζευξης.

## 3.2 Αθροίσματα

Σύμφωνα με τήν ΒΗΚ, τεκμήρια αλήθειας τής διάζευξης  $\phi_1 \vee \phi_2$  δύο προτάσεων  $\phi_1$  και  $\phi_2$  είναι τά τεκμήρια αλήθειας τής  $\phi_1$ , καθώς και εκείνα τής  $\phi_2$ .

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τής διάζευξης είναι τό *άθροισμα*  $A_1 + A_2$  δύο τύπων  $A_1$  και  $A_2$ , τό οποίο έχει τούς κατασκευαστές

1. εάν  $x_1 : A_1$ , τότε  $\text{in}_1(x_1) : A_1 + A_2$ ,
2. εάν  $x_2 : A_2$ , τότε  $\text{in}_2(x_2) : A_1 + A_2$ ,

οι οποίοι γράφονται ως κανόνες στή μορφή

$$\frac{x_1 : A_1}{\text{in}_1(x_1) : A_1 + A_2} \quad \frac{x_2 : A_2}{\text{in}_2(x_2) : A_1 + A_2}.$$

και από τούς οποίους παίρνουμε τούς κανόνες εισαγωγής

$$\frac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \quad \frac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2} \quad (\vee I)$$

τής διάζευξης, οι οποίοι εκφράζουν τό γεγονός ότι μπορούμε να συμπεράνουμε μία διάζευξη από εκάτερη τών διαζευκτέων.

Η αρχή τής αναδρομής για τή διάζευξη έχει ως εξής: Δοθέντων ενός τύπου  $C$  και δύο μετασχηματισμών  $(x_1 : A_1) c_{\text{in}_1}(x_1) : C$  και  $(x_2 : A_2) c_{\text{in}_2}(x_2) : C$ , οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\text{in}_1(x_1)) &\equiv c_{\text{in}_1}(x_1), \\ t(\text{in}_2(x_2)) &\equiv c_{\text{in}_2}(x_2) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό  $(x : A_1 + A_2) t(x) : C$ . Ο αναδρομέας τής διάζευξης έχει τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{(x_1 : A_1) z_1(x_1) : C \quad (x_2 : A_2) z_2(x_2) : C \quad x : A_1 + A_2}{\text{rec}_{A_1 + A_2}(z_1, z_2, x) : C}$$

και ορίζεται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \text{rec}_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \text{in}_1(x_1)) &::= z_1(x_1), \\ \text{rec}_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \text{in}_2(x_2)) &::= z_2(x_2). \end{aligned}$$

Από τόν  $\text{rec}_{A_1+A_2}$  παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής τής διάζευξης

$$\frac{\begin{array}{cc} (\phi_1) & (\phi_2) \\ \vdots & \vdots \\ \theta & \theta \end{array} \quad \phi_1 \vee \phi_2}{\theta}, \quad (\vee E)$$

ο οποίος περιγράφει τήν απόδειξη με διάκριση περιπτώσεων.

### 3.3 Τύποι συναρτήσεων

Σύμφωνα με τήν ΒΗΚ, ένα τεκμήριο αλήθειας τής συνεπαγωγής  $\phi \supset \psi$  δύο προτάσεων  $\phi$  και  $\psi$  είναι μία διαδικασία που μετασχηματίζει οποιοδήποτε τεκμήριο αλήθειας τής  $\phi$  σε ένα τής  $\psi$ .

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τής συνεπαγωγής είναι ο τύπος  $A \rightarrow B$  τών συναρτήσεων από τόν τύπο  $A$  στόν τύπο  $B$ , με κατασκευαστή (συναρτησιακή αφαίρεση ή  $\lambda$ -αφαίρεση)

- Για μετασχηματισμό  $(x : A) b(x) : B$ ,  $\lambda(b) : A \rightarrow B$ .

Η ιδιαιτερότητα τού τύπου τών συναρτήσεων είναι ότι έχει έναν κατασκευαστή, τή *συναρτησιακή αφαίρεση* ή  *$\lambda$ -αφαίρεση*, τό όρισμα τού οποίου είναι μετασχηματισμός. Αυτό αντανακλάται και στόν κανόνα σχηματισμού του, ο οποίος έχει τή μορφή

$$\frac{(x : A) b(x) : B}{\lambda(b) : A \rightarrow B}.$$

Από τόν κανόνα αυτόν παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\begin{array}{c} (\phi) \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \supset \psi} \quad (\supset I)$$

τής συνεπαγωγής, ο οποίος, σε άλλες διατυπώσεις τής λογικής, είναι γνωστός ως θεώρημα απαγωγής.

Η αρχή αναδρομής τού  $A \rightarrow B$  λέει ότι, δοθέντων τύπου  $C$  και μετασχηματισμού  $((x : A) y(x) : B) c_\lambda(y) : C$ , η σχέση

$$t(\lambda(b)) ::= c_\lambda(b)$$

ορίζει τό  $t(f) : C$  για τυχούσα συνάρτηση  $f : A \rightarrow B$ .

Ο αναδρομέας

$$\frac{((x : A) y(x) : B) z(y) : C \quad f : A \rightarrow B}{\text{rec}_{A \rightarrow B}(z, f) : C}$$

τού  $A \rightarrow B$  ορίζεται από τη σχέση

$$\text{rec}_{A \rightarrow B}(z, \lambda(b)) := z(b),$$

και δίνει τον κανόνα

$$\frac{\begin{array}{c} \left( \frac{\phi}{\psi} \right) \\ \vdots \\ \theta \quad \phi \supset \psi \end{array}}{\theta} \quad (\supset E)$$

απαλοιφής τής συνεπαγωγής. Αν συμβολίσουμε  $\Sigma \vdash \theta$  τό γεγονός ότι η  $\theta$  έπεται (είναι λογική συνέπεια) τών προτάσεων και κανόνων που ανήκουν στό σύνολο  $\Sigma$ , ο  $(\supset E)$  λέει ότι εάν  $\Sigma \cup \left\{ \frac{\phi}{\psi} \right\} \vdash \theta$ , τότε  $\Sigma \cup \{ \phi \supset \psi \} \vdash \theta$ .

### 3.4 Ο τύπος 0

Κατά τήν ΒΗΚ, τό ψευδές  $F$  δεν έχει τεκμήρια αλήθειας.

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τού ψευδούς είναι ο τύπος  $\mathbf{0}$  που δεν έχει κανέναν κατασκευαστή. Κατά συνέπεια, τό ψευδές δεν έχει κανόνες εισαγωγής. Η αρχή τής αναδρομής για τόν  $\mathbf{0}$  μάς δίνει έναν μετασχηματισμό  $(x : \mathbf{0}) t(x) : C$  για κάθε τύπο  $C$ , που είναι και ο αναδρομέας του,

$$\frac{x : \mathbf{0}}{\text{rec}_{\mathbf{0}}(x) : C}.$$

Αντίστοιχα, ο κανόνας απαλοιφής τού ψευδούς είναι ο

$$\frac{F}{\theta}, \quad (\text{FE})$$

γνωστός και ως *ex falso (sequitur) quodlibet*.

### 3.5 Ο τύπος 1

Τό αληθές  $T$  δεν είναι και τόσο χρήσιμο στη λογική. Είναι, όμως, χρήσιμο στη θεωρία τύπων. Σύμφωνα με τήν ΒΗΚ, η πρόταση  $T$  έχει ένα τεκμήριο αλήθειας. Ο αντίστοιχος τύπος είναι ο  $\mathbf{1}$ , που έχει τόν κατασκευαστή

$$\bullet ! : \mathbf{1},$$

ο οποίος δίνει τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{\overline{T}} \quad (\text{TI})$$

τού αληθούς, που λέει, απλώς, ότι η πρόταση  $T$  αληθεύει.

Προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό τών στοιχείων τού  $\mathbf{1}$  δεν έχουμε παρά να πούμε πώς αυτός δρα στό μοναδικό στοιχείο ! αυτού· αυτό ακριβώς εκφράζεται από τήν αρχή αναδρομής τού αληθούς: Δοθέντος ενός  $c_1 : C$ , η σχέση

$$t(!) := c_1$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό  $(x : \mathbf{1}) t(x) : C$ . Έτσι και ο αναδρομέας

$$\frac{x : C \quad y : \mathbf{1}}{\text{rec}_1(x, y) : C}$$

τού  $\mathbf{1}$  ορίζεται από τή σχέση

$$\text{rec}_1(x, !) \equiv x.$$

Από τόν κανόνα αυτόν παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής τού αληθούς

$$\frac{\theta \quad \top}{\theta} . \quad (\text{TE})$$

### 3.6 Ειδικοί κανόνες απαλοιφής

Εάν ένας σύνδεσμος έχει ακριβώς έναν κανόνα εισαγωγής, ο μοναδικός αυτός κανόνας εισαγωγής μπορεί επίσης να διαβαστεί από κάτω προς τα επάνω. Τά προιόντα αυτής τής αντιστροφής λέγονται *ειδικοί (special) κανόνες απαλοιφής* (και, ενίοτε, για αντιδιαστολή, οι άλλοι κανόνες απαλοιφής ονομάζονται *γενικοί*). Προκειμένου για τή σύζευξη, αυτοί είναι οι

$$\frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_1} \quad \frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_2} . \quad (\wedge S)$$

Για τή συνεπαγωγή έχουμε τόν κανόνα

$$\frac{\phi \supset \psi \quad \phi}{\psi} , \quad (\supset S)$$

γνωστό και ως *modus ponens*. Τέλος, για τό αληθές έχουμε μηδέν τό πλήθος ειδικούς κανόνες απαλοιφής.

Για καθέναν από τούς τρεις παραπάνω συνδέσμους, οι ειδικοί κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι με τόν (γενικό) κανόνα απαλοιφής· αυτό είναι απόρροια τών ακόλουθων γενικότερων διαπιστώσεων που αφορούν τά τυποθεωρητικά ανάλογα τών συνδέσμων αυτών.

Για τό γινόμενο, θεωρούμε τούς μετασχηματισμούς (προβολές)

$$\frac{x : A_1 \times A_2}{\text{pr}_1(x) : A_1} \quad \frac{x : A_1 \times A_2}{\text{pr}_2(x) : A_2}$$

που ορίζονται μέσω τών αναδρομών

$$\begin{aligned} \text{pr}_1(\text{pair}(a_1, a_2)) &\equiv a_1, \\ \text{pr}_2(\text{pair}(a_1, a_2)) &\equiv a_2. \end{aligned}$$

Όπως και κάθε άλλος μετασχηματισμός που ορίζεται με αναδρομή, οι προβολές μπορούν να εκφραστούν με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού γινομένου· αντιστρόφως, ο  $\text{rec}_{A_1 \times A_2}$  ορίζεται από τούς  $\text{pr}_1$  και  $\text{pr}_2$  μέσω τής σχέσης

$$\text{rec}_{A_1 \times A_2}(z, x) \equiv z(\text{pr}_1(x), \text{pr}_2(x)).$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιείται η ορίζουσα σχέση του αναδρομέα:

$$\begin{aligned} \text{rec}_{A_1 \times A_2}(z, \text{pair}(x_1, x_2)) &\equiv z(\text{pr}_1(\text{pair}(x_1, x_2)), \text{pr}_2(\text{pair}(x_1, x_2))) \\ &\equiv z(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Για τόν τύπο τών συναρτήσεων, θεωρούμε τόν μετασχηματισμό (εφαρμογή συνάρτησης σε όρισμα)

$$\frac{f : A \rightarrow B \quad x : A}{\text{apply}_f(x) : B}$$

που ορίζεται μέσω τής αναδρομής

$$\text{apply}_{\lambda(b)}(x) \equiv b(x).$$

Ο  $\text{rec}_{A \rightarrow B}$  ορίζεται από τόν  $\text{apply}$  μέσω τής σχέσης

$$\text{rec}_{A \rightarrow B}(z, f) \equiv z(\text{apply}_f).$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιείται η ορίζουσα σχέση του αναδρομέα:

$$\begin{aligned} \text{rec}_{A \rightarrow B}(z, \lambda(b)) &\equiv z(\text{apply}_{\lambda(b)}) \\ &\equiv z(b). \end{aligned}$$

Για τόν τύπο  $\mathbf{1}$ , αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο  $\text{rec}_{\mathbf{1}}$  ορίζεται και χωρίς αναδρομή:

$$\text{rec}_{\mathbf{1}}(x, y) \equiv x.$$

Αυτό αντανακλά τό λογικό γεγονός ότι ο κανόνας απαλοιφής τού αληθούς δεν παράγει νέες αποδείξιμες προτάσεις.

### 3.7 Εξαρτώμενα άθροισματα

Σύμφωνα με τήν ΒΗΚ, ένα τεκμήριο αλήθειας τής  $\exists(x : A) \phi(x)$ , όπου  $A$  τό πεδίο διακύμανσης τής μεταβλητής  $x$ , αποτελείται από ένα στοιχείο  $a$  τού  $A$  και ένα τεκμήριο αλήθειας τού  $\phi(a)$ .

Ο τύπος που αντιστοιχεί στην υπαρκτική ποσόδειξη είναι τό εξαρτώμενο άθροισμα: Εάν έχουμε μία οικογένεια τύπων  $(x : A)B(x)$ , μπορούμε επίσης να σχηματίζουμε ζεύγη  $\text{pair}(a, b)$  με  $a : A$  και  $b : B(a)$ . Με άλλα λόγια, ο τύπος τής δεύτερης συντεταγμένης μπορεί να εξαρτάται από τήν πρώτη. Αυτά τά ζεύγη, τά οποία ενίοτε καλούνται *εξαρτώμενα ζεύγη*, συγκροτούν έναν τύπο  $\sum(B)$ , τό (*εξαρτώμενο*) *άθροισμα* τής οικογένειας  $(x : A) B(x)$ , με κατασκευαστή

$$\frac{x : A \quad y : B(x)}{\text{pair}(x, y) : \sum(B)}$$

Παρατηρήστε ότι, εάν η  $(x : A) B(x)$  είναι σταθερή, δηλαδή ο  $B(x)$  δεν εξαρτάται από τό  $x$  αλλά είναι ένας μεμονωμένος τύπος  $B$ , αυτό που παίρνουμε από τόν ορισμό είναι τό  $A \times B$ . Με άλλα λόγια, τό εξαρτώμενο άθροισμα είναι γενίκευση τού καρτεσιανού γινομένου. Αυτό αιτιολογεί και τή χρήση τού ίδιου συμβόλου για τούς δύο κατασκευαστές.

Αντίστοιχα έχουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\phi(a)}{\exists(x:A)\phi(x)}, \quad (\exists I)$$

τού υπαρκτικού ποσοδείκτη, ο οποίος μάς λέει ότι από τήν  $\phi(a)$  για κάποιο  $a$  μπορούμε να συμπεράνουμε τήν  $\exists(x:A)\phi(x)$ .

Η αρχή τής αναδρομής τού εξαρτώμενου αθροίσματος λέει ότι, δοθέντος ενός μετασχηματισμού  $(x:A, y:B(x))c_{\text{pair}}(x, y):C$ , η σχέση

$$t(\text{pair}(a, b)) := c_{\text{pair}}(a, b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό  $(w:\sum(B))t(w):C$ . Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$\frac{(x:A, y:B(x))z(x, y):C \quad w:\sum(B)}{\text{rec}_{\sum(B)}(z, w):C},$$

οριζόμενο από τή σχέση

$$\text{rec}_{\sum(B)}(z, \text{pair}(a, b)) := z(a, b).$$

Από τόν κανόνα σχηματισμού τού αναδρομέα τού εξαρτώμενου γινομένου παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\begin{array}{c} (\phi(x)) \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \exists(x:A)\phi(x)}{\theta} \quad (\exists E)$$

τού υπαρκτικού ποσοδείκτη (με τόν περιορισμό ότι τό  $x$  δεν εμφανίζεται (ελεύθερο) σε (ανοιχτές) υποθέσεις πάνω από τό  $\theta$ ).

### 3.8 Εξαρτώμενα γινόμενα

Η ρήτρα τής ΒHK για τόν καθολικό ποσοδείκτη έχει ως εξής: Ένα τεκμήριο αλήθειας τής πρότασης  $\forall(x:A)\phi(x)$  είναι μία διαδικασία που μετασχηματίζει τό τυχόν στοιχείο  $a$  τού  $A$  σε ένα τεκμήριο αλήθειας τής  $\phi(a)$ .

Η αντίστοιχη τυποθεωρητική έννοια είναι τό εξαρτώμενο γινόμενο. Κατ' αρχάς, παρατηρήστε ότι τά στοιχεία ενός τύπου είναι δυνατόν να μετασχηματίζονται σε στοιχεία διαφορετικών στιγμιστύπων μιας οικογένειας. Τέτοια είναι η περίπτωση με τούς μετασχηματισμούς που ορίζονται με αναδρομή στην ισότητα (και σε οποιαδήποτε άλλη μη τετριμμένη οικογένεια), καθώς και με τούς επαγωγείς τών διαφόρων τύπων. Σε έναν τέτοιο μετασχηματισμό  $(x:A)b(x):B(x)$  αντιστοιχεί μία συνάρτηση  $f$  με  $f(x):B(x)$  για  $x:A$ . Οι συναρτήσεις με αυτή τή γενικότερη έννοια, οι οποίες λέγονται και «εξαρτώμενες» συναρτήσεις, συγκροτούν έναν τύπο, τό (εξαρτώμενο) γινόμενο  $\prod(B)$  τής οικογένειας  $(x:A)B(x)$ , ο οποίος έχει τόν κατασκευαστή

$$\frac{(x:A)b(x):B(x)}{\lambda(b):\prod(B)}.$$

Είναι φανερό από την περιγραφή του  $\prod(B)$  ότι ο  $A \rightarrow B$  είναι η ειδική περίπτωση στην οποία η οικογένεια  $(x : A) B(x)$  είναι σταθερή.

