Σημειώσεις θεωρίας τύπων

Νίκος Ρήγας

`Έκδοση 2023-12-03`

Περιεχόμενα

I Η θεωρία τύπων τού Martin-Löf **3**

1 Τύποι και αναδρομή **4**
1.1 Οι φυσικοί αριθμοί 4
1.2 Αναδρομή στούς φυσικούς αριθμούς 5
1.3 Άλλα παραδείγματα τύπων 7
1.4 Ασκήσεις 10

2 Οικογένειες τύπων και επαγωγή **12**
2.1 Οικογένειες τύπων 12
2.2 Βασισμένη ισότητα 13
2.3 Επαγωγή 16
2.4 Ισότητα 20
2.5 Ασκήσεις 23

3 Θεωρία τύπων τού Martin-Löf: Τά βασικά **27**
3.1 Γινόμενα 27
3.2 Αθροίσματα 28
3.3 Τύποι συναρτήσεων 29
3.4 Ο τύπος **0** 30
3.5 Ο τύπος **1** 30
3.6 Ειδικοί κανόνες απαλοιφής 31
3.7 Εξαρτώμενα αθροίσματα 32
3.8 Εξαρτώμενα γινόμενα 33
3.9 Αρχές επαγωγής 36
3.10 Ασκήσεις 41

4 Σύμπαντα **47**
4.1 Αναδρομικές οικογένειες τύπων 47
4.2 Σύμπαντα κατά Tarski 49

II Ομοτοπική θεωρία τύπων **51**

5 Η ομοτοπική δομή τών τύπων **52**
5.1 Οι τύποι είναι ανώτερα ομαδοειδή 54
5.2 Οι συναρτήσεις είναι συναρτητές 56
5.3 Οι ομοτοπίες είναι φυσικοί μετασχηματισμοί 58
5.4 Οι οικογένειες τύπων είναι fibrations 59

5.4.1 Ετερογενής ισότητα 60
5.5 Ασκήσεις 64

6 Λογική και σύνολα Ι **65**
6.1 Λογική κατά Curry-Howard 65
6.2 Συναρτήσεις επιλογής 66
6.3 Απλές προτάσεις 67
6.4 Σύνολα κ.λπ. 69
6.5 Ασκήσεις 70

7 Ανώτεροι επαγωγικοί τύποι **71**
7.1 Τό διάστημα 71
7.2 Ο κύκλος 74
7.3 Univalence 76
7.3.1 Αναδρομικές οικογένειες 76
7.3.2 Ισότητα τύπων 77
7.3.3 Univalence 78
7.3.4 Σύμπαντα κατά Russell 81

Βιβλιογραφία **83**

Μέρος I

Η θεωρία τύπων τού Martin-Löf

Κεφάλαιο 1

Τύποι και αναδρομή

Όλες οι θεωρίες τύπων πραγματεύονται τυχόντες τύπους. Εκείνο που τίς διαφοροποιεί μεταξύ τους είναι ποιούς τύπους προβλέπει η κάθε μία να υπάρχουν και τί μπορεί να πει για αυτούς. Μία ιδιαιτερότητα τής θεωρίας τύπων τού Martin-Löf είναι ότι δεν προβλέπει τήν ύπαρξη οποιωνδήποτε συγκεκριμένων τύπων· αντ' αυτού, περιέχει τά μέσα για τήν περιγραφή τύπων. Οι τύποι που μπορούν να οριστούν έτσι είναι οι *επαγωγικοί* τύποι.

Ένας επαγωγικός τύπος A μπορεί να γίνει αντιληπτός διαισθητικά ως ένας τύπος που προσδιορίζεται από μηδέν ή περισσότερους *κατασκευαστές*, καθένας από τούς οποίους είναι ένας τρόπος σχηματισμού (με παραμέτρους) στοιχείων τού A. Αυτό περιλαμβάνει σαν ειδική περίπτωση κατασκευαστές χωρίς παραμέτρους, οι οποίοι είναι μεμονομένα στοιχεία τού A.