Από τόν παραπάνω κανόνα παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\phi(x)}{\forall (x : A) \phi(x)} \quad (\forall I)$$

τού καθολικού ποσοδείκτη (με τόν περιορισμό ότι τό  $x$  δεν εμφανίζεται σε υποθέσεις πάνω από τό  $\phi(x)$ ), ο οποίος λέει ότι από μία απόδειξη τής  $\phi(x)$  για τυχόν  $x : A$  μπορούμε να συμπεράνουμε τήν  $\forall (x : A) \phi(x)$ .

Η αρχή τής αναδρομής για τό εξαρτώμενο γινόμενο είναι επίσης γενίκευση τής αντίστοιχης αρχής για τόν τύπο τών συναρτήσεων: Δοθέντος μετασχηματισμού

$$((x : A) y(x) : B(x)) c_\lambda(y) : C,$$

η σχέση

$$t(\lambda(x : A) b(x)) := c_\lambda(b)$$

ορίζει μετασχηματισμό  $(f : \prod(B)) t(f) : C$ . Ο αναδρομέας

$$\frac{((x : A) b(x) : B(x)) z(x : A) b(x) : C \quad f : \prod(B)}{\text{rec}_{\prod(B)}(z, f) : C}$$

τού εξαρτώμενου γινομένου ορίζεται από τή σχέση

$$\text{rec}_{\prod(B)}(z, \lambda(b)) := z(b),$$

και δίνει τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\begin{array}{c} (x : A) \\ \phi(x) \\ \vdots \\ \theta \end{array} \quad \forall (x : A) \phi(x)}{\theta} \quad (\forall E)$$

τού καθολικού ποσοδείκτη.

Ο καθολικός ποσοδείκτης έχει επίσης έναν ειδικό κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\forall (x : A) \phi(x)}{\phi(a)} \quad (\forall S)$$

ο οποίος, όπως και στην περίπτωση τής συνεπαγωγής, λαμβάνεται από τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{f : \prod(B) \quad x : A}{\text{apply}_f(x) : B(x)}$$

τού μετασχηματισμού  $\text{apply}$  που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\text{apply}_{\lambda(b)}(x) := b(x).$$

Και πάλι, οι δύο κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι συνεπεία τού εναλλακτικού ορισμού

$$\text{rec}_{\prod(B)}(z, f) := z(\text{apply}_f)$$

τού αναδρομέα τού εξαρτώμενου γινομένου.

Όλοι οι κανόνες φυσικής απαγωγής βρίσκονται συγκεντρωμένοι στόν πίνακα 3.1.

	Κανόνες εισαγωγής	Κανόνες απαλοιφής	(Ειδικοί)
$\wedge$	$\frac{\phi_1 \quad \phi_2}{\phi_1 \wedge \phi_2}$	$\frac{\begin{array}{c} (\phi_1, \phi_2) \\ \vdots \\ \theta \quad \phi_1 \wedge \phi_2 \end{array}}{\theta}$	$\frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_1} \quad \frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_2}$
$\vee$	$\frac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \quad \frac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2}$	$\frac{\begin{array}{c} (\phi_1) \quad (\phi_2) \\ \vdots \quad \vdots \\ \theta \quad \theta \quad \phi_1 \vee \phi_2 \end{array}}{\theta}$	
$\supset$	$\frac{\begin{array}{c} (\phi) \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \supset \psi}$	$\frac{\begin{array}{c} \left( \frac{\phi}{\psi} \right) \\ \vdots \\ \theta \quad \phi \supset \psi \end{array}}{\theta}$	$\frac{\phi \supset \psi \quad \phi}{\psi}$
F		$\frac{F}{\theta}$	
T	$\overline{\text{T}}$	$\frac{\theta \quad \text{T}}{\theta}$	$\emptyset$
$\exists$	$\frac{a:A \quad \phi(a)}{\exists(x:A) \phi(x)}$	$\frac{\begin{array}{c} (x:A, \phi(x)) \\ \vdots \\ \theta \quad \exists(x:A) \phi(x) \end{array}}{\theta}$	
$\forall$	$\frac{\begin{array}{c} (x:A) \\ \vdots \\ \phi(x) \end{array}}{\forall(x:A) \phi(x)}$	$\frac{\begin{array}{c} \left( \frac{x:A}{\phi(x)} \right) \\ \vdots \\ \theta \quad \forall(x:A) \phi(x) \end{array}}{\theta}$	$\frac{\forall(x:A) \phi(x) \quad a:A}{\phi(a)}$
=	$\overline{a = a}$	$\frac{b:A \quad \phi(a) \quad a = b}{\phi(b)}$	

Πίνακας 3.1: Κανόνες φυσικής απαγωγής

### 3.9 Αρχές επαγωγής

Μέχρι στιγμής, περιγράψαμε κάποιους τύπους και είδαμε πώς οι κατασκευαστές τους αντιστοιχούν σε κανόνες εισαγωγής κάποιων προτάσεων και οι αναδρομείς τους σε κανόνες απαλοιφής των ίδιων προτάσεων.

Οι τύποι συνοδεύονται επίσης από αρχές επαγωγής. Οι αρχές αυτές έχουν οργανικό ρόλο στη θεωρία τύπων, αλλά δεν αντανακλώνται στη φυσική απαγωγή. Θα συζητήσουμε τώρα τις αρχές επαγωγής των τύπων που παρουσιάσαμε (πλην τού αθροίσματος). Με τó ερώτημα τής (απουσίας) λογικής ερμηνείας αυτών θα καταπιστούμε αργότερα (κεφάλαιο 6).

Οι αρχές επαγωγής των τύπων είναι ευθείες γενικεύσεις των αρχών αναδρομής τους. Η αρχή επαγωγής τού  $A \rightarrow B$  διατυπώνεται ως εξής: Δοθέντων

- οικογένειας  $(f : A \rightarrow B) C(f)$ , και
- μετασχηματισμού  $((x : A) b(x) : B) c_\lambda(b) : C(\lambda(b))$ ,

η σχέση

$$t(\lambda(b)) \equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει μετασχηματισμό

$$(f : A \rightarrow B) t(f) : C(f).$$

Η αρχή αυτή συνοψίζεται στον επαγωγέα

$$\frac{((x : A) y(x) : B) z(y) : C(\lambda(y)) \quad f : A \rightarrow B}{\text{ind}_{A \rightarrow B}(z, f) : C(f)}$$

τού  $A \rightarrow B$ , με ορίζουσα σχέση

$$\text{ind}_{A \rightarrow B}(z, \lambda(b)) \equiv z(b).$$

Από τήν παραπάνω αρχή επαγωγής συνάγεται η

*Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στον τύπο των συναρτήσεων:* Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα των συναρτήσεων από τόν  $A$  στον  $B$ , αρκεί να τήν δείξουμε για συναρτήσεις τής μορφής  $\lambda(x : A) b(x)$ .

Νωρίτερα παρατηρήσαμε ότι ο αναδρομέας τού  $A \rightarrow B$  είναι δυνατόν να ληφθεί από τήν εφαρμογή, μέσω τού εναλλακτικού ορισμού

$$\text{rec}_{A \rightarrow B}(z, f) \equiv z(\text{apply}_f).$$

Η απόπειρα επέκτασης τού αποτελέσματος αυτού στον επαγωγέα προσκρούει στό ότι υπάρχει ασυμφωνία τύπων:

$$\begin{aligned} z(\text{apply}_f) &: C(\lambda(\text{apply}_f)), \\ \text{ind}_{A \rightarrow B}(z, f) &: C(f). \end{aligned}$$

Ο τρόπος να συσχετίσουμε αυτά τά δύο στιγμιότυπα τής  $C$  μάς παρέχεται από τό επόμενο λήμμα.

**Λήμμα 3.9.1.** Για οποιαδήποτε  $f : A \rightarrow B$  υπάρχει ένα

$$\eta_{A \rightarrow B}(f) : \lambda(\text{apply}_f) = f,$$

τό οποίο ικανοποιεί τη σχέση  $\eta_{A \rightarrow B}(\lambda(b)) \equiv \text{refl}_{\lambda(b)}$ .

Απόδειξη. Με επαγωγή στην  $f$ . αν η  $f$  είναι τής μορφής  $\lambda(b)$ , τότε

$$\lambda(\text{apply}_{\lambda(b)}) \equiv \lambda(b)$$

(από τον ορισμό του  $\text{apply}$ ), οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$\eta_{A \rightarrow B}(\lambda(b)) := \text{refl}_{\lambda(b)}. \quad \square$$

Συνοψίζοντας, έχουμε τά εξής:

$$\begin{aligned} \text{apply}_{\lambda(b)} &\equiv b, \\ \lambda(\text{apply}_f) &= f. \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να θέσουμε

$$\text{ind}_{A \rightarrow B}(z, f) := \text{transport}^C(\eta_{A \rightarrow B}(f), z(\text{apply}_f)).$$

Εύκολα ελέγχεται ότι ο ορισμός αυτός επαληθεύει την ορίζουσα σχέση του  $\text{ind}_{A \rightarrow B}$ :

$$\begin{aligned} \text{ind}_{A \rightarrow B}(z, \lambda(b)) &\equiv \text{transport}^C(\eta_{A \rightarrow B}(\lambda(b)), z(\text{apply}_{\lambda(b)})) \\ &\equiv \text{transport}^C(\text{refl}_{\lambda(b)}, z(b)) \\ &\equiv z(b). \end{aligned}$$

**Πόρισμα 3.9.2.** Ο  $\text{ind}_{A \rightarrow B}$  είναι ορισμός από τους  $\text{apply}$  και  $\eta_{A \rightarrow B}$ . □

Εξ αιτίας αυτού, η συνήθης πρακτική κατά την παρουσίαση τής θεωρίας τύπων είναι ο  $\text{ind}_{A \rightarrow B}$  να αποσιωπάται προς χάριν των  $\text{apply}$  και  $\eta_{A \rightarrow B}$ . Στο εξής θα υιοθετήσουμε αυτή την πρακτική. Επιπλέον, θα είμαστε πιο χαλαροί όσον αφορά τη διάκριση μεταξύ συναρτήσεων και μετασχηματισμών, και θα γράφουμε  $f(x)$  αντί του  $\text{apply}_f(x)$ , όπως είναι καθιερωμένο στα μαθηματικά.

Με αυτόν τον συμβολισμό, ο  $\text{apply}_f$  γράφεται

$$(x : A) f(x).$$

Αυτά που είπαμε για συναρτήσεις ισχύουν αυτούσια και για εξαρτώμενες συναρτήσεις. Ειδικότερα, ισχύουν τά ανάλογα του λήμματος 3.9.1 και του πορίσματος 3.9.2:

**Λήμμα 3.9.3.** Για οποιαδήποτε  $f : \prod(B)$  υπάρχει ένα

$$\eta_{\prod(B)}(f) : \lambda(x : A) f(x) = f,$$

τό οποίο ικανοποιεί τη σχέση  $\eta_{\prod(B)}(\lambda(b)) \equiv \text{refl}_{\lambda(b)}$ . □

**Πόρισμα 3.9.4.** Ο  $\text{ind}_{\prod(B)}$  είναι ορισμός από τους  $\text{apply}$  και  $\eta_{\prod(B)}$ . □

Η αρχή επαγωγής για τόν  $A_1 \times A_2$  λέει ότι, δοθέντων μιας οικογένειας

$$(x : A_1 \times A_2) C(x)$$

και ενός μετασχηματισμού

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2) c_{\text{pair}}(x_1, x_2) : C(\text{pair}(x_1, x_2)),$$

μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό  $(x : A_1 \times A_2) t(x) : C(x)$  θέτοντας

$$t(\text{pair}(a_1, a_2)) := c_{\text{pair}}(a_1, a_2).$$

Από την αρχή επαγωγής λαμβάνεται ο επαγωγέας

$$\frac{(x_1 : A_1, x_2 : A_2) z(x_1, x_2) : C(\text{pair}(x_1, x_2)) \quad x : A_1 \times A_2}{\text{ind}_{A_1 \times A_2}(z, x) : C(x)}$$

τού  $A_1 \times A_2$ , με ορίζουσα σχέση

$$\text{ind}_{A_1 \times A_2}(z, \text{pair}(a_1, a_2)) := z(a_1, a_2).$$

*Αρχή της απόδειξης με επαγωγή στο γινόμενο:* Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα των στοιχείων τού  $A_1 \times A_2$ , αρκεί να την δείξουμε για στοιχεία τής μορφής  $\text{pair}(x_1, x_2)$ .

Όπως συνέβη και με τούς τύπους συναρτήσεων, προκειμένου να πάρουμε πίσω τόν  $\text{ind}_{A_1 \times A_2}$  από τις  $\text{pr}_1$  και  $\text{pr}_2$  χρειαζόμαστε τό επόμενο αποτέλεσμα.

**Λήμμα 3.9.5.** Για οποιοδήποτε  $x : A_1 \times A_2$ , υπάρχει ένα

$$\eta_{A_1 \times A_2}(x) : \text{pair}(\text{pr}_1(x), \text{pr}_2(x)) = x$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση  $\eta_{A_1 \times A_2}(\text{pair}(x_1, x_2)) \equiv \text{refl}_{\text{pair}(x_1, x_2)}$ .

*Απόδειξη.* Με επαγωγή στο  $x$ , θέτοντας

$$\eta_{A_1 \times A_2}(\text{pair}(x_1, x_2)) := \text{refl}_{\text{pair}(x_1, x_2)}. \quad \square$$

**Άσκηση 3.1.** Ορίστε, με τή βοήθεια των  $\text{pr}_i$  και  $\eta_{A_1 \times A_2}$ , έναν μετασχηματισμό ο οποίος ικανοποιεί τήν ορίζουσα σχέση τού  $\text{ind}_{A_1 \times A_2}$ .

Ισχύουν τά αυτά για εξαρτώμενα ζεύγη.

Η αρχή τής επαγωγής για τόν  $\mathbf{1}$  λέει ότι, δοθέντων μιας οικογένειας  $(x : \mathbf{1}) C(x)$  και ενός  $c : C(!)$ , η σχέση

$$t(!) := c_1$$

ορίζει τό  $t(x) : C(x)$  για τυχόν  $x : \mathbf{1}$ . Ειδικότερα,

*Αρχή της απόδειξης με επαγωγή στον  $\mathbf{1}$ :* Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα για τό τυχόν στοιχείο τού  $\mathbf{1}$ , αρκεί να την δείξουμε για τό  $!$ .

Νωρίτερα παρατηρήσαμε ότι ο αναδρομέας τού  $\mathbf{1}$  είναι ορίσμος χωρίς αναδρομή. Δεν συμβαίνει τό ίδιο με τόν επαγωγέα

$$\frac{z : C(!) \quad x : \mathbf{1}}{\text{ind}_1(z, x) : C(x)}$$

αυτού, όπου

$$\text{ind}_1(z, !) \equiv z.$$

Συγκεκριμένα, εκείνο που μάς λέει παραπάνω είναι ότι τό ! είναι τό μοναδικό στοιχείο του **1**:

**Άσκηση 3.2.** Δείξτε ότι, για οποιοδήποτε  $x : \mathbf{1}$ , υπάρχει ένα

$$\eta_1(x) : ! = x$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση  $\eta_1(!) \equiv \text{refl}_!$ , και χρησιμοποιήστε το για να ορίσετε τόν  $\text{ind}_1$ .

Η αρχή επαγωγής του **0** δίνει, για οποιαδήποτε οικογένεια

$$(x : \mathbf{0}) C(x),$$

έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathbf{0}) t(x) : C(x)$$

χωρίς ορίζουσες σχέσεις (μια και δεν υπάρχει τίποτα στό οποίο να μπορεί να οριστεί). Αυτός ο μετασχηματισμός είναι και ο επαγωγέας

$$\frac{x : \mathbf{0}}{\text{ind}_0(x) : C(x)}$$

τού **0**.

Ο  $\text{ind}_0$  μπορεί να οριστεί από τόν  $\text{rec}_0$ :

$$\text{ind}_0^C(x) \equiv \text{rec}_0^{C(x)}(x).$$

Στή λογική, η άρνηση μιας πρότασης  $\phi$  είναι η πρόταση

$$\neg\phi \equiv \phi \supset F.$$

Η  $\neg\phi$  λέει ότι από τήν υπόθεση  $\phi$  μπορούμε να οδηγηθούμε σε άτοπο, ή, ισοδύναμα, ότι η  $\phi$  δεν έχει τεκμήρια αλήθειας. Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τής άρνησης είναι ο τύπος  $\neg A \equiv A \rightarrow \mathbf{0}$  τών συναρτήσεων από έναν τύπο  $A$  στόν **0**, ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι ο  $A$  δεν είναι κατοικημένος (δεν έχει στοιχεία).

**Άσκηση 3.3.** Έστω  $E$  ο τύπος που έχει ως μοναδικό κατασκευαστή τόν

$$(x : E) e(x) : E.$$

Δείξτε ότι ο  $E$  δεν έχει στοιχεία. [Υπόδειξη: Διατυπώστε πρώτα τήν αρχή αναδρομής του  $E$ .]

Για τύπους  $A$  και  $B$  γράφουμε

$$A \simeq B$$

αν υπάρχουν  $f : A \rightarrow B$  και  $g : B \rightarrow A$  ούτως ώστε  $g(f(x)) = x$  για κάθε  $x : A$  και  $f(g(y)) = y$  για κάθε  $y : B$ .

**Άσκηση 3.4.** Δείξτε ότι αν  $\neg A$  τότε  $A \simeq \mathbf{0}$ .

### 3.10 Ασκήσεις

**Άσκηση 3.5.** Περιγράψτε συναρτήσεις

1.  $A \rightarrow \neg\neg A$ .
2.  $\neg\neg(A + \neg A)$ .
3.  $(A + \neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$ .