1.1 Οι φυσικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί παράγονται από τό επαγωγικό σχήμα

- τό μηδέν είναι φυσικός αριθμός, και
- ο επόμενος καθενός φυσικού αριθμού είναι φυσικός αριθμός.

Σε τυποθεωρητικό συμβολισμό, η παραπάνω επαγωγική περιγραφή τών φυσικών αριθμών παίρνει τή μορφή

- $0 : \mathrm{Nat}$,
- εάν $n : \mathrm{Nat}$, τότε $\mathrm{s}(n) : \mathrm{Nat}$.

Επομένως, ο τύπος Nat έχει δύο κατασκευαστές: Τόν 0, που δεν έχει παραμέτρους, και τόν s, που έχει μία παράμετρο η οποία είναι επίσης στοιχείο τού Nat (οπότε είναι αναδρομικός κατασκευαστής). Αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι τά στοιχεία τού Nat είναι τά

$$0,\ \mathrm{s}(0),\ \mathrm{s}(\mathrm{s}(0)),\ \ldots,$$

τά οποία καλούμε 0, 1, 2 και λοιπά.

Αν μάς έχει δοθεί ένα στοιχείο $t(x)$ ενός τύπου A για κάθε στοιχείο x τού τύπου A', αυτό που έχουμε είναι μία οικογένεια στοιχείων τού A παραμετροποιημένη από τόν

A', ή, στήν ορολογία που θα υιοθετήσουμε, για έναν *μετασχηματισμό* τών στοιχείων τού A' σε στοιχεία τού A.

Προκειμένου να δηλώσουμε έναν τέτοιον μετασχηματισμό, γράφουμε

$$(x : A')\, t(x) : A$$

ή τόν ισοδύναμο κανόνα σχηματισμού

$$\frac{x : A'}{t(x) : A}$$

και λέμε «για x στόν A', $t(x)$ στόν A», ή «ένα στοιχείο $t(x)$ τού A για τό τυχόν στοιχείο x τού A'». Ο ίδιος ο μετασχηματισμός γράφεται

$$(x : A')\, t(x)$$

(και, ενίοτε, απλώς t). Ομοίως, η έκφραση

$$(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)\, t(x_1, \dots, x_n) : A$$

δηλώνει έναν μετασχηματισμό με n τό πλήθος παραμέτρους. (Ένας μετασχηματισμός $()\, t() : A$ με μηδέν τό πλήθος παραμέτρους δεν είναι παρά ένα στοιχείο τού A· γενικά, στήν έννοια τού μετασχηματισμού συμπεριλαμβάνουμε και τά στοιχεία ως οριακή περίπτωση.)

Οι παράμετροι ενός μετασχηματισμού μπορεί να είναι οι ίδιες μετασχηματισμοί· αυτό αποτυπώνεται σε εκφράσεις όπως

$$(x : A, (y : B)\, z(y) : C)\, t(x, z),$$

όπου ο σημαινόμενος μετασχηματισμός έχει δύο παραμέτρους, εκ τών οποίων η μία είναι στοιχείο τού A και η άλλη είναι μετασχηματισμός στοιχείων τού B σε στοιχεία τού C.

Περίπτωση μετασχηματισμού είναι και οι κατασκευαστές.

1.2 Αναδρομή στούς φυσικούς αριθμούς

Οι κύριες χρησιμότητες τής επαγωγικής περιγραφής ενός τύπου είναι η διατύπωση ορισμών με αναδρομή και αποδείξεων με επαγωγή. Θα εξετάσουμε τώρα τήν περίπτωση τής αναδρομής· για τήν επαγωγή θα είμαστε σε θέση να μιλήσουμε μόλις εμπλουτίσουμε τή γλώσσα με οικογένειες τύπων.

Έστω C τύπος. Δοθέντων ενός $c_0 : C$ και ενός ενός $(x : \mathrm{Nat}, y : C)\; c_{\mathrm{s}}(x, y) : C$, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat})\, t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathrm{s}(n)) &:\equiv c_{\mathrm{s}}(n, t(n)). \end{aligned}$$

Λέμε ότι ο t ορίζεται με *αναδρομή (recursion)* από τά c_0 και c_{s}· η δυνατότητα διατύπωσης τέτοιων ορισμών είναι η *αρχή τής αναδρομής (recursion principle) για τόν* Nat.

Ως πρώτο παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής αναδρομής, ας ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Nat})\ \mathrm{pred}(x) : \mathrm{Nat}$ που στέλνει τό μηδέν στό μηδέν και καθέναν άλλον φυσικόν αριθμό στόν προηγούμενό του: Στήν περίπτωση αυτή, ο τύπος C είναι ο Nat (ο μόνος τύπος που έχουμε αυτή τή στιγμή), και οι ορίζουσες σχέσεις έχουν τή μορφή

$$\begin{aligned}\mathsf{pred}(0) &:\equiv 0,\\ \mathsf{pred}(\mathsf{s}(n)) &:\equiv n.\end{aligned}$$

Πρόκειται δηλαδή για τό στιγμιότυπο τού γενικού σχήματος τής αναδρομής όπου τό c_0 είναι τό 0 και τό $c_{\mathsf{s}}(x, y)$ είναι τό x.

Μπορούμε επίσης να ορίζουμε μετασχηματισμούς που έχουν περισσότερες από μία παραμέτρους, κάνοντας αναδρομή σε μία από αυτές. Τέτοια περίπτωση είναι η πρόσθεση φυσικών αριθμών, τήν οποία θα ορίσουμε με αναδρομή στόν δεξιό προσθετέο:

$$\begin{aligned}m + 0 &:\equiv m,\\ m + \mathsf{s}(n) &:\equiv \mathsf{s}(m + n).\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι τό $m + n$ ορίζεται με αναδρομή από τά m και $(x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(y)$.

Ενίοτε δεν θέλουμε να δώσουμε όνομα στόν μετασχηματισμό που ορίζεται με αναδρομή· αυτό συμβαίνει π.χ. εάν θέλουμε να τόν αποτιμήσουμε αμέσως ή όταν εμφανίζεται ως όρισμα κάποιου άλλου μετασχηματισμού. Επίσης, για τή μεταμαθηματική μελέτη τής θεωρίας τύπων είναι απαραίτητο να μπορούμε να διατυπώσουμε τήν αρχή τής αναδρομής με τρόπο που να μην απαιτεί τήν προσθήκη στή γλώσσα ενός συμβόλου για κάθε ορίσιμο μετασχηματισμό. Αυτό τό επιτυγχάνουμε υποκαθιστώντας τήν αρχή τής αναδρομής με τό ένα και μοναδικό στιγμιότυπο αυτης στό οποίο τά c_0 και c_{s} έχουν περάσει μέσα στόν συμβολισμό ως ρητές παράμετροι. Ορίζουμε λοιπόν τόν *αναδρομέα (recursor)*

$$(z : C, (x : \mathrm{Nat}, y : C)\ w(x, y) : C, n : \mathrm{Nat})\ \mathsf{rec}^C_{\mathrm{Nat}}(z, w, n) : C$$

τού Nat μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}^C_{\mathrm{Nat}}(z, w, 0) &:\equiv z,\\ \mathsf{rec}^C_{\mathrm{Nat}}(z, w, \mathsf{s}(n)) &:\equiv w(n, \mathsf{rec}^C_{\mathrm{Nat}}(z, w, n)).\end{aligned}$$

Συνήθως δεν υπάρχει ανάγκη να δηλωθεί ο τύπος C στόν συμβολισμό, οπότε τόν παραλείπουμε και γράφουμε απλώς $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(z, w, n)$.

Ο αναδρομέας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφραστεί οποιοσδήποτε αναδρομικός ορισμός. Ο προηγούμενος ενός φυσικού αριθμού, λόγου χάριν, μπορεί τώρα να γραφτεί

$$\mathsf{pred}(n) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(0, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ x, n),$$

ενώ τό άθροισμα δύο φυσικών αριθμών,

$$m + n :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(m, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(y), n).$$

Άσκηση 1.1. Έχοντας τήν πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned}m \cdot 0 &:\equiv 0,\\ m \cdot \mathsf{s}(n) &:\equiv (m \cdot n) + m.\end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \cdot n$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού Nat. Προαιρετικά, συνεχίστε με τά m^n και $n!$.