**Άσκηση 3.6.** Περιγράψτε συνάρτηση

$$f : ((A_1 \rightarrow C) \times (A_2 \rightarrow C)) \rightarrow (A_1 + A_2) \rightarrow C.$$

**Άσκηση 3.7.** Περιγράψτε συνάρτηση

$$f : \prod (x : A_1 + A_2) \left[ \left( \sum (x_1 : A_1) \text{in}_1(x_1) = x \right) + \left( \sum (x_2 : A_2) \text{in}_2(x_2) = x \right) \right].$$

**Άσκηση 3.8.** Ορίστε συνάρτηση

$$f : \left( \sum (x : \mathbf{1}) A(x) \right) \rightarrow A(!)$$

ούτως ώστε  $f(\text{pair}(!, a)) \equiv a$ .

**Άσκηση 3.9.** Χρησιμοποιήστε τον  $\text{ind}_{\text{Bool}}$  για να ορίσετε συνάρτηση

$$f : \prod (x : \text{Bool}) ((\text{false} = x) + (\text{true} = x))$$

με  $f(\text{false}) \equiv \text{in}_1(\text{refl}_{\text{false}})$  και  $f(\text{true}) \equiv \text{in}_2(\text{refl}_{\text{true}})$ .

**Άσκηση 3.10.** Χρησιμοποιήστε την  $f$  τής προηγούμενης άσκησης για να ορίσετε έναν μετασχηματισμό

$$(c_{\text{false}} : C(\text{false}), c_{\text{true}} : C(\text{true}), x : \text{Bool}) \text{ind}'(c_{\text{false}}, c_{\text{true}}, x) : C(x)$$

ο οποίος ικανοποιεί την ορίζουσα σχέση του  $\text{ind}_{\text{Bool}}$ .

**Άσκηση 3.11** ([7, άσκηση 1.4]). Ειδική περίπτωση του ορισμού με αναδρομή στον  $\text{Nat}$  είναι ο ορισμός με *επανάληψη* (iteration):

$$\begin{aligned} t(0) & \equiv d_0, \\ t(s(n)) & \equiv d_s(t(n)), \end{aligned}$$

όπου  $C$  τύπος,  $d_0 : C$  και  $(x : C) d_s(x) : C$ . Δοθέντων ενός τύπου  $C$ , ενός  $c_0 : C$ , και ενός  $(x : \text{Nat}, y : C) c_s(x, y) : C$  ορίστε, χρησιμοποιώντας επανάληψη αντί για αναδρομή, έναν μετασχηματισμό  $(n : \text{Nat}) r(n) : C$  ο οποίος ικανοποιεί τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} r(0) & = c_0, \\ r(s(n)) & = c_s(n, r(n)), \end{aligned}$$

και συμπεράνετε ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό  $n$ ,

$$r(n) = \text{rec}_{\text{Nat}}(c_0, c_s, n).$$

[Υπόδειξη: Ορίστε, με επανάληψη, έναν μετασχηματισμό  $(n : \text{Nat}) t(n) : \text{Nat} \times C$ , και εφαρμόστε τη δεύτερη προβολή για να πάρετε τον  $r$ . Για τη δεύτερη ιδιότητα, κάντε επαγωγή στο  $n$ . Τέλος, χρησιμοποιήστε το θεώρημα 2.3.1.]

**Άσκηση 3.12** ([7, άσκηση 1.5]). Δείξτε ότι τό εξαρτώμενο άθροισμα  $\Sigma(A)$  μιας οικογένειας  $A$  επί τού Bool συμπεριφέρεται όπως ο τύπος  $A(\text{false}) + A(\text{true})$ : Ορίστε κατάλληλους μετασχηματισμούς  $\text{in}'_1$ ,  $\text{in}'_2$ , και  $\text{ind}'$ , και επαληθεύστε τις ορίζουσες σχέσεις τού επαγωγέα.

**Άσκηση 3.13** ([7, άσκηση 1.6]). Εάν  $A$  οικογένεια επί τού Bool, ορίστε κατάλληλους μετασχηματισμούς

$$(x_1 : A(\text{false}), x_2 : A(\text{true})) \text{pair}'(x_1, x_2) : \prod(A),$$

και

$$\begin{aligned} (f : \prod(A)) \text{pr}'_1(f) &: A(\text{false}), \\ (f : \prod(A)) \text{pr}'_2(f) &: A(\text{true}), \end{aligned}$$

και επαληθεύστε ότι ικανοποιούνται οι προβλεπόμενες ορίζουσες σχέσεις.

**Άσκηση 3.14.** Δείξτε ότι

1.  $A + \mathbf{0} \simeq A$ ,
2.  $A \times \mathbf{0} \simeq \mathbf{0}$ ,
3.  $A \times \mathbf{1} \simeq A$ .

## Κεφάλαιο 4

# Σύμπαντα

Σε μία πρώτη ανάγνωση, τὰ σύμπαντα είναι για τούς τύπους ό,τι οι τύποι συναρτήσεων για τούς μετασχηματισμούς. Τά στοιχεία ενός τύπου συναρτήσεων κωδικοποιούν κάποιους μετασχηματισμούς, και η αποκωδικοποίηση πραγματοποιείται από τόν `apply`. τὰ στοιχεία ενός σύμπαντος κωδικοποιούν κάποιους τύπους, και η αποκωδικοποίηση πραγματοποιείται από ένα κατηγορημα  $T$ . Ωστόσο, η αναλογία σταματάει κάπου εδώ. Θα ξεκινήσουμε με κάποια πράγματα που μπορούμε να κάνουμε, ή θα θέλαμε να μπορούμε να κάνουμε, στή θεωρία τύπων.

### 4.1 Αναδρομικές οικογένειες τύπων

Η αρχή αναδρομής ενός τύπου μάς επιτρέπει να ορίζουμε μετασχηματισμούς αξιοποιώντας τόν τρόπο με τόν οποίο τὰ στοιχεία του παράγονται από τούς διάφορους κατασκευαστές. Τίποτα δεν χρησιμοποιείται από, ή προϋποτίθεται για, τίς τιμές τού οριζόμενου μετασχηματισμού. Μπορούμε, επομένως, να άρουμε τόν περιορισμό ό,τι οι τιμές είναι στοιχεία κάποιου τύπου (ή κάποιων τύπων, στήν περίπτωση τής αναδρομής σε οικογένεια), και να θεωρήσουμε αναδρομικούς ορισμούς γενικότερης μορφής. Ένα είδος μετασχηματισμού που μάς ενδιαφέρει είναι οι οικογένειες τύπων· προκειμένου για τόν τύπο `Bool`, η σχετική αρχή έχει ως εξής: Δοθέντων δύο τύπων  $C_{\text{false}}$  και  $C_{\text{true}}$ , οι σχέσεις

$$C(\text{false}) \equiv C_{\text{false}},$$

$$C(\text{true}) \equiv C_{\text{true}},$$

ορίζουν μία οικογένεια  $(x : \text{Bool}) C(x)$ .

Η άσκηση 3.9 χαρακτηρίζει τὰ στοιχεία τού `Bool` κατά τό ήμισυ: κάθε στοιχείο τού `Bool` είναι ίσο με ένα εκ τών `false` και `true`. Έχοντας στή διάθεσή μας αναδρομικές οικογένειες, μπορούμε να δείξουμε ό,τι αυτά τὰ δύο δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

**Θεώρημα 4.1.1.**  $\text{true} \neq \text{false}$ .

*Απόδειξη.* Χρειαζόμαστε μία συνάρτηση από τόν  $\text{true} = \text{false}$  στόν  $\mathbf{0}$ . Θεωρούμε τήν οικογένεια  $(x : \text{Bool}) C(x)$  που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$C(\text{false}) \equiv \mathbf{0},$$

$$C(\text{true}) \equiv \mathbf{1}.$$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$\lambda(p : \text{true} = \text{false}) \text{transport}^C(p, !). \quad \square$$

Από τό παραπάνω θεώρημα μπορούμε να συναγάγουμε όλες τις αναμενόμενες ανισότητες· για παράδειγμα,

**Πόρισμα 4.1.2** (4ο αξίωμα τού Peano). *Για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό  $n$ ,  $s(n) \neq 0$ .*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τόν μετασχηματισμό που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} t(0) &::= \text{false}, \\ t(s(n)) &::= \text{true}. \end{aligned}$$

Εάν για κάποιον  $n$ ,  $s(n) = 0$ , τότε  $\text{true} = \text{false}$ , άτοπο. □

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε τήν οικογένεια ( $n : \text{Nat}$ )  $F_n$  τών πεπερασμένων τύπων, όπου ο τύπος  $F_n$  έχει ακριβώς  $n$  στοιχεία, μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} F_0 &::= \mathbf{0}, \\ F_{s(n)} &::= F_n + \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Τό επόμενο παράδειγμα έχει λογικό ενδιαφέρον, και θα μάς οδηγήσει στό αντικείμενο τού κεφαλαίου. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε έναν τύπο, τά στοιχεία τού οποίου αναπαριστούν τις προτάσεις τής γλώσσας τής κατηγορηματικής λογικής με ισότητα. Θα χρειαστεί πρώτα απ' όλα να διευθετήσουμε τό θέμα τών μεταβλητών (individual variables). Στίς γλώσσες πρώτης τάξης, οι μεταβλητές έχουν πεδία διακύμανσης, τά λεγόμενα είδη (sorts). Συνήθως υπάρχει μόνο ένα είδος, οπότε αυτό αποσιωπάται, καθώς δεν συνεισφέρει κάτι στή διατύπωση. Η θεωρία τών διανυσματικών χώρων, όμως, έχει δύο είδη, τό Scalar για τά στοιχεία τού σώματος, και τό Vector για τά στοιχεία τού διανυσματικού χώρου, ενώ η θεωρία τών κατηγοριών έχει ένα είδος Object και μία οικογένεια ειδών ( $a, b : \text{Object}$ )  $\text{Hom}(a, b)$ . Εμείς εδώ θα πραγματευθούμε τή γενική περίπτωση, οπότε θα θεωρήσουμε ότι μάς έχει δοθεί ένας τύπος Sort, τά στοιχεία τού οποίου είναι τά σύμβολα τής γλώσσας για τά διάφορα είδη, και επιπλέον, για κάθε  $k : \text{Sort}$ , ένας τύπος  $T_{\text{Sort}}(k)$  που ερμηνεύει τό σύμβολο  $k$  και αποτελεί τό πεδίο διακύμανσης τών αντίστοιχων μεταβλητών. Αυτό θα μάς επιτρέψει να περιγράψουμε τις προτάσεις απ' ευθείας, χρησιμοποιώντας τόν διαθέσιμο μηχανισμό τής περιβάλλουσας θεωρίας τύπων για να αναπαραστήσουμε τις φόρμουλες ως μετασχηματισμούς.

Για να μην προκληθεί σύγχυση με τήν ισότητα τής θεωρίας τύπων, η ισότητα τής γλώσσας θα συμβολίζεται eq. Ο τύπος Sent τών τυπικών προτάσεων έχει τούς κατασκευαστές

- $(r, s : \text{Sent}) r \wedge s : \text{Sent}$ ,
- $(r, s : \text{Sent}) r \vee s : \text{Sent}$ ,
- $(r, s : \text{Sent}) r \supset s : \text{Sent}$ ,
- $F : \text{Sent}$ ,
- $T : \text{Sent}$ ,
- $(k : \text{Sort}, (x : T_{\text{Sort}}(k)) t(x) : \text{Sent}) \forall (k, t) : \text{Sent}$ ,

- $(k : \text{Sort}, (x : T_{\text{Sort}}(k)) t(x) : \text{Sent}) \exists(k, t) : \text{Sent}$ ,
- $(k : \text{Sort}, a, b : T_{\text{Sort}}(k)) \text{eq}_k(a, b) : \text{Sent}$ .

Υπάρχουν πολλά πράγματα που θα μπορούσαμε να κάνουμε με την παραπάνω περιγραφή. Αυτό που μάς ενδιαφέρει πρωτίστως είναι η ερμηνεία των τυπικών προτάσεων. Ορίζουμε λοιπόν την οικογένεια τύπων, ή κατηγορήμα,

$$(s : \text{Sent}) T(s)$$

μέσω της αναδρομής

$$\begin{aligned} T(r \wedge s) &::= T(r) \times T(s), \\ T(r \vee s) &::= T(r) + T(s), \\ T(r \supset s) &::= T(r) \rightarrow T(s), \\ T(\text{F}) &::= \mathbf{0}, \\ T(\text{T}) &::= \mathbf{1}, \\ T(\forall(k, t)) &::= \prod (x : T_{\text{Sort}}(k)) t(x), \\ T(\exists(k, t)) &::= \sum (x : T_{\text{Sort}}(k)) t(x), \\ T(\text{eq}_k(a, b)) &::= a =_{T_{\text{Sort}}(k)} b. \end{aligned}$$

Τό  $T$  αποτελεί ανάθεση τεκμηρίων αλήθειας, ή απόδοση νοήματος, στις τυπικές προτάσεις. Σε πιο παραδοσιακή φιλοσοφική ορολογία, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι τύποι είναι αναγνώσιμοι ως (ερμηνευμένες) προτάσεις, τό  $T(s)$  μπορεί να νοηθεί ως η πραγματική πρόταση που εκφράζει τις συνθήκες αλήθειας τής τυπικής πρότασης  $s$ . Για τόν λόγο αυτόν, αφ' ότου εισήχθη από τόν Tarski στό [6], τό  $T$  ονομάζεται τό *κατηγορήμα τής αλήθειας* τού  $\text{Sent}$ .

## 4.2 Σύμπαντα κατά Tarski

Θα θέλαμε να μιμηθούμε την παραπάνω κατασκευή για να ορίσουμε έναν τύπο  $U$ , τά στοιχεία τού οποίου θα αναπαριστούν, με τή βοήθεια ενός κατηγορήματος  $T$ , κάποιους από τούς τύπους. Τώρα δεν υπάρχει η διάκριση μεταξύ  $\text{Sort}$  και  $\text{Sent}$ , και τά  $U$  και  $T$  χρειάζεται να οριστούν από τό μηδέν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην είναι πλέον εφικτός ο διαχωρισμός ανάμεσα στόν ορισμό τού  $U$  και εκείνον τού  $T$ . Για παράδειγμα, ο κατασκευαστής που αντιστοιχεί στό εξαρτώμενο γινόμενο έχει τή μορφή

$$(a : U, (x : T(a)) b(x) : U) \text{prod}(a, b) : U,$$

ή, ως κανόνας σχηματισμού,

$$\frac{a : U \quad \begin{array}{c} (x : T(a)) \\ b(x) : U \end{array}}{\text{prod}(a, b) : U},$$

όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι προκειμένου να σχηματίσουμε τό  $\text{prod}(a, b)$  πρέπει ήδη να γνωρίζουμε τό  $T(a)$ . Παρόμοια είναι η κατάσταση με τό εξαρτώμενο άθροισμα και

τήν ισότητα. Ο πλήρης αμοιβαίος ορισμός των  $U$  και  $T$  έχει τη μορφή

$$\begin{aligned}
(a, b : U) \text{ plus}(a, b) : U & \quad T(\text{plus}(a, b)) := T(a) + T(b), \\
0 : U & \quad T(0) := \mathbf{0}, \\
1 : U & \quad T(1) := \mathbf{1}, \\
(a : U, (x : T(a)) b(x) : U) \text{ prod}(a, b) : U & \quad T(\text{prod}(a, b)) := \prod (x : T(a)) T(b(x)), \\
(a : U, (x : T(a)) b(x) : U) \text{ sum}(a, b) : U & \quad T(\text{sum}(a, b)) := \sum (x : T(a)) T(b(x)), \\
(a : U, b, c : T(a)) \text{ eq}_a(b, c) : U & \quad T(\text{eq}_a(b, c)) := b =_{T(a)} c.
\end{aligned}$$

Κάθε ρήτρα του παραπάνω ορισμού αποτελείται από έναν κατασκευαστή του  $U$ , καθώς και την ορίζουσα σχέση του  $T$  που αντιστοιχεί σε αυτόν τον κατασκευαστή, εις τρόπον ώστε οι κατασκευαστές του  $U$  να μπορούν να αναφέρονται στις τιμές του  $T$  σε στοιχεία που έχουν κατασκευαστεί ήδη. Οι ορισμοί αυτής της μορφής ονομάζονται *επαγωγικοαναδρομικοί* (*inductive-recursive*) ορισμοί (επειδή διαπλέκονται ο επαγωγικός ορισμός του  $U$  και ο αναδρομικός ορισμός του  $T$ ), και αποτελούν την κύρια μέθοδο κατασκευής συμπάντων.

**Ορισμός 4.2.1.** Ένα *σύμπαν κατά Tarski* είναι ένα ζεύγος  $(U, T)$  αποτελούμενο από έναν τύπο  $U$  και μία οικογένεια  $T$  επί του  $U$ .

Ο  $U$  είναι ο υποκείμενος τύπος του σύμπαντος (και συχνά αναφέρεται αυτός ως τό σύμπαν), ενώ η  $T$  είναι τό κατηγορημα αλήθειας του σύμπαντος.

Εάν  $a : U$  με  $T(a) \equiv A$ , λέμε ότι τό  $a$  είναι η *ανάκλαση* του  $A$  στό  $U$ , και (εάν υπάρχει τέτοιο  $a$ ) ότι ο  $A$  *ανακλάται* στό  $U$ . Στο παράδειγμα, οι τύποι που ανακλώνται στό σύμπαν είναι τά αθροίσματα (ανακλασμένων) τύπων, οι τύποι  $\mathbf{0}$  και  $\mathbf{1}$ , τά εξαρτώμενα γινόμενα και αθροίσματα, και οι ισότητες. Ισοδύναμα, λέμε ότι τό σύμπαν είναι *κλειστό* ως προς τούς παραπάνω τρόπους σχηματισμού τύπων.