Λύση. $m \cdot n :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(0, (x, y : \mathrm{Nat})\ x + m, n)$. □

1.3 Άλλα παραδείγματα τύπων

Λίστες

Οι λίστες στοιχείων ενός τύπου A συγκροτούν έναν τύπο $\mathrm{List}(A)$, ο οποίος περιγράφεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\mathsf{nil}_A : \mathrm{List}(A)$, και
- εάν $a : A$ και $l : \mathrm{List}(A)$, τότε $\mathsf{cons}_A(a, l) : \mathrm{List}(A)$,

όπου nil_A η κενή λίστα και $\mathsf{cons}_A(a, l)$ η προέκταση τής l με τήν προσθήκη τού a. Στήν πράξη, τά subscripts θα παραλείπονται όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης σχετικά με τό ποιός είναι ο A.

Η αρχή τής αναδρομής για τόν $\mathrm{List}(A)$ έχει τήν εξής μορφή: Εάν ο C είναι ένας οποιοσδήποτε τύπος, και μάς έχουν δοθεί ένα $c_{\mathsf{nil}} : C$ και ένα $c_{\mathsf{cons}}(x, y, z) : C$ για τυχόντα $x : A$, $y : \mathrm{List}(A)$, και $z : C$, οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{nil}) &:\equiv c_{\mathsf{nil}}, \\ t(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv c_{\mathsf{cons}}(a, l, t(l)) \end{aligned}$$

ορίζουν τό $t(l)$ για οποιαδήποτε λίστα $l : \mathrm{List}(A)$. Για παράδειγμα, τό μήκος $\mathsf{len}(l)$ μιας λίστας l ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{len}(\mathsf{nil}) &:\equiv 0, \\ \mathsf{len}(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv \mathsf{s}(\mathsf{len}(l)), \end{aligned}$$

και η συνένωση (concatenation) $l + k$ δύο λιστών l και k ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{nil} \quad\quad\; + k &:\equiv k, \\ \mathsf{cons}(a, l) + k &:\equiv \mathsf{cons}(a, l + k), \end{aligned}$$

ενώ τό άθροισμα $\mathsf{sum}(l)$ τών στοιχείων μιας λίστας l φυσικών αριθμών ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{sum}(\mathsf{nil}) &:\equiv 0, \\ \mathsf{sum}(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv a + \mathsf{sum}(l). \end{aligned}$$

Όπως κάναμε και με τόν Nat, μπορούμε να «πακετάρουμε» τήν αρχή τής αναδρομής τού $\mathrm{List}(A)$ σε έναν αναδρομέα

$$(v : C, (x : A, y : \mathrm{List}(A), z : C)\ w(x, y, z) : C, l : \mathrm{List}(A))\ \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, l) : C$$

οριζόμενο από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, \mathsf{nil}) &:\equiv v, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, \mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv w(a, l, \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(v, w, l)), \end{aligned}$$

οπότε τό μήκος μιας λίστας μπορεί εναλλακτικά να οριστεί ως

$$\mathsf{len}(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(0, (x : A, y : \mathrm{List}(A), z : \mathrm{Nat})\ \mathsf{s}(z), l),$$

η συνένωση δύο λιστών,

$$l + k :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(k, (x : A, y : \mathrm{List}(A), z : \mathrm{List}(A))\ \mathsf{cons}(x, z), l),$$

και τό άθροισμα μιας λίστας φυσικών αριθμών,

$$\mathsf{sum}(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(\mathrm{Nat})}(0, (x : A, y : \mathrm{List}(A), z : \mathrm{Nat})\ x + z, l).$$

Άσκηση 1.2. Η συνένωση $\mathsf{cat}(L) : \mathrm{List}(A)$ μιας λίστας $L : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$ λιστών μελών ενός τύπου A έχει τόν αναδρομικό ορισμό

$$\begin{aligned}\mathsf{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)}) &:\equiv \mathsf{nil}_A,\\ \mathsf{cat}(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L)) &:\equiv l + \mathsf{cat}(L).\end{aligned}$$

Γράψτε τό $\mathsf{cat}(L)$ χρησιμοποιώντας τόν αναδρομέα τού $\mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$.