Η επιλογή των τύπων στον παραπάνω ορισμό είναι ενδεικτική. Θα μπορούσαμε, φερ' ειπείν, να προσθέσουμε ένα στοιχείο που να αναπαριστά τούς φυσικούς αριθμούς:

$$\text{nat} : U \quad T(\text{nat}) := \text{Nat}.$$

Μπορούμε επίσης να ανακλάσουμε ένα σύμπαν  $U$  μέσα σε ένα (ευρύτερο) σύμπαν  $U'$ , εντάσσοντας στον ορισμό του  $U'$  τη ρήτρα

$$u : U' \quad T'(u) := U.$$

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να σχηματίσουμε μία ολόκληρη ακολουθία

$$U_0, U_1, U_2, \dots$$

συμπάντων, καθένα από τά οποία ανακλά και επεκτείνει όλα τά προηγούμενα. Εν συνεχεία, μπορούμε να ανακλάσουμε τό ίδιο τό σχήμα

$$(U) U'$$

σε ένα σύμπαν  $U_\omega$  τό οποίο, κατά συνέπεια, ανακλά όλα τά  $U_n$ . Και δεν υπάρχει λόγος να σταματήσουμε εδώ.

## **Μέρος II**

# **Ομοτοπική θεωρία τύπων**

## Κεφάλαιο 5

# Η ομοτοπική δομή τών τύπων

Η κεντρική ιδέα στην ομοτοπική θεωρία τύπων είναι ότι οι τύποι μπορούν να γίνουν αντιληπτοί ως γεωμετρικά αντικείμενα μέχρις ομοτοπικής ισοδυναμίας. Στην κλασική θεωρία ομοτοπίας, ένας χώρος  $X$  αναπαρίσταται από ένα σύνολο σημείων εφοδιασμένο με μία τοπολογία, και ένα μονοπάτι μεταξύ τών σημείων  $x$  και  $y$  τού  $X$  αναπαρίσταται από μία συνεχή απεικόνιση  $p : [0, 1] \rightarrow X$ , όπου  $p(0) = x$  και  $p(1) = y$ . Από πολλές απόψεις, η αυστηρή (δηλαδή, κατά σημείο) ισότητα μονοπατιών είναι υπερβολικά λεπτή σχέση. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να ορίσει τής πράξεις τής συνένωσης μονοπατιών (αν τó  $p$  είναι μονοπάτι από τó  $x$  στο  $y$  και τó  $q$  είναι μονοπάτι από τó  $y$  στο  $z$ , τότε η συνένωση  $p \cdot q$  είναι μονοπάτι από τó  $x$  στο  $z$ ) και τής αντιστροφής (τó  $p^{-1}$  είναι μονοπάτι από τó  $y$  στο  $x$ ). Ωστόσο, υπάρχουν φυσικές εξισώσεις μεταξύ τών πράξεων που δεν ισχύουν για τήν αυστηρή ισότητα: Για παράδειγμα, τó μονοπάτι  $p \cdot p^{-1}$  (τó οποίο πηγαίνει από τó  $x$  στο  $y$  και πάλι πίσω) δεν είναι αυστηρά ίσο με τó σταθερό μονοπάτι στο  $x$ .

Η λύση είναι να θεωρήσουμε μία αδρότερη έννοια ισότητας μονοπατιών που ονομάζεται *ομοτοπία*. Μία ομοτοπία μεταξύ τών συνεχών απεικονίσεων  $f : X_1 \rightarrow X_2$  και  $g : X_1 \rightarrow X_2$  είναι μία συνεχής απεικόνιση  $H : X_1 \times [0, 1] \rightarrow X_2$  με  $H(x, 0) = f(x)$  και  $H(x, 1) = g(x)$ . Προκειμένου για δύο μονοπάτια  $p$  και  $q$  από τó  $x$  στο  $y$ , μία ομοτοπία είναι μία συνεχής απεικόνιση  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  με  $H(s, 0) = p(s)$  και  $H(s, 1) = q(s)$  για όλα τά  $s \in [0, 1]$ . Σε αυτήν τήν περίπτωση απαιτούμε επίσης ότι  $H(0, t) = x$  και  $H(1, t) = y$  για όλα τά  $t \in [0, 1]$ , ούτως ώστε για κάθε  $t$  η απεικόνιση  $H(\_, t)$  να είναι και πάλι μονοπάτι από τó  $x$  στο  $y$ : μία ομοτοπία αυτού τού είδους λέμε ότι *διατηρεί τά άκρα*. Δεδομένου ότι τó  $[0, 1] \times [0, 1]$  είναι διδιάστατο, μιλάμε επίσης για τήν  $H$  ως διδιάστατο *μονοπάτι μεταξύ μονοπατιών*.

Για παράδειγμα, επειδή τó  $p \cdot p^{-1}$  φεύγει και επιστρέφει κατά μήκος τής ίδιας διαδρομής, γνωρίζουμε ότι μπορεί να συρρικνωθεί συνεχώς στο σταθερό μονοπάτι—δεν θα πιαστεί, για παράδειγμα, γύρω από μία τρύπα στον χώρο. Η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας, και πράξεις όπως η συνένωση, η αντιστροφή, κ.λπ. τήν σέβονται. Επιπλέον, οι κλάσεις ισοδυναμίας τών ομοτοπικών βρόχων (loops) σε κάποιο σημείο  $x_0$  (όπου δύο βρόχοι  $p$  και  $q$  εξισώνονται όταν υπάρχει μία *βασισμένη* ομοτοπία μεταξύ τους, δηλαδή μία ομοτοπία  $H$  όπως παραπάνω που ικανοποιεί επιπλέον  $H(0, t) = H(1, t) = x_0$  για όλα τά  $t$ ) σχηματίζουν μία ομάδα που ονομάζεται *θεμελιώδης ομάδα*. Αυτή η ομάδα είναι μία *αλγεβρική αναλλοίωτη* ενός χώρου, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διερευνηθεί εάν δύο χώροι είναι *ομοτοπικά ισοδύναμοι* (υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις εκατέρωθεν, οι συνθέσεις τών οποίων είναι ομοτοπικές προς τής ταυτοτικές), επειδή οι ισοδύναμοι χώροι έχουν ισόμορφες θεμε-

λιώδεις ομάδες.

Επειδή οι ομοτοπίες είναι οι ίδιες ένα είδος διδιάστατου μονοπατιού, υπάρχει μία φυσική έννοια τριδιάστατης ομοτοπίας μεταξύ ομοτοπιών, και, στή συνέχεια, ομοτοπίας μεταξύ ομοτοπιών μεταξύ ομοτοπιών, και ούτω καθεξής. Αυτός ο άπειρος πύργος σημείων, μονοπατιών, ομοτοπιών, ομοτοπιών μεταξύ ομοτοπιών, ..., εφοδιασμένος με αλγεβρικές πράξεις όπως η θεμελιώδης ομάδα, είναι στιγμιότυπο μιας αλγεβρικής δομής που ονομάζεται (ασθενές)  $\infty$ -ομαδοειδές. Ένα  $\infty$ -ομαδοειδές αποτελείται από μία συλλογή αντικειμένων, μία συλλογή μορφισμών μεταξύ αντικειμένων, και στή συνέχεια μορφισμών μεταξύ μορφισμών, και ούτω καθεξής, εφοδιασμένων με κάποια περίπλοκη αλγεβρική δομή· ένας μορφισμός στό επίπεδο  $k$  ονομάζεται  $k$ -μορφισμός. Οι μορφισμοί σε κάθε επίπεδο έχουν ταυτοτικούς, σύνθεση και αντιστροφή, τά οποία είναι ασθενή με τήν έννοια ότι ικανοποιούν τούς νόμους τού ομαδοειδούς (η σύνθεση είναι προσεταιριστική, οι ταυτοτικοί είναι ουδέτερα στοιχεία για τή σύνθεση, τά αντίστροφα απλοποιούνται) μόνο κατά προσέγγιση μορφισμών στό επόμενο επίπεδο, και αυτό δημιουργεί περαιτέρω δομή. Για παράδειγμα, επειδή η προσεταιριστικότητα τής σύνθεσης μορφισμών  $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$  είναι η ίδια μορφισμός τής αμέσως επόμενης διάστασης, χρειάζονται πρόσθετες πράξεις που να συσχετίζουν τīs διάφορες αποδείξεις προσεταιριστικότητας: Οι διάφοροι τρόποι συσχετισμού τού  $p \cdot (q \cdot (r \cdot s))$  με τού  $((p \cdot q) \cdot r) \cdot s$  δημιουργούν τού πεντάγωνο τού Mac Lane.

Κάθε τοπολογικός χώρος  $X$  έχει ένα θεμελιώδες  $\infty$ -ομαδοειδές, οι  $k$ -μορφισμοί τού οποίου είναι τά  $k$ -διάστατα μονοπάτια στόν  $X$ . Η ασθένεια τού  $\infty$ -ομαδοειδούς αντιστοιχεί ευθέως στό γεγονός ότι τά μονοπάτια σχηματίζουν ομάδα μόνο μέχρις ομοτοπίας, με τά  $k + 1$ -μονοπάτια να χρησιμεύουν ως ομοτοπίες μεταξύ  $k$ -μονοπατιών. Επιπλέον, τού  $\infty$ -ομαδοειδούς ενός χώρου διατηρεί αρκετές πτυχές τού χώρου ώστε να μπορούμε να κάνουμε θεωρία ομοτοπίας: Η κατασκευή τού θεμελιώδους  $\infty$ -ομαδοειδούς είναι προσαρτημένη προς τή γεωμετρική υλοποίηση ενός  $\infty$ -ομαδοειδούς ως χώρου, και αυτή η προσάρτηση διατηρεί τή θεωρία τής ομοτοπίας (αυτό ονομάζεται ομοτοπική υπόθεση/ομοτοπικό θεώρημα, διότι τού εάν είναι υπόθεση ή θεώρημα εξαρτάται από τού πώς ορίζει κανείς τού  $\infty$ -ομαδοειδές). Για παράδειγμα, μπορείτε εύκολα να ορίσετε τή θεμελιώδη ομάδα ενός  $\infty$ -ομαδοειδούς, και αν υπολογίσετε τή θεμελιώδη ομάδα τού θεμελιώδους  $\infty$ -ομαδοειδούς ενός χώρου, θα συμπέσει με τόν κλασικό ορισμό τής θεμελιώδους ομάδας αυτού τού χώρου. Εξαιτίας αυτής τής αντιστοιχίας, η θεωρία τής ομοτοπίας και η ανώτερη θεωρία κατηγοριών σχετίζονται στενά.

Στήν ομοτοπική θεωρία τύπων, κάθε τύπος έχει τή δομή ενός  $\infty$ -ομαδοειδούς. Θυμηθείτε ότι για οποιονδήποτε τύπο  $A$  και οποιαδήποτε  $x, y: A$  έχουμε έναν τύπο ισότητας  $x = y$ . Λογικά, μπορούμε να σκεφτούμε τά στοιχεία τού  $x = y$  ως τεκμήρια ότι τά  $x$  και  $y$  είναι ίσα ή ως ταυτίσεις τού  $x$  με τού  $y$ . Επιπλέον, στή θεωρία τύπων (σε αντίθεση, ως πούμε, με τή λογική πρώτης τάξης) τά στοιχεία τού  $x = y$  μπορούν να είναι αντικείμενο περαιτέρω προτάσεων. Επομένως, μπορούμε να *επαναλάβουμε* τήν ισότητα: Μπορούμε να σχηματίσουμε τόν τύπο  $p =_{x=y} q$  τών ταυτίσεων μεταξύ τών ταυτίσεων  $p$  και  $q$ , και τόν τύπο  $r =_{p=_{x=y}q} s$ , και ούτω καθεξής. Η δομή αυτού τού πύργου ισότητων αντιστοιχεί ακριβώς σε αυτή τών συνεχών μονοπατιών και (ανώτερων) ομοτοπιών μεταξύ τους σε έναν χώρο, ή σε ένα  $\infty$ -ομαδοειδές.

Έτσι, θα αναφερόμαστε συχνά σε ένα στοιχείο  $p$  τού  $x = y$  ως μονοπάτι από τού  $x$  στό  $y$ : καλούμε τά  $x$  και  $y$  άκρα τού μονοπατιού. Δύο μονοπάτια  $p, q: x = y$  με τά ίδια άκρα λέγεται ότι είναι παράλληλα, οπότε ένα στοιχείο  $r: p =_{x=y} q$  μπορεί να νοηθεί ως ομοτοπία· θα τού αναφέρουμε συχνά ως διδιάστατο μονοπάτι. Παρομοίως, ο  $r =_{p=_{x=y}q} s$  είναι ο τύπος τών τριδιάστατων μονοπατιών μεταξύ δύο παράλληλων διδιάστατων μονοπατιών, και ούτω καθεξής. Εάν ο τύπος  $A$  είναι «σύνολο», όπως ο

Nat, αυτοί οι επαναλαμβανόμενοι τύποι ισότητας δεν θα έχουν ενδιαφέρον, αλλά στη γενική περίπτωση μπορούν να αναπαριστούν μη τετριμμένους τύπους ομοτοπίας.

Μία σημαντική διαφορά μεταξύ της ομοτοπικής θεωρίας τύπων και της κλασικής θεωρίας της ομοτοπίας είναι ότι η ομοτοπική θεωρία τύπων παρέχει μία *συνθετική* περιγραφή των χώρων, με την εξής έννοια. Η συνθετική γεωμετρία είναι η γεωμετρία στο στυλ του Ευκλείδη: Ξεκινά από κάποιες βασικές έννοιες (σημεία και ευθείες), κατασκευές (μία ευθεία που συνδέει δύο σημεία) και αξιώματα (όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες), και συνάγει τις λογικές τους συνέπειες. Αυτό αντιδιαστέλλεται με την αναλυτική γεωμετρία, όπου έννοιες όπως σημεία και ευθείες ερμηνεύονται συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες στον  $\mathbb{R}^n$ —οι ευθείες είναι σύνολα σημείων—και οι βασικές κατασκευές και αξιώματα συνάγονται από αυτή την αναπαράσταση. Ενώ η κλασική θεωρία της ομοτοπίας είναι αναλυτική (οι χώροι και τά μονοπάτια αποτελούνται από σημεία), η ομοτοπική θεωρία τύπων είναι συνθετική: τά σημεία, τά μονοπάτια και τά μονοπάτια μεταξύ μονοπατιών είναι βασικές, αδιαίρετες, αρχικές έννοιες.

Επιπλέον, ένα από τά εκπληκτικά πράγματα σχετικά με την ομοτοπική θεωρία τύπων είναι ότι όλες οι βασικές κατασκευές και αξιώματα—όλη η ανώτερη δομή ομαδοειδούς—προκύπτει αυτόματα από την αρχή επαγωγής της ισότητας. Αυτή η αρχή επαγωγής εφοδιάζει κάθε τύπο με τη δομή ενός  $\infty$ -ομαδοειδούς, και κάθε συνάρτηση μεταξύ δύο τύπων με τη δομή ενός μορφισμού μεταξύ δύο τέτοιων ομαδοειδών. Αυτό είναι ενδιαφέρον από μαθηματική άποψη, επειδή δίνει έναν νέο τρόπο εργασίας με  $\infty$ -ομαδοειδή. Είναι ενδιαφέρον από τυποθεωρητική άποψη, επειδή αποκαλύπτει νέες πράξεις που συνδέονται με κάθε τύπο και συνάρτηση.

## 5.1 Οι τύποι είναι ανώτερα ομαδοειδή

Θυμηθείτε (λήμματα 2.2.1 και 2.2.2) ότι ένας οποιοσδήποτε τύπος  $A$  φέρει την εξής δομή:

- Για  $x, y, z : A$ ,  $p : x = y$  και  $q : y = z$ , ένα  $p \cdot q : x = z$  με  $\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$ . Καλούμε τό  $p \cdot q$  τη *συνένωση (concatenation)* των  $p$  και  $q$ .
- Για  $x : A$ , ένα  $\text{refl}_x : x = x$ . Καλούμε τό  $\text{refl}_x$  τό *σταθερό μονοπάτι (constant path)* στό  $x$ .
- Για  $x, y : A$  και  $p : x = y$ , ένα  $p^{-1} : y = x$  με  $\text{refl}_x^{-1} \equiv \text{refl}_x$ . Καλούμε τό  $p^{-1}$  τό *αντίστροφο (inverse)* τού  $p$ .

Τά παραπάνω προέκυψαν από την απόδειξη ότι η ισότητα τού  $A$  είναι σχέση ισοδυναμίας. Ωστόσο, τό πράγμα δεν τελειώνει εδώ. Από ομοτοπική άποψη, οι πράξεις αυτές αποτελούν τό πρώτο επίπεδο της δομής ομαδοειδούς τού  $A$ —χρειαζόμαστε επίσης συνθήκες συνοχής (coherence conditions) για τις πράξεις αυτές, καθώς και ανάλογες πράξεις σε ανώτερες διαστάσεις. Για παράδειγμα, θέλουμε να ξέρουμε ότι η συνένωση είναι προσεταιριστική, ότι τά σταθερά μονοπάτια είναι ουδέτερα και ότι τό  $p^{-1}$  είναι αντίστροφο τού  $p$  για τη συνένωση.

**Λήμμα 5.1.1.** Έστω  $A$  τύπος.

1. Για οποιαδήποτε  $x, y, z, w : A$ ,  $p : x = y$ ,  $q : y = z$  και  $r : z = w$ ,  $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ .
2. Για οποιαδήποτε  $x, y : A$  και  $p : x = y$ ,  $\text{refl}_x \cdot p = p$  και  $p \cdot \text{refl}_y = p$ .

3. Για οποιαδήποτε  $x, y: A$  και  $p: x = y$ ,  $p \cdot p^{-1} = \text{refl}_x$  και  $p^{-1} \cdot p = \text{refl}_y$ .

Οι ιδιότητες αυτές είναι τὰ αξιώματα τής εξής αλγεβρικής δομής:

**Ορισμός 5.1.2.** Ένα ομαδοειδές (*groupoid*) είναι μία κατηγορία, όλοι οι μορφισμοί τής οποίας είναι ισομορφισμοί.

Αυτό που μάς λέει τὸ λήμμα 5.1.1 είναι ὅτι κάθε τύπος  $A$ , εφοδιασμένος με σταθερά μονοπάτια, συνένωση και αντιστροφή μονοπατιών είναι ένα ομαδοειδές, με αντικείμενα τὰ σημεία τού  $A$ , μορφισμούς από τὸ  $x$  στὸ  $y$  τὰ μονοπάτια από τὸ  $x$  στὸ  $y$ , σύνθεση τῆ συνένωση μονοπατιών, ταυτοτικούς μορφισμούς τὰ σταθερά μονοπάτια, και αντίστροφους μορφισμούς τὰ αντίστροφα μονοπάτια.

*Απόδειξη τού λήμματος.* Σε ὅλες τῖς περιπτώσεις, θα επιστρατεύσουμε τὴν αρχὴ επαγωγῆς τῆς ισότητος προκειμένου να αναγάγουμε τὸ γενικὸ αποδεικτέο στὸ εἰδικὸ στὸ ὁποῖο ὅλα τὰ μονοπάτια είναι σταθερά.

1. Θα κανουμε διαδοχικὰ επαγωγὴ στὰ  $p$ ,  $q$ , και  $r$ . Θεωρούμε τὴν οικογένεια  $(x, y: A, p: x = y, z: A, q: y = z, w: A, r: z = w) C(x, y, p, z, q, w, r)$ , ὅπου

$$C(x, y, p, z, q, w, r) := (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r).$$

Κατ' αρχὰς ἔχουμε

$$(\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x) \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$$

και

$$\text{refl}_x \cdot (\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x) \equiv \text{refl}_x \cdot \text{refl}_x \equiv \text{refl}_x$$

και επομένως

$$\text{refl}_{\text{refl}_x} : C(x, x, \text{refl}_x, x, \text{refl}_x, x, \text{refl}_x).$$

Μπορούμε επομένως να ορίσουμε ἕνα

$$u(x, w, r) : C(x, x, \text{refl}_x, x, \text{refl}_x, w, r)$$

μέσω τῆς επαγωγῆς

$$u(x, x, \text{refl}_x) := \text{refl}_{\text{refl}_x}.$$

Εν συνεχείᾳ ορίζουμε ἕνα

$$v(x, z, q, w, r) : C(x, x, \text{refl}_x, z, q, w, r)$$

μέσω τῆς επαγωγῆς

$$v(x, x, \text{refl}_x, w, r) := u(x, w, r).$$

Τέλος ορίζουμε τὸ επιθυμητὸ στοιχείο

$$\text{assoc}(x, y, p, z, q, w, r) : C(x, y, p, z, q, w, r)$$

μέσω τῆς επαγωγῆς

$$\text{assoc}(x, x, \text{refl}_x, z, q, w, r) := v(x, z, q, w, r).$$

2. Δείχνουμε τήν πρώτη ισότητα. Πλήρως διατυπωμένο, τό ζητούμενο είναι να ορίσουμε ένα

$$\text{lunit}(x, y, p) : \text{refl}_x \cdot p = p.$$

Αν θεωρήσουμε τήν οικογένεια  $(x, y : A, p : x = y) C(x, y, p)$  με  $C(x, y, p) := \text{refl}_x \cdot p = p$ , τότε,

$$\begin{aligned} C(x, x, \text{refl}_x) &\equiv \text{refl}_x \cdot \text{refl}_x = \text{refl}_x \\ &\equiv \text{refl}_x = \text{refl}_x, \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να ορίσουμε τό  $\text{lunit}(x, y, p)$  με επαγωγή στό  $p$ , θέτοντας

$$\text{lunit}(x, x, \text{refl}_x) := \text{refl}_{\text{refl}_x}.$$

Όμοια ορίζεται ένα

$$\text{runit}(x, y, p) : p \cdot \text{refl}_y = p.$$

3. Για τήν πρώτη ισότητα, θεωρούμε τήν οικογένεια  $(x, y : A, p : x = y) C(x, y, p)$  με  $C(x, y, p) := p \cdot p^{-1} = \text{refl}_x$ . Τότε,

$$\begin{aligned} C(x, x, \text{refl}_x) &\equiv \text{refl}_x \cdot (\text{refl}_x)^{-1} = \text{refl}_x \\ &\equiv \text{refl}_x \cdot \text{refl}_x = \text{refl}_x \\ &\equiv \text{refl}_x = \text{refl}_x. \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε ένα

$$\text{rinv}(x, y, p) : C(x, y, p)$$

μέσω τής επαγωγής

$$\text{rinv}(x, x, \text{refl}_x) := \text{refl}_{\text{refl}_x}.$$

Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται παρομοίως. □

## 5.2 Οι συναρτήσεις είναι συναρτητές

Συνεχίζοντας, θα εξετάσουμε τή συμπεριφορά τών συναρτήσεων στά μονοπάτια. Θα δούμε ότι όπως οι τύποι είναι αυτομάτως ( $\infty$ -)ομαδοειδή, έτσι και οι συναρτήσεις είναι αυτομάτως ομομορφισμοί ομαδοειδών.

**Λήμμα 5.2.1.** *Η δράση μιας συνάρτησης  $f : A \rightarrow B$  στά μονοπάτια τού  $A$  είναι ομομορφική:*

1.  $f(\text{refl}_x) = \text{refl}_{f(x)}$ ,
2.  $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q)$ ,
3.  $f(p^{-1}) = f(p)^{-1}$ .

*Απόδειξη.* Ας θυμηθούμε, κατ' αρχάς, τήν ορίζουσα σχέση τής εφαρμογής τής  $f$  στά μονοπάτια τού  $A$ : Για  $x : A$ ,

$$f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}.$$

1. Άμεσο.
2. Μπορούμε να κάνουμε επαγωγή σε οποιοδήποτε από τὰ  $p$  και  $q$ , ή σε αμφότερα· στην τελευταία περίπτωση, που είναι και η ενδεδειγμένη, θεωρούμε τήν οικογένεια  $(x, y : A, p : x = y, z : A, q : y = z) C(x, y, p, z, q)$  με

$$C(x, y, p, z, q) := f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q).$$

Έχουμε

$$f(\text{refl}_x \cdot \text{refl}_x) \equiv f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(y)}$$

και

$$f(\text{refl}_x) \cdot f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(y)} \cdot \text{refl}_{f(y)} \equiv \text{refl}_{f(y)}$$

και επομένως

$$\text{refl}_{\text{refl}_{f(x)}} : C(x, x, \text{refl}_x, x, \text{refl}_x).$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε, για  $x, z : A$  και  $q : x = z$ , ένα

$$u(x, z, q) : C(x, x, \text{refl}_x, z, q)$$

με τήν επαγωγή

$$u(x, x, \text{refl}_x) := \text{refl}_{\text{refl}_{u(x)}}.$$

Εν συνεχεία ορίζουμε, με επαγωγή στό  $p$ , ένα

$$v(x, y, p, z, q) : C(x, y, p, z, q)$$

θέτοντας

$$v(x, x, \text{refl}_x, z, q) := u(x, z, q)$$

που είναι και τό ζητούμενο.

3. Θεωρούμε τήν οικογένεια  $(x, y : A, p : x = y) C(x, y, p)$  με

$$C(x, y, p) := f(p^{-1}) = f(p)^{-1}.$$

Οι υπολογισμοί δίνουν

$$f(\text{refl}_x^{-1}) \equiv f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)},$$

και

$$f(\text{refl}_x)^{-1} \equiv \text{refl}_{f(x)}^{-1} \equiv \text{refl}_{f(x)},$$

οπότε έχουμε

$$\text{refl}_{\text{refl}_{f(x)}} : C(x, x, \text{refl}_x).$$

Μπορούμε επομένως να ορίσουμε ένα

$$t(x, y, p) : C(x, y, p)$$

θέτοντας

$$t(x, x, \text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{\text{refl}_{f(x)}},$$

που είναι τό ζητούμενο.

Εναλλακτικά, μπορούμε να μιμηθούμε την απόδειξη τής διατήρησης τών αντιστρόφων από ομομορφισμούς ομάδων:

$$\begin{aligned} f(p^{-1}) &= f(p^{-1}) \cdot \text{refl}_x \\ &= f(p^{-1}) \cdot (f(p) \cdot f(p)^{-1}) \\ &= (f(p^{-1}) \cdot f(p)) \cdot f(p)^{-1} \\ &= (f(p^{-1} \cdot p)) \cdot f(p)^{-1} \\ &= f(\text{refl}_x) \cdot f(p)^{-1} \\ &= \text{refl}_{f(x)} \cdot f(p)^{-1} \\ &= f(p)^{-1}. \end{aligned} \quad \square$$

Τό επόμενο λήμμα βεβαιώνει ότι ο παραπάνω ορισμός τής δράσης τής  $f$  στά μονοπάτια είναι συναρτητικός ως προς  $f$ . Ας θυμηθούμε τīs βασικές κατηγορικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \text{id}_A &:= \lambda(x : A) x, \\ g \circ f &:= \lambda(x : A) g(f(x)). \end{aligned}$$

**Λήμμα 5.2.2.** 1.  $\text{id}_A(p) = p$ ,

2.  $(g \circ f)(p) = g(f(p))$ .

*Απόδειξη.* Με επαγωγή στό  $p$ , αρκεί να ελέγξουμε καθεμία από τīs ισότητες στήν περίπτωση που τό  $p$  είναι ένα σταθερό μονοπάτι. Για τήν πρώτη έχουμε

$$\text{id}_A(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{\text{id}_A(x)} \equiv \text{refl}_x,$$

ενώ για τή δεύτερη,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\text{refl}_x) &\equiv \text{refl}_{(g \circ f)(x)} \equiv \text{refl}_{g(f(x))}, \\ g(f(\text{refl}_x)) &\equiv g(\text{refl}_{f(x)}) \equiv \text{refl}_{g(f(x))}. \end{aligned} \quad \square$$

### 5.3 Οι ομοτοπίες είναι φυσικοί μετασχηματισμοί

Παραδοσιακά, θεωρούμε ότι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται εάν παίρνουν ίσες τιμές σε όλα τά ορίσματα. Σύμφωνα με την ερμηνεία των προτάσεων ως τύπων, αυτό υποδεικνύει ότι δύο (ενδεχομένως εξαρτώμενες) συναρτήσεις  $f$  και  $g$  θα πρέπει να ταυτίζονται εάν ο τύπος  $\prod(x : A) f(x) = g(x)$  κατοικείται. Σύμφωνα με τήν ομοτοπική ερμηνεία, αυτός ο τύπος εξαρτώμενων συναρτήσεων αποτελείται από *συνεχή* μονοπάτια ή *συναρτητικές* ισοδυναμίες, και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ο τύπος τών *ομοτοπίων* ή τών *φυσικών ισομορφισμών*. Θα υιοθετήσουμε την τοπολογική ορολογία για τά στοιχεία τού τύπου αυτού.

**Ορισμός 5.3.1.** Ας θεωρήσουμε μία οικογένεια  $(x : A) B(x)$  και δύο συναρτήσεις  $f, g : \prod(x : A) B(x)$ . Μία *ομοτοπία* από την  $f$  στην  $g$  είναι ένα στοιχείο του τύπου

$$f \sim g := \prod(x : A) (f(x) = g(x)).$$

**Λήμμα 5.3.2.** Η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας.

*Απόδειξη.* Η ανακλαστικότητα είναι προφανής:

$$\lambda(x : A) \text{refl}_{f(x)} : f \sim f.$$

Για τή συμμετρία: Εάν  $H : f \sim g$ , τότε

$$\lambda(x : A) H(x)^{-1} : g \sim f.$$

Τέλος, για τή μεταβατικότητα, εάν  $H : f \sim g$  και  $I : g \sim h$ , τότε

$$\lambda(x : A) H(x) \cdot I(x) : f \sim h. \quad \square$$

Όπως οι συναρτήσεις είναι αυτομάτως συναρτητές (=ομομορφισμοί ομαδοειδών), οι ομοτοπίες είναι αυτομάτως φυσικοί μετασχηματισμοί.

**Λήμμα 5.3.3.** Εάν  $H : f \sim g$  ομοτοπία μεταξύ των συναρτήσεων  $f, g : \prod(x : A) B(x)$ , και  $p : x =_A y$ , τότε  $f(p) \cdot H(y) = H(x) \cdot g(p)$ .

*Απόδειξη.* Στην περίπτωση ενός σταθερού μονοπατιού  $\text{refl}_x$  έχουμε

$$f(\text{refl}_x) \cdot H(x) = \text{refl}_{f(x)} \cdot H(x) = H(x),$$

και

$$H(x) \cdot g(\text{refl}_x) = H(x) \cdot \text{refl}_{g(x)} = H(x).$$

Τό ζητούμενο έπεται με επαγωγή στο  $p$ . □

**Πόρισμα 5.3.4.** Έστω  $H : f \sim \text{id}_A$  ομοτοπία, όπου  $f : A \rightarrow A$ . Τότε, για οποιοδήποτε  $x : A$ ,

$$H(f(x)) = f(H(x)).$$

*Απόδειξη.* Από τό προηγούμενο λήμμα,  $f(H(x)) \cdot H(x) = H(f(x)) \cdot H(x)$ . Τό ζητούμενο προκύπτει με απλοποίηση του  $H(x)$ . □

## 5.4 Οι οικογένειες τύπων είναι fibrations

Εφ' όσον οι εξαρτώμενες συναρτήσεις αποτελούν ουσιώδες συστατικό τής θεωρίας τύπων, θα χρειαστούμε επίσης μια εκδοχή του λήμματος 2.2.3 για αυτές. Ωστόσο, αυτό δεν είναι τόσο απλό να διατυπωθεί, επειδή για  $f : \prod(x : A) B(x)$  και  $p : x_1 =_A x_2$ , τά  $f(x_1) : B(x_1)$  και  $f(x_2) : B(x_2)$  είναι στοιχεία διαφορετικών τύπων, ούτως ώστε a priori να μην μπορούμε καν να ρωτήσουμε αν είναι ίσα. Προκειμένου να συσχετίσουμε τά  $f(x_1)$  και  $f(x_2)$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τό transport· μία ισοδύναμη, πλην κανονικότερη λύση είναι να ορίσουμε μία ετερογενή ισότητα μεταξύ των στοιχείων διαφορετικών στιγμιστύπων μιας οικογένειας.

Τό transport ορίστηκε ως ο αναδρομέας τής βασισμένης ισότητας. Γεωμετρικά, σχετίζεται με τήν ύψωση μονοπατιών σε μία ίνωση (fibration). Φανταζόμαστε μία οικογένεια  $(x : A) B(x)$  σαν ίνωση με βάση  $A$ , με  $B(x)$  τήν ίνα πάνω από τό  $x$ , και  $\Sigma(B)$  τόν ολικό χώρο τής ίνωσης, με πρώτη προβολή  $\text{pr}_1 : \Sigma(B) \rightarrow A$ . Η χαρακτηριστική ιδιότητα τής ίνωσης είναι ότι ένα μονοπάτι  $p$  στη βάση  $A$  με αφετηρία  $\text{pr}_1(z)$  έχει μία ύψωση  $r$  στον ολικό χώρο  $\Sigma(B)$  με αφετηρία  $z$ . Τό  $\text{transport}(p, z)$  μπορεί να νοηθεί ως τό άλλο άκρο αυτής τής ύψωσης.

**Λήμμα 5.4.1** (Ιδιότητα ύψωσης μονοπατιών). Έστω  $(x : A) B(x)$  οικογένεια τύπων. Για  $y_1 : B(x_1)$ , οποιοδήποτε μονοπάτι  $p : x_1 = x_2$  μπορεί να υψωθεί σε ένα μονοπάτι

$$\text{lift}(y_1, p) : \text{pair}(x_1, y_1) = \text{pair}(x_2, \text{transport}(p, y_1))$$

στον  $\Sigma(B)$ , ούτως ώστε  $\text{pr}_1(\text{lift}(y_1, p)) = p$ .

Απόδειξη. Με επαγωγή στό  $p$  θέτουμε

$$\text{lift}(y, \text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{\text{pair}(x,y)}.$$

Η ζητούμενη ιδιότητα βεβαιώνεται επίσης με επαγωγή στό  $p$ :

$$\text{pr}_1(\text{lift}(y, \text{refl}_x)) \equiv \text{pr}_1(\text{refl}_{\text{pair}(x,y)}) \equiv \text{refl}_{\text{pr}_1(\text{pair}(x,y))} \equiv \text{refl}_x. \quad \square$$

Στήν κλασική θεωρία τής ομοτοπίας, η ίνωση ορίζεται ως μία απεικόνιση για τήν οποία υπάρχουν υψώσεις μονοπατιών ενώ αντίθετα, μόλις δείξαμε ότι στη θεωρία τύπων, κάθε οικογένεια τύπων έρχεται με έναν ορισμένο μετασχηματισμό ύψωσης μονοπατιών.

Σχετικά με τήν εξαρτώμενη εκδοχή τού λήμματος 2.2.3, η γεωμετρική ενόραση είναι ότι δοθέντων συνάρτησης  $f : \prod(x : A) B(x)$  και μονοπατιού  $p : x_1 = x_2$  στόν  $A$ , μπορούμε να εφαρμόσουμε τήν  $f$  στό  $p$  και να πάρουμε ένα μονοπάτι πάνω από τό  $p$  στόν ολικό χώρο.

Τό λήμμα 2.2.3 μάς δίνει ένα τέτοιο μονοπάτι: Δοθείσης  $f : \prod(B)$ , μπορούμε να ορίσουμε τή μη εξαρτώμενη συνάρτηση  $f' : A \rightarrow \Sigma(B)$  όπου  $f'(x) \equiv \text{pair}(x, f(x))$ , και εν συνεχεία να θεωρήσουμε τό  $f'(p) : f'(x_1) = f'(x_2)$ . Από τό λήμμα 5.2.2,  $\text{pr}_1(f'(p)) = (\text{pr}_1 \circ f')(p) = \text{id}_A(p) = p$ , οπότε τό  $f'(p)$  βρίσκεται όντως πάνω από τό  $p$ . Ωστόσο, αυτό δεν αποτυπώνεται στόν τύπο τού  $f'(p)$ .