Λύση. $\mathsf{cat}(L) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(\mathrm{List}(A))}(\mathsf{nil}_A, (x : \mathrm{List}(A), y : \mathrm{List}(\mathrm{List}(A)), z : \mathrm{List}(A))\ x + z, L)$. $\square$

Δέντρα

Ο τύπος BTree τών δυαδικών δέντρων συλλαμβάνεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\mathsf{triv} : \mathrm{BTree}$,
- εάν $r : \mathrm{BTree}$ και $s : \mathrm{BTree}$, τότε $\mathsf{join}(r, s) : \mathrm{BTree}$.

Στόν BTree αντιστοιχεί η εξής αρχή αναδρομής: Δοθέντων ενός $c_{\mathsf{triv}} : C$ και ενός $(x, y : \mathrm{BTree}, z, w : C)\ c_{\mathsf{join}}(x, y, z, w) : C$, όπου C τυχών τύπος, μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{BTree})\ t(x) : C$ θέτοντας

$$\begin{aligned}t(\mathsf{triv}) &:\equiv c_{\mathsf{triv}},\\ t(\mathsf{join}(r, s)) &:\equiv c_{\mathsf{join}}(r, s, t(r), t(s)).\end{aligned}$$

Άσκηση 1.3. Περιγράψτε τή μορφή τού $\mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}$ και διατυπώστε τίς ορίζουσες σχέσεις του.

Λύση. Ο αναδρομέας τού BTree είναι ο μετασχηματισμός

$$(x : C, (w_1, w_2 : \mathrm{BTree}, w_3, w_4 : C)\ y(w_1, w_2, w_3, w_4) : C, z : \mathrm{BTree})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, \mathsf{triv}) &:\equiv x,\\ \mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, \mathsf{join}(u, v)) &:\equiv y(u, v, \mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, u), \mathsf{rec}_{\mathrm{BTree}}(x, y, v)).\end{aligned}$$ $\square$

Τά δυαδικά δέντρα είναι ειδική περίπτωση δέντρων δεδομένης διακλάδωσης. Ο τύπος $\mathrm{Tree}(A)$ τών δέντρων με τύπο διακλάδωσης A ορίζεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\mathsf{triv}_A : \mathrm{Tree}(A)$,
- εάν $(x : A)\ b(x) : \mathrm{Tree}(A)$, τότε $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x) : \mathrm{Tree}(A)$.

Περιγραφικότερα, αυτό που λέει η δεύτερη ρήτρα είναι ότι εάν έχουμε ένα δέντρο $b(x)$ για κάθε $x : A$, μπορούμε να ενώσουμε αυτά τά δέντρα με μία καινούργια ρίζα και να φτιάξουμε ένα μεγάλο δέντρο $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x)$, τό οποίο περιέχει τά διάφορα $b(x)$ ως άμεσα υποδέντρα. Για να επεκτείνουμε τόν ορισμό ενός μετασχηματισμού t στό $\mathsf{join}_A(x : A)\ b(x)$, έχοντας ήδη διαθέσιμα τά $t(b(x))$ για $x : A$, χρειαζόμαστε έναν μετασχηματισμό

$$((x : A)\ y(x) : \mathrm{Tree}(A), (x : A)\ z(x) : C)\ c_{\mathsf{join}_A}(y, z) : C$$

οπότε, μαζί με ένα $c_{\mathsf{triv}_A} : C$ μπορούμε να ορίσουμε τόν t θέτοντας

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}_A) &:\equiv c_{\mathsf{triv}_A}, \\ t(\mathsf{join}_A(x : A)\, b(x)) &:\equiv c_{\mathsf{join}_A}((x : A)\, b(x), (x : A)\, t(b(x))). \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο τύπος A εμφανίζεται αρνητικά στόν κατασκευαστή join_A, οπότε αναμένεται ότι τό $\mathrm{Tree}(A)$ συναρτάται ανταλλοίωτα με τό A. Πράγματι, ένας μετασχηματισμός

$$(x : B)\, u(x) : A$$

επάγει μία αναπαραμετροποίηση δέντρων

$$(x : \mathrm{Tree}(A))\, \mathrm{Tree}(u)(x) : \mathrm{Tree}(B)$$

με ορισμό

$$\begin{aligned} \mathrm{Tree}(u)(\mathsf{triv}_A) &:\equiv \mathsf{triv}_B, \\ \mathrm{Tree}(u)(\mathsf{join}_A(x : A)\, b(x)) &:\equiv \mathsf{join}_B(y : B)\, \mathrm{Tree}(u)(b(u(y))). \end{aligned}$$

Άσκηση 1.4. Περιγράψτε τόν αναδρομέα τού $\mathrm{Tree}(A)$, και εκφράστε τόν $\mathrm{Tree}(u)$ με τή βοήθειά του.

Λύση. Πρόκειται για τόν μετασχηματισμό

$$(x : C, ((a : A)\, v(a) : \mathrm{Tree}(A), (a : A)\, w(a) : C)\, y(v, w) : C, z : \mathrm{Tree}(A)) \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(x, y, z) : C$$

που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(x, y, \mathsf{triv}_A) &:\equiv x, \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(x, y, \mathsf{join}_A(a : A)\, b(a)) &:\equiv y((a : A)\, b(a), (a : A)\, \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(x, y, b(a))). \end{aligned}$$

Ο $\mathrm{Tree}(u)$ γράφεται

$$\mathrm{Tree}(u)(x) :\equiv \\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Tree}(A)}(\mathsf{triv}_B, ((a : A)\, v(a) : \mathrm{Tree}(A), (a : A)\, w(a) : \mathrm{Tree}(B))\, \mathsf{join}_B(y : B)\, w(u(y)), x).$$

□

Άσκηση 1.5. Στόν ορισμό τού $\mathrm{List}(A)$, ο τύπος A εμφανίζεται θετικά. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x : A)\, u(x) : B$ ορίστε, χρησιμοποιώντας τήν αρχή τής αναδρομής ή τόν αναδρομέα τού $\mathrm{List}(A)$, τόν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{List}(A))\, \mathrm{List}(u)(x) : \mathrm{List}(B)$ ο οποίος απεικονίζει μία λίστα μελών τού A στή λίστα τών εικόνων τους μέσω τού u.

Λύση. Με αναδρομή:

$$\begin{aligned} \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A) &:\equiv \mathsf{nil}_B, \\ \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a, l)) &:\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), \mathrm{List}(u)(l)). \end{aligned}$$

Με τόν αναδρομέα:

$$\mathrm{List}(u)(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(\mathsf{nil}_B, (x : \mathrm{List}(A), y : A, z : \mathrm{List}(B))\, \mathsf{cons}_B(u(y), z), x).$$ □

Αληθοτιμές

Ο Bool είναι ο τύπος που έχει ακριβώς δύο μέλη false και true· επομένως, περιγράφεται από τό επαγωγικό σχήμα

- $\mathsf{false} : \mathrm{Bool}$,
- $\mathsf{true} : \mathrm{Bool}$.