### 5.4.1 Ετερογενής ισότητα

Είναι χρήσιμο να έχουμε έναν τύπο «μονοπατιών πάνω από τό  $p$ ». Ένας προφανής υποψήφιος είναι ο τύπος

$$\sum(r : z_1 = z_2) \text{pr}_1(r) = p.$$

Ωστόσο, ο τύπος αυτός περιέχει ανεπιθύμητη πληροφορία (υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τούς οποίους τό  $\text{pr}_1(r)$  είναι ίσο με  $p$ ). Μία λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε τόν  $\text{transport}$ , και να γράψουμε

$$y_1 =_p y_2 \quad \equiv \quad \text{transport}(p, y_1) = y_2.$$

Μία κανονικότερη λύση είναι να ορίσουμε μία σχέση ετερογενούς ισότητας μεταξύ των στοιχείων διαφορετικών στιγμιотύπων μιας οικογένειας. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε μία τέτοια σχέση σαν επαγωγική οικογένεια, όπως κάναμε με τήν ισότητα (άσκηση 5.4). Είναι, ωστόσο, τεχνικά απλούστερο να τήν ορίσουμε σαν αναδρομική οικογένεια.

**Ορισμός 5.4.2.** Έστω  $(x : A) B(x)$  οικογένεια. Η *ετερογενής ισότητα* της  $B$  είναι η σχέση

$$(x_1, x_2 : A, p : x_1 = x_2, y_1 : B(x_1), y_2 : B(x_2)) y_1 =_p^B y_2$$

που ορίζεται μέσω της αναδρομής (στό  $p$ )

$$y_1 =_{\text{refl}_x}^B y_2 \equiv y_1 =_{B(x)} y_2.$$

Είναι, φυσικά, απαραίτητο να μπορούμε να κάνουμε αναδρομή και επαγωγή στην ετερογενή ισότητα. Θα πραγματευθούμε κατ' ευθείαν την επαγωγή. Εκ τού ορισμού της ετερογενούς ισότητας, για να ορίσουμε ένα

$$t(x_1, x_2, p, y_1, y_2, q) : C(x_1, x_2, p, y_1, y_2, q),$$

όπου  $p : x_1 =_A x_2$  και  $q : y_1 =_p y_2$ , αρκεί να ορίσουμε τό

$$t(x, x, \text{refl}_x, y_1, y_2, q) : C(x, x, \text{refl}_x, y_1, y_2, q).$$

Περαιτέρω, επειδή τό  $y_1 =_{\text{refl}_x} y_2$  έχει οριστεί να είναι τό  $y_1 =_{B(x)} y_2$ , αρκεί, με επαγωγή στό  $q$ , να ορίσουμε τό

$$t(x, x, \text{refl}_x, y, y, \text{refl}_y) : C(x, x, \text{refl}_x, y, y, \text{refl}_y).$$

*Αρχή επαγωγής της ετερογενούς ισότητας:* Δοθέντων

- ενός τύπου  $C(x_1, x_2, p, y_1, y_2, q)$  για  $p : x_1 =_A x_2$  και  $q : y_1 =_p y_2$ , και
- ενός  $c_{\text{refl}}(x, y) : C(x, x, \text{refl}_x, y, y, \text{refl}_y)$  για  $x : A$  και  $y : B(x)$ ,

η σχέση

$$t(x, x, \text{refl}_x, y, y, \text{refl}_y) \equiv c_{\text{refl}}(x, y)$$

ορίζει τό  $t(x_1, x_2, p, y_1, y_2, q)$  για τυχόντα  $p : x_1 =_A x_2$  και  $q : y_1 =_p y_2$ .

Με τή βοήθεια της ετερογενούς ισότητας μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε μία εκδοχή τού λήμματος 2.2.3 για εξαρτώμενες συναρτήσεις.

**Λήμμα 5.4.3.** Για  $f : \prod(x : A) B(x)$  και  $p : x_1 =_A x_2$ , ορίζεται

$$f(p) : f(x_1) =_p f(x_2)$$

η οποία ικανοποιεί τή σχέση  $f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}$ .

*Απόδειξη.* Ορίζουμε

$$f(p) : f(x_1) =_p f(x_2)$$

μέσω τής επαγωγής

$$f(\text{refl}_x) \equiv \text{refl}_{f(x)}. \quad \square$$

Για σταθερές οικογένειες, η ετερογενής ισότητα συμπίπτει με τήν οικεία ισότητα:

**Λήμμα 5.4.4.** Έστω  $(x : A) C(x)$  σταθερή οικογένεια, όπου  $C(x) \equiv B$ . Για  $x_1, x_2 : A$ ,  $p : x_1 = x_2$ , και  $y_1, y_2 : B$ ,

$$y_1 =_p y_2 \approx y_1 =_B y_2.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στό  $p$ , αρκεί

$$y_1 =_{\text{refl}_x} y_2 \approx y_1 =_B y_2,$$

που ισχύει εξ ορισμού.  $\square$

**Άσκηση 5.1.** Δείξτε, στηριζόμενοι στό προηγούμενο λήμμα, ότι, για σταθερές οικογένειες, ο παραπάνω ορισμός τής εφαρμογής συνάρτησης σε μονοπάτι συμφωνεί με αυτόν τού λήμματος 2.2.3.

Η άλλη χρησιμότητα τής ετερογενούς ισότητας είναι ότι μάς δίνει έναν τρόπο να χαρακτηρίσουμε τήν ισότητα στό εξαρτώμενα αθροίσματα.

**Λήμμα 5.4.5.** Για  $z_1, z_2 : \sum(x : A) B(x)$ ,

$$z_1 = z_2 \approx \sum(p : \text{pr}_1(z_1) = \text{pr}_1(z_2)) \text{pr}_2(z_1) =_p \text{pr}_2(z_2).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, για  $z : \sum(B)$  ορίζεται

$$t(z) : \text{pr}_2(z) =_{\text{refl}_{\text{pr}_1(z)}} \text{pr}_2(z)$$

μέσω τής επαγωγής

$$t(\text{pair}(x, y)) \equiv \text{refl}_y.$$

Για  $z_1, z_2 : \sum(B)$  θεωρούμε τή συνάρτηση

$$F : z_1 = z_2 \rightarrow \sum(p : \text{pr}_1(z_1) = \text{pr}_1(z_2)) \text{pr}_2(z_1) =_p \text{pr}_2(z_2)$$

που ορίζεται μέσω τής αναδρομής

$$F(\text{refl}_z) \equiv \text{pair}(\text{refl}_{\text{pr}_1(z)}, t(z)).$$

Ειδικότερα,

$$F(\text{refl}_{\text{pair}(x,y)}) \equiv \text{pair}(\text{refl}_x, \text{refl}_y).$$

Στήν αντίθετη κατεύθυνση, για  $x_1, x_2 : A$ ,  $p : x_1 = x_2$ ,  $y_1 : B(x_1)$ ,  $y_2 : B(x_2)$  και  $q : y_1 =_p y_2$  ορίζουμε

$$u(p, q) : \text{pair}(x_1, y_1) = \text{pair}(x_2, y_2)$$

μέσω τής αναδρομής στήν ετερογενή ισότητα

$$u(\text{refl}_x, \text{refl}_y) \equiv \text{refl}_{\text{pair}(x,y)}.$$

Εν συνεχεία ορίζουμε συνάρτηση

$$v : \sum(p : x_1 = x_2) y_1 =_p y_2 \rightarrow \text{pair}(x_1, y_1) = \text{pair}(x_2, y_2)$$

μέσω τής αναδρομής

$$v(\text{pair}(p, q)) \equiv u(p, q).$$

Τέλος, με αναδρομή στό  $z_1, z_2 : \sum(B)$  ορίζουμε τή συνάρτηση

$$G : \sum(p : \text{pr}_1(z_1) = \text{pr}_1(z_2)) \text{pr}_2(z_1) =_p \text{pr}_2(z_2) \rightarrow z_1 = z_2.$$

Ειδικότερα,

$$G(\text{pair}(\text{refl}_x, \text{refl}_y)) \equiv \text{refl}_{\text{pair}(x,y)}.$$

Για να δείξουμε ότι  $G(F(r)) = r$ , παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, για  $x : A$  και  $y : B(x)$ ,

$$G(F(\text{refl}_{\text{pair}(x,y)})) \equiv \text{refl}_{\text{pair}(x,y)}.$$

Με επαγωγή στο  $z : \Sigma(B)$  συμπεραίνουμε ότι

$$G(F(\text{refl}_z)) = \text{refl}_z,$$

και με επαγωγή στο  $r : z_1 = z_2$  ότι

$$G(F(r)) = r.$$

Για να δείξουμε ότι  $F(G(o)) = o$ , παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, για  $x : A$  και  $y : B(x)$ ,

$$F(G(\text{pair}(\text{refl}_x, \text{refl}_y))) \equiv \text{pair}(\text{refl}_x, \text{refl}_y).$$

Με επαγωγή στην ετερογενή ισότητα παίρνουμε, για  $p : x_1 =_A x_2$  και  $q : y_1 =_p y_2$ ,

$$F(G(\text{pair}(p, q))) = \text{pair}(p, q),$$

μετά, με επαγωγή στο  $o : \Sigma(p : x_1 = x_2) y_1 =_p y_2$ , ότι

$$F(G(o)) = o,$$

και τέλος, με επαγωγή στα  $z_1, z_2 : \Sigma(B)$ , ότι

$$F(G(o)) = o$$

για  $o : \Sigma(p : \text{pr}_1(z_1) = \text{pr}_1(z_2)) \text{pr}_2(z_1) =_p \text{pr}_2(z_2)$ . □

**Άσκηση 5.2.** Δείξτε ότι η συνάρτηση  $G$  που ορίστηκε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος ικανοποιεί τη σχέση  $G(\text{pair}(\text{refl}_{\text{pr}_1(z)}, \text{refl}_{\text{pr}_2(z)})) = \eta_{\Sigma(B)}(z)$ .

**Πόρισμα 5.4.6.** Για  $z, w : A_1 \times A_2$ ,

$$z = w \quad \simeq \quad (\text{pr}_1(z) = \text{pr}_1(w)) \times (\text{pr}_2(z) = \text{pr}_2(w)).$$

**Λήμμα 5.4.7.** Για  $x, y : \mathbf{1}$ ,

$$x = y \quad \simeq \quad \mathbf{1}.$$

*Απόδειξη.* Ορίζουμε  $F : x = y \rightarrow \mathbf{1}$  μέσω της αναδρομής  $f(\text{refl}_!) \equiv !$ . Στην αντίθετη κατεύθυνση, ορίζουμε πρώτα  $c : \mathbf{1} \rightarrow ! = !$  μέσω της αναδρομής  $c(!) \equiv \text{refl}_!$ , και από αυτήν, με επαγωγή στα  $x$  και  $y$ , την  $G : \mathbf{1} \rightarrow x = y$ .

Προκειμένου να δείξουμε ότι  $G(F(p)) = p$  για  $p : x =_1 y$  αρκεί, με επαγωγή στο  $p$ , να δείξουμε ότι  $G(F(\text{refl}_x)) = \text{refl}_x$  και, με επαγωγή στο  $x$ , ότι  $G(F(\text{refl}_!)) = \text{refl}_!$ , το οποίο ισχύει εξ ορισμού. Για την άλλη σύνθεση αρκεί, με επαγωγή στο  $\mathbf{1}$ , να δείξουμε ότι  $F(G(!)) = !$ , και, με επαγωγή στα  $x$  και  $y$ , ότι  $F(c(!)) = !$ , το οποίο επίσης ισχύει εξ ορισμού. □

## 5.5 Ασκήσεις

**Άσκηση 5.3.** Δείξτε ότι η ετερογενής ισότητα που ορίσαμε είναι ισοδύναμη με εκείνη του [7, σελ. 183]:

$$y_1 =_p^B y_2 \approx \text{transport}^B(p, y_1) = y_2.$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο  $p$ .]

**Άσκηση 5.4.** Η ετερογενής ισότητα μπορεί επίσης να οριστεί ως *επαγωγική οικογένεια*, δηλαδή ως η σχέση

$$(x_1, x_2 : A, p : x_1 = x_2, y_1 : B(x_1), y_2 : B(x_2)) y_1 ='_p y_2$$

που έχει τόν μοναδικό κατασκευαστή

$$\text{refl}(x, y) : y ='_{\text{refl}_x} y.$$

Δείξτε ότι

$$y_1 ='_p y_2 \approx y_1 =_p y_2.$$

[Υπόδειξη: Ορίστε αντίστροφες μεταξύ τους συναρτήσεις  $F : y_1 ='_p y_2 \rightarrow y_1 =_p y_2$  και  $G : y_1 =_p y_2 \rightarrow y_1 ='_p y_2$ .]

## Κεφάλαιο 6

# Λογική και σύνολα I

Η θεωρία τύπων είναι μία συλλογή κανόνων για τόν χειρισμό τών τύπων και τών στοιχείων τους. Αλλά στά μαθηματικά, καθώς και στή φυσική γλώσσα γενικώς, χρησιμοποιούμε λογικούς συνδέσμους όπως «και» και «ή», και ποσοδείκτες όπως «για κάθε» και «υπάρχει». Η θεωρία τύπων μάς προσφέρει διάφορους τρόπους να αντιστοιχίσουμε τίς προτάσεις τής κοινής μαθηματικής γλώσσας σε τύπους.

Η αντιστοιχία Curry-Howard εκφράζει μία αυστηρά κατασκευαστική αντίληψη για τή λογική, η οποία έχει σημαντικές αρετές (κατασκευαστικότητα, υπολογιστικότητα, απλότητα). Παρ' όλ' αυτά (ή, ίσως, ακριβώς για αυτόν τόν λόγο), είναι ακατάλληλη για τήν τυποθεωρητική διατύπωση ορισμένων κλασικών αρχών, όπως η αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου και τό αξίωμα τής επιλογής.

Στό κεφάλαιο αυτό θα προετοιμάσουμε τό έδαφος για μία άλλη μετάφραση τής λογικής στήν θεωρία τύπων, η οποία θα μάς επιτρέψει να διαχειριστούμε αυτές τίς αρχές.

### 6.1 Λογική κατά Curry-Howard

Στά δύο προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πώς ορισμένοι τύποι είναι (μεθ)ερμηνεύσιμοι ως προτάσεις, εις τρόπον ώστε οι κατασκευαστές τους να αντιστοιχούν στους κανόνες εισαγωγής και οι αναδρομείς τους στους κανόνες απαλοιφής τών προτάσεων αυτών. Αυτό μάς επιτρέπει να διατυπώνουμε ισχυρισμούς χρησιμοποιώντας λέξεις τής φυσικής γλώσσας όπως «και», «ή», «για κάθε» και ούτω καθεξής, ενώ μπορούμε ανά πάσα στιγμή να γράφουμε αυτούς τούς ισχυρισμούς σε αμιγώς τυποθεωρητική γλώσσα και να τούς εννοούμε ως τύπους. Και, εφ' όσον οι αποδείξεις είναι περιγραφές τεκμηρίων αλήθειας, τό να αποδείξουμε έναν τέτοιο ισχυρισμό συνίσταται στό να εμφανίσουμε ένα στοιχείο τού αντίστοιχου τύπου.

Αντιστρόφως, υπό τήν αντιστοιχία Curry-Howard, κάθε τύπος μπορεί να διαβαστεί σαν πρόταση, αρκεί τά στοιχεία του να εννοηθούν ως τεκμήρια αλήθειας. Ο  $\text{Nat}$ , για παράδειγμα, είναι η πρόταση που έχει τούς δύο κανόνες εισαγωγής

$$\frac{}{\text{Nat}} \qquad \frac{\text{Nat}}{\text{Nat}}$$

και τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\begin{array}{c} (\text{Nat}, C) \\ \vdots \\ C \quad C \quad \text{Nat} \\ \hline C \end{array}}{.}$$

Οι κανόνες αυτοί μπορεί να έχουν ενδιαφέρον από τή σκοπιά τής δομικής θεωρίας αποδείξεων, αλλά από μία πιο πρακτική σκοπιά, σύμφωνα με τήν οποία η λογική είναι ένα εργαλείο για τήν οργάνωση και συστηματοποίηση ενός σώματος γνώσης, είναι άχρηστοι, καθώς δεν συνεισφέρουν στή σχέση τής αποδειξιμότητας. Επίσης, η φυσική αντίληψη για τόν  $\text{Nat}$  δεν είναι εκείνη μιας πρότασης, καθώς δεν μάς φαίνεται να εκφράζει κάποιο γεγονός, μαθηματικό ή άλλο· ειδικότερα, δεν αντιστοιχεί σε μία πρόταση τής φυσικής γλώσσας.

Στήν πράξη, οι μαθηματικές θεωρίες διαχωρίζουν τή λογική από τό καθ' εαυτού αντικείμενό τους: Η λογική αντιμετωπίζεται ως μία συλλογή αναλυτικών γεγονότων, και επομένως είναι κατά τό μάλλον ή ήττον κοινή ανάμεσα στις διάφορες θεωρίες, ενώ τό ειδικό αντικείμενο, γενικά, δεν είναι<sup>1</sup>.

Τεχνικώς, οι τύποι τών θεωριών αυτών είναι χωρισμένοι σε δύο ομάδες. Αφ' ενός έχουμε τά είδη (sorts), τά οποία παίζουν τόν ρόλο τών τύπων δεικτών· για τήν αριθμητική, αυτή η ομάδα περιέχει τόν  $\text{Nat}$ . Αφ' ετέρου, έχουμε τίς προτάσεις, οι οποίες παίζουν τόν ρόλο τών στιγμιτύπων τών οικογενειών. Με άλλα λόγια, μόνο οικογένειες προτάσεων παραμετροποιημένες από είδη μπορούν να εκφραστούν. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι μόνο τά είδη έχουν διατυπώσιμες αρχές επαγωγής, και μάλιστα περιορισμένες σε τέτοιες οικογένειες· η αριθμητική, λόγου χάριν, περιλαμβάνει τήν αρχή τής επαγωγής τού  $\text{Nat}$ , άλλα μόνο για φόρμουλες τής γλώσσας.