Η αρχή τής αναδρομής για τόν Bool εκφράζει τό γεγονός ότι προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό μελών τού Bool σε μέλη ενός τύπου C δεν έχουμε παρά να πούμε τί κάνει με τό false και τί με τό true· συγκεκριμένα, δοθέντων ενός $c_{\mathsf{false}} : C$ και ενός $c_{\mathsf{true}} : C$, οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
t(\mathsf{false}) &:\equiv c_{\mathsf{false}},\\
t(\mathsf{true}) &:\equiv c_{\mathsf{true}}
\end{aligned}
$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{Bool})t(x) : C$. Όπως πάντα, έχουμε έναν αναδρομέα

$$(x : C, y : C, z : \mathrm{Bool})\ \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, z) : C$$

με ορίζουσες σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{false}) &:\equiv x,\\
\mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x, y, \mathsf{true}) &:\equiv y.
\end{aligned}
$$

Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε τόν αληθοπίνακα τής διάζευξης μέσω τής αναδρομής

$$
\begin{aligned}
\mathsf{or}(b, \mathsf{false}) &:\equiv b,\\
\mathsf{or}(b, \mathsf{true}) &:\equiv \mathsf{true},
\end{aligned}
$$

ή, εναλλακτικά, με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού Bool,

$$\mathsf{or}(b, c) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(b, \mathsf{true}, c).$$

Άσκηση 1.6. Ορίστε τούς αληθοπίνακες τής σύζευξης, τής συνεπαγωγής, και τής άρνησης.

Λύση. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι· π.χ., με αναδρομή στήν πρώτη μεταβλητή:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{and}(b, c) &:\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(\mathsf{false}, c, b),\\
\mathsf{ifthen}(b, c) &:\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(\mathsf{true}, c, b).\\
\mathsf{not}(b) &:\equiv \mathsf{ifthen}(b, \mathsf{false}).
\end{aligned}
$$

□

1.4 Ασκήσεις

Άσκηση 1.7. Για $n : \mathrm{Nat}$, τό $\mathsf{iszero}(n) : \mathrm{Bool}$ ορίζεται από τήν αναδρομή

$$
\begin{aligned}
\mathsf{iszero}(0) &:\equiv \mathsf{true},\\
\mathsf{iszero}(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{false}.
\end{aligned}
$$

Γράψτε τό $\mathsf{iszero}(n)$ με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού Nat.

Λύση. $\mathsf{iszero}(n) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(\mathsf{true}, (x : \mathrm{Nat}, y : \mathrm{Bool})\, \mathsf{false}, n).$ □

Άσκηση 1.8 (almost minus). Για $m, n : \mathrm{Nat}$, η πράξη $m \dot{-} n$ ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} m \dot{-} 0 \quad &:\equiv m, \\ m \dot{-} \mathsf{s}(n) &:\equiv \mathsf{pred}(m \dot{-} n). \end{aligned}$$

Γράψτε τό $m \dot{-} n$ χρησιμοποιώντας τόν $\mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}$.

Λύση. $m \dot{-} n :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Nat}}(m, (x, y : \mathrm{Nat})\, \mathsf{pred}(y), n).$ □

Άσκηση 1.9 (insertion sort). Ο μετασχηματισμός $(a : A, l : \mathrm{List}(A))\, \mathsf{insert}(a, l) : \mathrm{List}(A)$ τής ένθεσης μέλους σε (ταξινομημένη) λίστα ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} &\mathsf{insert}(a', \mathsf{nil}) &&:\equiv \mathsf{cons}(a', \mathsf{nil}), \\ &\mathsf{insert}(a', \mathsf{cons}(a, l)) &&:\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(\mathsf{cons}(a, \mathsf{insert}(a', l)), \mathsf{cons}(a', \mathsf{cons}(a, l)), a \le a'), \end{aligned}$$

όπου $a \le a' :\equiv \mathsf{iszero}(a \dot{-} a')$. Χρησιμοποιήστε αυτόν τόν μετασχηματισμό για να περιγράψετε τόν αλγόριθμο ταξινόμησης insertion sort. (Πρόκειται για τόν αλγόριθμο ο οποίος, προκειμένου να ταξινομήσει μία λίστα $\mathsf{cons}(a, l)$, ταξινομεί πρώτα τήν l και μετά κάνει insert τό a.)