Αυτή η μορφή οργάνωσης αντανακλά τή βασική πρόθεση πίσω από τήν εκάστοτε θεωρία. Αν, για παράδειγμα, τό αντικείμενο μελέτης μας είναι οι φυσικοί αριθμοί, τότε μάς ενδιαφέρει να μπορούμε να εκφράζουμε ιδιότητες (τής δομής) τών φυσικών αριθμών, ενώ ιδιότητες τών τεκμηρίων αλήθειας τών προτάσεων όχι και τόσο. Κατά συνέπεια, οι αρχές επαγωγής τών προτάσεων ούτε χρειάζονται ούτε μπορούν να διατυπωθούν στή γλώσσα τής αριθμητικής.

Αυτή η ως επί τό πλείστον συμβασιοκρατική εξήγηση υπονοεί ότι ανά πάσα στιγμή μπορούμε, αν τό θελήσουμε, να εμπλουτίσουμε μία γλώσσα πρώτης τάξης με κατηγορήματα επί τεκμηρίων αλήθειας, και τότε βεβαίως να προσθέσουμε και τίς κατάλληλες αρχές επαγωγής. Είναι, επίσης, γνωστό, ότι μπορούμε να προσθέσουμε τήν αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου και να πάρουμε τήν αντίστοιχη κλασική θεωρία. Ωστόσο, αυτά τά δύο δεν μπορούμε να τά κάνουμε ταυτόχρονα: Τό σχήμα

$$A + \neg A,$$

όπου  $A$  τυχών τύπος, αντιφάσκει με τό univalence. Προκειμένου να έχουμε στη διάθεσή μας τήν αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου, έστω και σαν ρητή υπόθεση, χρειαζόμαστε έναν άλλο τρόπο να εκφράσουμε αυτή τήν αρχή.

## 6.2 Συναρτήσεις επιλογής

Ας μεταφερθούμε για λίγο στή θεωρία συνόλων. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε μία οικογένεια συνόλων  $(B_x)_{x \in A}$  ως μία σχέση  $R \subseteq A \times B$ , όπου  $B$  η ένωση τών

<sup>1</sup>Ωστόσο, ο Frege επιχειρηματολογεί υπέρ τής αναλυτικότητας τής αριθμητικής, η δουλειά τού Bishop υποδεικνύει ότι η ανάλυση είναι, κατά πάσα πιθανότητα, αναλυτική, ενώ η ομοτοπική θεωρία τύπων κάνει τό ίδιο για μεγάλο μέρος τής άλγεβρας και τής γεωμετρίας.

$B_x$ . Μία τέτοια οικογένεια είναι οικογένεια μη κενών συνόλων αν  $(\forall x \in A)(\exists y \in B)R(x, y)$ . Μία συνάρτηση επιλογής για μία οικογένεια  $R \subseteq A \times B$  είναι μία  $f : A \rightarrow B$  τέτοια που  $(\forall x \in A)R(x, f(x))$ . Η ύπαρξη συνάρτησεων επιλογής για οικογένειες μη κενών συνόλων,

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)R(x, y) \rightarrow (\exists f : A \rightarrow B)(\forall x \in A)R(x, f(x)), \quad (6.1)$$

είναι μία από τις ισοδύναμες μορφές τού αξιώματος τής επιλογής. Ωστόσο, είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο αντίστοιχος τύπος,

$$\prod(x : A) \sum(y : B) R(x, y) \rightarrow \sum(f : A \rightarrow B) \prod(x : A) R(x, f(x)), \quad (6.2)$$

είναι κατοικημένος: Αν θεωρήσουμε μία  $g : \prod(x : A) \sum(y : B) R(x, y)$ , τότε έχουμε, για  $x : A$ ,

$$\text{pr}_1(g(x)) : B$$

και

$$\text{pr}_2(g(x)) : R(x, \text{pr}_1(g(x))),$$

οπότε

$$\text{pair}(\lambda(x : A) \text{pr}_1(g(x)), \lambda(x : A) \text{pr}_2(g(x))) : \sum(f : A \rightarrow B) \prod(x : A) R(x, f(x)).$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η κατασκευαστική ύπαρξη είναι αρκετά ισχυρή ώστε από μία οικογένεια κατοικημένων τύπων να μπορούν να εξαχθούν συγκεκριμένα στοιχεία αυτών, από τὰ οποία εν συνεχεία λαμβάνεται η συνάρτηση επιλογής. Κατά μία έννοια, επομένως, ο τύπος (6.2) αποτυγχάνει να συλλάβει τὸ νόημα τού (6.1). Επίσης, δεν έχει τις ίδιες συνέπειες με αυτό: Στὴ θεωρία συνόλων, τὸ αξίωμα επιλογής συνεπάγεται τὴν αρχὴ τού αποκλειόμενου τρίτου (θεώρημα Diaconescu-Goodman-Myhill)· τίποτα τέτοιο, βεβαίως, δεν συμβαίνει με τὸ (6.2). Τὸ χάσμα ανάμεσα στὴ συνολοθεωρητικὴ και τὴν τυποθεωρητικὴ διατύπωση φαίνεται πιο καθαρά αν εξετάσουμε ἕνα ἄλλο γνωστὸ ισοδύναμο τού αξιώματος επιλογής, ὅτι τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο μιας οικογένειας μη κενών συνόλων εἶναι μη κενό:

$$(\forall x \in A)B_x \neq \emptyset \rightarrow \prod_{x \in A} B_x \neq \emptyset.$$

Ἡ τυποθεωρητικὴ μετάφραση αὐτοῦ εἶναι

$$\prod(x : A) B(x) \rightarrow \prod(x : A) B(x).$$

Βλέπουμε, ἐδῶ, ὅτι δεν γίνεται διάκριση ανάμεσα στὸ να εἶναι κατοικημένοι κάποιοι τύποι και στὸ να εἶναι κατοικημένο τὸ γινόμενο τους. Για να πετύχουμε μία μη τετριμμένη διατύπωση, ἐκεῖνο που χρειαζόμαστε εἶναι ἕνας ἄλλος τρόπος να εκφράσουμε τὴν ιδιότητα ἐνός τύπου να εἶναι κατοικημένος, ὥστε ἀπὸ τὴν πληροφορία ὅτι ἕνας τύπος εἶναι κατοικημένος να μη μπορούμε αυτομάτως να εξαγάγουμε ἕνα στοιχείο του.

### 6.3 Ἀπλές προτάσεις

Ὅταν οι τύποι διαβάζονται ὡς προτάσεις, τὰ στοιχεία τους ἐνδέχεται να περιέχουν πληροφορία πέραν τού ὅτι αὐτὲς ἀληθεύουν, ἡ ὁποία ἀπορρέει ἀπὸ τὴν ύπαρξη

διαφορετικών μεταξύ τους τεκμηρίων αλήθειας, και όλες οι τυποθεωρητικές κατασκευές σέβονται αυτή τήν επιπλέον πληροφορία. Για παράδειγμα, ένα στοιχείο τού τύπου  $A + B$  μάς αποκαλύπτει περισσότερα από τó απλό γεγονός ότι ο  $A + B$  είναι κατοικημένος: Μάς λέει επίσης από ποιον προσθετέο έχει προέλθει. Ομοίως, ένα στοιχείο τού  $\sum(x : A)B(x)$  περιέχει ως πρόσθετη πληροφορία έναν μάρτυρα ύπαρξης, δηλαδή ένα  $a : A$  τέτοιο που  $B(a)$ . Ωστόσο, στην πράξη δεν ενδιαφερόμαστε για τó πόσα και ποια τεκμήρια αλήθειας έχει μία πρόταση, αλλά μόνο για τó αν έχει τέτοια τεκμήρια, δηλαδή αν αληθεύει.

Μπορούμε να λάβουμε μία πιο συμβατική λογική περιοριζόμενοι σε τύπους, τά στοιχεία των οποίων δεν περιέχουν πληροφορία πλέον τού ότι είναι κατοικημένοι, και αντιμετωπίζοντας μόνο αυτούς ως προτάσεις. Αυτό υποδεικνύει τόν ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 6.3.1.** Μία απλή πρόταση (*mere proposition*) είναι ένας τύπος, όλα τά στοιχεία τού οποίου είναι ίσα μεταξύ τους.

Μπορούμε να γράψουμε τόν παραπάνω ορισμό ως τόν τύπο

$$\text{IsProp}(A) := \prod (x, y : A) x = y.$$

Απόρροια τού παραπάνω ορισμού είναι ότι η λογική ισοδυναμία μεταξύ απλών προτάσεων ταυτίζεται με τήν ισοδυναμία:

**Λήμμα 6.3.2.** Για απλές προτάσεις  $A$  και  $B$ , εάν  $A \rightarrow B$  και  $B \rightarrow A$ , τότε  $A \simeq B$ .

*Απόδειξη.* Εάν  $f : A \rightarrow B$  και  $g : B \rightarrow A$  τότε, εφ' όσον ο  $A$  είναι απλή πρόταση, για  $x : A$  θα έχουμε  $g(f(x)) = x$ · όμοια, για  $y : B$  έχουμε  $f(g(y)) = y$ . Άρα, οι  $f$  και  $g$  είναι αντίστροφες μεταξύ τους.  $\square$

**Άσκηση 6.1.** Δείξτε ότι αν ο  $A$  είναι απλή πρόταση και  $A \simeq B$ , τότε ο  $B$  είναι επίσης απλή πρόταση.

Σε συνέχεια τής συζήτησης που μάς οδήγησε στόν ορισμό 6.3.1, αρμόζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι αρχές επαγωγής των απλών προτάσεων δεν είναι, γενικά, ιδιαίτερα χρήσιμες· για παράδειγμα,

**Λήμμα 6.3.3.** Αν ο  $A_1 \times A_2$  είναι απλή πρόταση, τότε η αρχή επαγωγής του συνάγεται από τήν αρχή αναδρομής του.

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με τó λήμμα 3.9.5 και τήν άσκηση που τó ακολουθεί, η αρχή επαγωγής τού  $A_1 \times A_2$  είναι ισοδύναμη με τήν ισότητα

$$\text{pair}(\text{pr}_1(x), \text{pr}_2(x)) = x$$

η οποία, εφ' όσον ο  $A_1 \times A_2$  είναι απλή πρόταση, ικανοποιείται αυτομάτως.  $\square$

**Άσκηση 6.2.** Βελτιώστε τήν απόδειξη τού λήμματος: Δείξτε ότι, δοθέντος ενός

$$\eta_{A_1 \times A_2}(x) : \text{pair}(\text{pr}_1(x), \text{pr}_2(x)) = x$$

για κάθε  $x : A_1 \times A_2$ , μπορούμε να ορίσουμε ένα

$$\eta'_{A_1 \times A_2}(x) : \text{pair}(\text{pr}_1(x), \text{pr}_2(x)) = x$$

ούτως ώστε  $\eta'_{A_1 \times A_2}(\text{pair}(x_1, x_2)) = \text{refl}_{\text{pair}(x_1, x_2)}$ .

Ας σημειωθεί, ωστόσο, ότι η αρχή επαγωγής ενός τύπου είναι συχνά απαραίτητη προκειμένου να δείξουμε ότι ο τύπος αυτός είναι απλή πρόταση.

Στο εξής, όπως και μέχρι τώρα, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε την αντιστοιχία Curry-Howard για να μετεγγράφουμε στη θεωρία τύπων τις προτάσεις που θα διατυπώνουμε στη φυσική γλώσσα, καθώς είναι αυτή που κατά κανόνα εκφράζει πιστά αυτό που θέλουμε να πούμε. Στις μεμονωμένες περιπτώσεις που θα εννοούμε κάτι άλλο, θα τό δηλώνουμε ρητά. Με τη λογική των απλών προτάσεων θα ασχοληθούμε διεξοδικά στο κεφάλαιο (forward reference).

## 6.4 Σύνολα κ.λπ.

Ενώ οι τύποι γενικά συμπεριφέρονται σαν χώροι ή ανώτερα ομαδοειδή, κάποιοι από αυτούς συμπεριφέρονται περισσότερο σαν τά σύνολα ενός παραδοσιακού συνολοθεωρητικού συστήματος. Κατηγορικά, μπορούμε να θεωρήσουμε διακριτά ομαδοειδή, τά οποία προσδιορίζονται από ένα σύνολο αντικειμένων και μόνο ταυτοτικούς μορφισμούς και ανώτερους μορφισμούς, ενώ τοπολογικά, μπορούμε να εξετάσουμε χώρους που έχουν τη διακριτή τοπολογία. Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε ομαδοειδή ή χώρους που είναι *ισοδύναμοι* με ομαδοειδή ή χώρους αυτού του είδους· αφού ό,τι κάνουμε στη θεωρία τύπων είναι μέχρις ομοτοπίας, δεν αναμένεται να μπορούμε να τά ξεχωρίσουμε.

Διαισθητικά, θα περιμέναμε από έναν τύπο να «είναι σύνολο» με αυτή την έννοια, εάν δεν έχει ανώτερη ομοτοπική πληροφορία: οποιαδήποτε δύο παράλληλα μονοπάτια είναι ίσα (μέχρις ομοτοπίας) και ομοίως για παράλληλα ανώτερα μονοπάτια σε όλες τις διαστάσεις. Ευτυχώς, επειδή τά πάντα στη θεωρία τύπων είναι αυτομάτως συναρτητικά/συνεχή, αρκεί να τό αιτηθούμε αυτό στο κατώτατο επίπεδο.

**Ορισμός 6.4.1.** Ο τύπος  $A$  είναι *σύνολο* όταν, για οποιαδήποτε  $x, y : A$ , ο τύπος  $x = y$  είναι απλή πρόταση.

Γράφουμε

$$\text{IsSet}(A) := \prod (x, y : A) \text{IsProp}(x = y).$$

Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε στην επόμενη διάσταση, και να ονομάσουμε (απλό) ομαδοειδές (ή 1-ομαδοειδές) έναν τύπο, όλες οι ισότητες του οποίου είναι σύνολα,

$$\text{IsGroupoid}(A) := \prod (x, y : A) \text{IsSet}(x = y),$$

και ούτω καθεξής. Αντ' αυτού, θα ορίσουμε ολόκληρη την κλίμακα με αναδρομή, ξεκινώντας μάλιστα ένα επίπεδο κάτω από τις απλές προτάσεις:

**Ορισμός 6.4.2.** Ένας τύπος  $A$  ονομάζεται *συσταλτός* (*contractible*) αν υπάρχει  $a : A$ , τό *κέντρο συστολής* του  $A$ , ούτως ώστε  $a = x$  για οποιαδήποτε  $x : A$ . Συμβολίζουμε τό δοσμένο μονοπάτι  $a = x$  με  $\text{contr}_x$ .

Με άλλα λόγια, έχουμε έναν τύπο

$$\text{IsContr}(A) := \sum (a : A) \prod (x : A) a = x.$$

**Λήμμα 6.4.3.** *Ο  $A$  είναι απλή πρόταση τότε και μόνο, αν για οποιαδήποτε  $x, y : A$  ο τύπος  $x = y$  είναι συσταλτός.*

*Απόδειξη.* Έστω  $A$  απλή πρόταση. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε  $x, y : A$  έχουμε ένα  $p(x, y) : x = y$ . Θα δείξουμε ότι, για  $x, y : A$ , τό  $p(x, x)^{-1} \cdot p(x, y)$  είναι κέντρο συστολής τού  $x = y$ , δηλαδή ότι για οποιοδήποτε  $p : x = y$ ,  $p(x, x)^{-1} \cdot p(x, y) = p$  ή, με επαγωγή στό  $p$ , ότι  $p(x, x)^{-1} \cdot p(x, x) = \text{refl}_x$ . Τό αντίστροφο είναι προφανές.  $\square$

Μπορούμε να δώσουμε τόν εξής χαρακτηρισμό τής συσταλτότητας:

**Θεώρημα 6.4.4.** *Για έναν τύπο  $A$ , τά ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο  $A$  είναι συσταλτός.*
2. *Ο  $A$  είναι κατοικημένη (ή αληθής) απλή πρόταση.*
3. *Ο  $A$  είναι ισοδύναμος με τόν  $\mathbf{1}$ .*

*Απόδειξη.* 1.  $\Rightarrow$  2.: Εάν ο  $A$  έχει κέντρο συστολής  $a$ , τότε σίγουρα είναι κατοικημένος (από τό  $a$ ), και για  $x, y : A$  έχουμε  $x = a = y$ .

2.  $\Rightarrow$  3.: Εφ' όσον οι  $A$  και  $\mathbf{1}$  είναι αμφοτέροι κατοικημένοι, υπάρχουν σταθερές συναρτήσεις  $A \rightarrow \mathbf{1}$  και  $\mathbf{1} \rightarrow A$ . Επομένως, είναι λογικά ισοδύναμοι. Και εφ' όσον είναι απλές προτάσεις (ο  $\mathbf{1}$  είναι απλή πρόταση από τό προηγούμενο βήμα τής απόδειξης), από τό λήμμα 6.3.2 έπεται ότι είναι ισοδύναμοι.

3.  $\Rightarrow$  1.: Η συσταλτότητα τού  $A$  έπεται από τήν ισοδυναμία του με έναν συσταλτό τύπο. Αναλυτικότερα, αν οι  $f : A \rightarrow \mathbf{1}$  και  $g : \mathbf{1} \rightarrow A$  είναι αντίστροφες μεταξύ τους, τότε για  $x : A$  έχουμε

$$! = f(x),$$

οπότε

$$g(!) = g(f(x)) = x.$$

Έπομένως, ο  $A$  έχει κέντρο συστολής τό  $g(!)$ .  $\square$

Είναι συνεπές με τή θεωρία τύπων τού Martin-Löf να υποθέσουμε ότι κάθε τύπος είναι σύνολο· για να κατασκευάσουμε γνήσια ανώτερους τύπους, χρειαζόμαστε τό univalence.

## 6.5 Ασκήσεις

**Άσκηση 6.3.** Έστω  $(x : A) P(x)$  οικογένεια απλών προτάσεων. Για  $p : x_1 =_A x_2$ ,  $\gamma_1 : P(x_1)$  και  $\gamma_2 : P(x_2)$ , δείξτε ότι  $\gamma_1 =_p^P \gamma_2$ .

## Κεφάλαιο 7

# Ανώτεροι επαγωγικοί τύποι

Μέχρι τώρα βρισκόμασταν στην επικράτεια τής θεωρίας τύπων του Martin-Löf. Τώρα θα εισαγάγουμε τό ένα από τά δύο συστατικά που διαφοροποιούν τήν ομοτοπική θεωρία τύπων, στήν τρέχουσα μορφή της, από τή θεωρία τύπων του Martin-Löf: Τούς ανώτερους επαγωγικούς τύπους. Αυτοί θα μάς οδηγήσουν στήν άλλη ειδοποιό διαφορά τής ομοτοπικής θεωρίας τύπων: τό univalence.

Όπως οι τύποι που έχουμε δει μέχρι τώρα, οι *ανώτεροι επαγωγικοί τύποι*, ή *τύποι ανώτερης διάστασης*, αποτελούν ένα γενικό σχήμα ορισμού νέων τύπων, τά στοιχεία τών οποίων παράγονται από κάποιους κατασκευαστές. Αντίθετα από τίς περιπτώσεις που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα, ο ορισμός ενός ανώτερου επαγωγικού τύπου μπορεί να περιλαμβάνει κατασκευαστές που παράγουν όχι μόνο στοιχεία, αλλά επίσης μονοπάτια και ανώτερα μονοπάτια στόν τύπο αυτόν.

### 7.1 Τό διάστημα

Τό διάστημα I είναι ο ανώτερος επαγωγικός τύπος που παράγεται από

- ένα σημείο  $0_I : I$ ,
- ένα σημείο  $1_I : I$ , και
- ένα μονοπάτι  $\text{seg} : 0_I = 1_I$ .

Η παραπάνω περιγραφή εννοείται ως γενίκευση τής περιγραφής τών τύπων μέσω κατασκευαστών. Φανταζόμενοι τούς τύπους ως (ανώτερα) ομαδοειδή, αυτή η γενικότερη έννοια παραγωγής έρχεται φυσικά: Εφ' όσον εκτός από στοιχεία υπάρχουν επίσης μονοπάτια, μονοπάτια μεταξύ μονοπατιών κ.ο.κ., έχει νόημα να έχουμε κατασκευαστές σε όλες τίς διαστάσεις. Επίσης, είναι ανάλογη με τήν περιγραφή μιας αλγεβρικής δομής με γεννήτορες και σχέσεις.

Η αρχή αναδρομής του I λέει ότι, δοθέντος ενός τύπου C μαζί με

- ένα σημείο  $c_0 : C$ ,
- ένα σημείο  $c_1 : C$ , και
- ένα μονοπάτι  $p_{\text{seg}} : c_0 = c_1$ ,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned}t(0_I) &\equiv c_0, \\t(1_I) &\equiv c_1, \\t(\text{seg}) &\equiv p_{\text{seg}}.\end{aligned}$$

ορίζουν τό  $t(x) : C$  για τυχόν σημείο  $x$  τού  $I$ .

Όσον αφορά τήν αρχή επαγωγής τού  $I$ , ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι για έναν μετασχηματισμό

$$(x : I) t(x) : C(x)$$

από τό λήμμα 5.4.3 έχουμε

$$t(\text{seg}) : t(0_I) \stackrel{C}{=} t(1_I)$$

Αυτό υποδεικνύει τήν εξής διατύπωση για τήν αρχή επαγωγής τού  $I$ : Αν μάς έχει δοθεί μία οικογένεια  $(x : I) C(x)$  μαζί με

- ένα σημείο  $c_0 : C(0_I)$ ,
- ένα σημείο  $c_1 : C(1_I)$ , και
- ένα μονοπάτι  $p_{\text{seg}} : c_0 \stackrel{C}{=} c_1$ ,

ορίζεται μετασχηματισμός  $(x : I) t(x) : C(x)$  με

$$\begin{aligned}t(0_I) &\equiv c_0, \\t(1_I) &\equiv c_1, \\t(\text{seg}) &\equiv p_{\text{seg}}.\end{aligned}$$

Συχνά, δεν μάς ενδιαφέρει πού ακριβώς θα απεικονιστεί τό  $\text{seg}$  μέσω τού οριζόμενου μετασχηματισμού, παρά μάς αρκεί να ξέρουμε ότι υπάρχει κατάλληλο μονοπάτι στό οποίο μπορεί να απεικονιστεί. Στήν περίπτωση αυτή, τό  $p_{\text{seg}}$  μπορεί να αποσιωπηθεί, οπότε οδηγούμαστε στήν εξής απλουστευμένη αρχή επαγωγής: Δοθέντων δύο σημείων  $c_0 : C(0_I)$  και  $c_1 : C(1_I)$  που ικανοποιούν τή σχέση

$$c_0 \stackrel{C}{=} c_1, \tag{7.1}$$

ορίζεται μετασχηματισμός  $(x : I) t(x) : C(x)$  με

$$\begin{aligned}t(0_I) &\equiv c_0, \\t(1_I) &\equiv c_1.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε, επίσης, ότι στήν περίπτωση που οι τύποι  $C(x)$  είναι απλές προτάσεις (ορισμός 6.3.1), η συνθήκη (7.1) ικανοποιείται αυτομάτως (άσκηση 6.3).

**Άσκηση 7.1.** Διατυπώστε τήν απλουστευμένη αρχή αναδρομής τού  $I$ .

Από ομοτοπική άποψη, τό διάστημα δεν είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον, καθώς είναι συσταλτός τύπος. Για να τό δείξουμε αυτό, θα χρειαστούμε τό εξής αποτέλεσμα.

**Λήμμα 7.1.1.** Για  $p : x =_A y$  και  $q : y =_A z$ ,

$$p \stackrel{x=}{=} q \text{ - } p \bullet q.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στά  $p$  και  $q$ , η ζητούμενη σχέση ανάγεται στην

$$\text{refl}_x \stackrel{x=}{=}_{\text{refl}_x} \text{refl}_x,$$

για την οποία έχουμε τό τεκμήριο αλήθειας  $\text{refl}_{\text{refl}_x}$ .  $\square$

**Λήμμα 7.1.2.** Ο τύπος  $I$  είναι συσταλτός.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι τό  $0_I$  είναι κέντρο συστολής τού  $I$ . Από τό προηγούμενο λήμμα ξέρουμε ότι

$$\text{refl}_{0_I} \stackrel{0_I=}{=}_{\text{seg}} \text{seg}.$$

Επομένως, από την απλουστευμένη αρχή επαγωγής παίρνουμε, για οποιοδήποτε  $x : I$ , ένα  $\text{contr}_x : 0_I = x$ .  $\square$

Παρ' όλ' αυτά, η παρουσία τού διαστήματος έχει μη τετριμμένες τυποθεωρητικές συνέπειες· μάς επιτρέπει, φερ' ειπείν, να δείξουμε ότι οι τύποι συναρτήσεων είναι εκτασιακοί.

**Θεώρημα 7.1.3.** Για οποιοδήποτε  $f, g : \prod(x : A) B(x)$ , αν  $f \sim g$ , τότε  $f = g$ .

Απόδειξη. Από την εκφώνηση μάς έχει δοθεί  $H : f \sim g \equiv \prod(x : A) f(x) = g(x)$ . Έστω  $x : A$ . Για  $y : I$ , ορίζουμε  $t_x(y) : B(x)$  μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} t_x(0_I) &::= f(x), \\ t_x(1_I) &::= g(x), \\ t_x(\text{seg}) &::= H(x). \end{aligned}$$

Θέτοντας, για  $y : I$ ,

$$t(y) ::= \lambda(x : A) t_x(y) : \prod(x : A) B(x),$$

παίρνουμε τό σύνθετο μονοπάτι

$$f \stackrel{\eta_{\prod(B)}(f)^{-1}}{=} \lambda(x : A) f(x) \equiv t(0_I) \stackrel{t(\text{seg})}{=} t(1_I) \equiv \lambda(x : A) g(x) \stackrel{\eta_{\prod(B)}(g)}{=} g. \quad \square$$

Η αρχή αναδρομής τού διαστήματος μάς λέει ότι οι συναρτήσεις από τόν  $I$  προς έναν τύπο  $A$  είναι, κατ' ουσίαν, μονοπάτια στον  $A$ . Για να τό αποδείξουμε αυτό θα χρειαστούμε την ακόλουθη γενίκευση τού λήμματος 5.3.3.

**Λήμμα 7.1.4.** Για τύπους  $A, B$  και συναρτήσεις  $f, g : A \rightarrow B$  θεωρούμε την οικογένεια  $(x : A) C(x)$  με  $C(x) ::= f(x) = g(x)$ . Για  $p : x =_A x'$ ,  $q : C(x)$  και  $q' : C(x')$ ,

$$q \stackrel{C}{=}_p q' \simeq q \cdot g(p) =_{f(x)=g(x')} f(p) \cdot q'.$$

Ειδικότερα,

$$q \stackrel{C}{=}_p f(p)^{-1} \cdot q \cdot g(p).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στό  $p$ .  $\square$

**Λήμμα 7.1.5.** Για οποιονδήποτε τύπο  $A$ ,

$$I \rightarrow A \simeq \sum(x, y : A) x = y.$$

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε τά στοιχεία του  $\Sigma(x, y : A) x = y$  ως τριάδες  $(x, y, p)$  με  $x, y : A$  και  $p : x = y$ . Στη μία κατεύθυνση, για  $f : I \rightarrow A$  σχηματίζεται η τριάδα

$$F(f) := (f(0_I), f(1_I), f(\text{seg})).$$

Στην αντίθετη κατεύθυνση, για  $(x, y, p) : \Sigma(x, y : A) x = y$  ορίζεται συνάρτηση  $G((x, y, p)) : I \rightarrow A$  με

$$\begin{aligned} G((x, y, p))(0_I) &\equiv x, \\ G((x, y, p))(1_I) &\equiv y, \\ G((x, y, p))(\text{seg}) &\equiv p. \end{aligned}$$

Έστω  $g := G(F(f))$ . Θα δείξουμε ότι  $f = g$ . Θεωρούμε την οικογένεια  $(x : I)C(x)$ , όπου  $C(x) := f(x) = g(x)$ . Από τις ιδιότητες

$$\begin{aligned} \text{refl}_{f(0_I)} &\stackrel{C}{=}_{\text{seg}} f(\text{seg})^{-1} \cdot \text{refl}_{f(0_I)} \cdot g(\text{seg}) && \text{(προηγούμενο λήμμα)} \\ &\stackrel{C}{=}_{\text{refl}_{1_I}} \text{refl}_{f(1_I)}. && (g(\text{seg}) = f(\text{seg})) \end{aligned}$$

λαμβάνουμε τό σύνθετο μονοπάτι

$$r : \text{refl}_{f(0_I)} \stackrel{C}{=}_{\text{seg}} \text{refl}_{f(1_I)}.$$

Από την αρχή επαγωγής του  $I$  ορίζεται, για  $x : I$ ,  $H(x) : f(x) = g(x)$ . τό ζητούμενο προκύπτει από τό θεώρημα 7.1.3.

Η απόδειξη ότι η  $G$  είναι δεξιά αντίστροφη της  $F$  αφήνεται στον αναγνώστη.  $\square$

## 7.2 Ο κύκλος

Ο κύκλος  $S^1$  είναι ο ανώτερος τύπος που παράγεται από

- ένα σημείο  $\text{base} : S^1$ , και
- ένα μονοπάτι  $\text{loop} : \text{base} = \text{base}$ .

Η αρχή αναδρομής του κύκλου λέει ότι δοθέντος ενός τύπου  $C$  μαζί με

- ένα σημείο  $c_{\text{base}} : C$ , και
- ένα μονοπάτι  $p_{\text{loop}} : c_{\text{base}} = c_{\text{base}}$ ,

ορίζεται μετασχηματισμός  $(x : S^1) t(x) : C$  με

$$\begin{aligned} t(\text{base}) &\equiv c_{\text{base}}, \\ t(\text{loop}) &\equiv p_{\text{loop}}. \end{aligned}$$

Γενικότερα, δοθείσης μιας οικογένειας  $(x : S^1) C(x)$  μαζί με

- ένα σημείο  $c_{\text{base}} : C(\text{base})$ , και
- ένα μονοπάτι  $p_{\text{loop}} : c_{\text{base}} \stackrel{C}{=}_{\text{loop}} c_{\text{base}}$ ,

ορίζεται, με επαγωγή, μετασχηματισμός  $(x : S^1) t(x) : C(x)$  ο οποίος ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\text{base}) &\equiv c_{\text{base}}, \\ t(\text{loop}) &\equiv p_{\text{loop}}. \end{aligned}$$

Και εδώ, αποσιωπώντας τό  $p_{\text{loop}}$  παίρνουμε την εξής απλουστευμένη εκδοχή της αρχής επαγωγής: Δοθέντος ενός  $c_{\text{base}} : C(\text{base})$  με

$$c_{\text{base}} =_{\text{loop}}^C c_{\text{base}},$$

ορίζεται μετασχηματισμός  $(x : S^1) t(x) : C(x)$  ούτως ώστε

$$t(\text{base}) \equiv c_{\text{base}}.$$

Ως παράδειγμα χρήσης της επαγωγής αποδεικνύουμε τό ακόλουθο

**Λήμμα 7.2.1** ([7, λήμμα 6.4.2]). *Υπάρχει  $f : \prod(x : S^1) (x = x)$  με  $f(\text{base}) = \text{loop}$ .*

*Απόδειξη.* Έστω  $(x : S^1) C(x)$  με  $C(x) := x = x$ . Εφαρμόζοντας τό λήμμα 7.1.4 στην περίπτωση όπου αμφότερες οι  $f$  και  $g$  είναι η ταυτοτική του  $S^1$  και αμφότερα τά  $p$  και  $q$  είναι τό  $\text{loop}$ , παίρνουμε

$$\text{loop} =_{\text{loop}}^C \text{loop}^{-1} \cdot \text{loop} \cdot \text{loop} =_{\text{refl}_{\text{base}}}^C \text{loop},$$

δηλαδή  $\text{loop} =_{\text{loop}}^C \text{loop}$ . Ορίζεται, επομένως, συνάρτηση  $f : \prod(C)$  μέσω της επαγωγής

$$t(\text{base}) \equiv \text{loop}. \quad \square$$

Έχουμε τό ανάλογο του λήμματος 7.1.5:

**Λήμμα 7.2.2.** *Για οποιονδήποτε τύπο  $A$ ,*

$$S^1 \rightarrow A \simeq \sum(x : A) x = x.$$

*Απόδειξη.* Στή μία κατεύθυνση έχουμε τή συνάρτηση  $F : (S^1 \rightarrow A) \rightarrow \sum(x : A) x = x$  που στέλνει τήν  $f : S^1 \rightarrow A$  στό ζεύγος  $(f(\text{base}), f(\text{loop}))$ . Στήν άλλη κατεύθυνση ορίζεται συνάρτηση  $G : (\sum(x : A) x = x) \rightarrow (S^1 \rightarrow A)$  με

$$\begin{aligned} G(\text{base}) &\equiv a, \\ G(\text{loop}) &\equiv p. \end{aligned}$$

Για  $f : S^1 \rightarrow A$ , έστω  $g := G(F(f))$ . Από τούς ορισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} f(\text{base}) &\equiv g(\text{base}), \\ f(\text{loop}) &\equiv g(\text{loop}). \end{aligned}$$

Θεωρούμε τήν οικογένεια  $(x : S^1) C(x)$  με  $C(x) := f(x) = g(x)$ . Τό λήμμα 7.1.4 μάς λέει ότι

$$\text{refl}_{f(\text{base})} =_{\text{loop}}^C f(\text{loop})^{-1} \cdot \text{refl}_{\text{base}} \cdot g(\text{loop}) =_{\text{refl}_{\text{base}}}^C \text{refl}_{f(\text{base})},$$

δηλαδή  $\text{refl}_{f(\text{base})} \stackrel{C}{=} \text{loop} \text{ refl}_{f(\text{base})}$ , οπότε ορίζεται, με (απλουστευμένη) επαγωγή, μετασχηματισμός  $(x : S^1) t(x) : C(x)$ . Έπεται ότι  $f(x) = g(x)$  για οποιοδήποτε  $x : S^1$ , και επομένως  $f = g$ .

Εάν  $(a, p) : \sum (x : A) x = x$ , έστω  $(b, q) := F(G((a, p)))$ . Από τούς ορισμούς έχουμε

$$a \equiv b,$$

$$p \equiv q,$$

και επομένως, από τό θεώρημα 5.4.5,  $(a, p) = (b, q)$ . □

Όπως και στην περίπτωση τού διαστήματος, η απλουστευμένη αρχή επαγωγής επιδέχεται μία περαιτέρω απλούστευση, τήν *προτασιακή αρχή επαγωγής*: Δοθείσης οικογένειας  $(x : S^1) P(x)$  απλών προτάσεων, εάν  $P(\text{base})$ , τότε  $P(x)$  για κάθε  $x : S^1$ .

# Βιβλιογραφία

- [1] Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, Academic Press, New York, 1967.
- [2] Per Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*, Studies in proof theory, vol. 1, Bibliopolis, Napoli, 1984.
- [3] ———, *On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws*, Nordic journal of philosophical logic **1** (1996), no. 1, 11–60.
- [4] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Aurora: Dover Modern Math Originals, Courier Dover Publications, 2017.
- [5] Egbert Rijke, *Introduction to Homotopy Type Theory* (2022), <https://arxiv.org/abs/2212.11082>.
- [6] Alfred Tarski, *The Concept of Truth in Formalized Languages*, Logic, Semantics, Metamathematics, 2nd ed. (J. Corcoran, ed.), Hackett, Indianapolis, 1983, pp. 152–278.
- [7] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, <https://homotopytypetheory.org/book/>. Institute for Advanced Study, 2013.