Λύση. Με αναδρομή:

$$\begin{aligned} \mathsf{isort}(\mathsf{nil}) &:\equiv \mathsf{nil}, \\ \mathsf{isort}(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv \mathsf{insert}(a, \mathsf{isort}(l)). \end{aligned}$$

Με τόν αναδρομέα:

$$\mathsf{isort}(l) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{List}(A)}(\mathsf{nil}, (x : A, y, z : \mathrm{List}(A))\, \mathsf{insert}(x, z), l).$$ □

Άσκηση 1.10. Ορίστε ακολουθία $(n : \mathrm{Nat})\, a_n$ με

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i.$$

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τόν List(Nat).]

Λύση. Ορίζουμε μία βοηθητική ακολουθία $b_n : \mathrm{List}(\mathrm{Nat})$ με

$$\begin{aligned} b_0 &:\equiv \mathsf{nil}, \\ b_{\mathsf{s}(n)} &:\equiv \mathsf{cons}(\mathsf{sum}(b_n), b_n), \end{aligned}$$

και θέτουμε $a_n :\equiv \mathsf{sum}(b_n)$. □

Κεφάλαιο 2

Οικογένειες τύπων και επαγωγή

Στό προηγούμενο κεφάλαιο διατυπώσαμε κάποιες αρχές αναδρομής, με τή βοήθεια τών οποίων μπορούμε να εκφράσουμε μετασχηματισμούς μεταξύ τών διαφόρων τύπων. Αυτό που φτιάξαμε, εν ολίγοις, είναι μία απλή συναρτησιακή γλώσσα. Ενδιαφερόμαστε όμως επίσης για τίς ιδιότητες αυτών τών μετασχηματισμών. Σε αυτό τό κεφάλαιο, καθώς και στό επόμενο, θα δούμε πώς μπορούμε, στό πλαίσιο τής θεωρίας τύπων, να διατυπώνουμε και να αποδεικνύουμε προτάσεις.

Σε αντίθεση με άλλες μαθηματικές θεωρίες και θεμελιώσεις τών μαθηματικών όπως η θεωρία συνόλων, στή θεωρία τύπων οι μαθηματικές προτάσεις, καθώς και οι αποδείξεις τους, είναι μαθηματικά αντικείμενα πρώτης κατηγορίας. Συγκεκριμένα, οι μαθηματικές προτάσεις αναπαρίστανται από τύπους, που μπορούν να θεωρηθούν ταυτόχρονα μαθηματικές δομές και μαθηματικοί ισχυρισμοί, μία σύλληψη γνωστή ως propositions-as-types. Υπό αυτή τή σκοπιά, τά στοιχεία ενός τύπου νοούνται ως *τεκμήρια* ή *μάρτυρες* αλήθειας τής αντίστοιχης πρότασης. (Μερικές φορές λέγονται επίσης αποδείξεις, αλλά αυτή η ορολογία μπορεί να είναι παραπλανητική, επομένως γενικά τήν αποφεύγουμε.) Μία άμεση μεθοδολογική συνέπεια είναι ότι προκειμένου να δείξουμε ότι μία πρόταση αληθεύει δεν έχουμε παρά να εμφανίσουμε ένα στοιχείο τού τύπου που αντιστοιχεί σε αυτή τήν πρόταση.

Ωστόσο, αυτή η οπτική σχετικά με τίς αποδείξεις διαφέρει ουσιωδώς από τή συνήθη. Ο τρόπος με τόν οποίο η λογική γίνεται αντιληπτή από τή θεωρία τύπων είναι ότι μια πρόταση δεν είναι απλώς αληθής ή ψευδής, αλλά μάλλον μπορεί να νοηθεί ως η συλλογή όλων τών δυνατών τεκμηρίων αλήθειας της. Σύμφωνα με αυτήν τή σύλληψη, οι αποδείξεις δεν είναι μόνο τό μέσο επικοινωνίας τών μαθηματικών, αλλά αποτελούν και οι ίδιες αντικείμενο μελέτης ισότιμο με πιο οικεία αντικείμενα όπως οι αριθμοί και οι συναρτήσεις.

2.1 Οικογένειες τύπων

Θα μιλήσουμε τώρα για τό ένα από τά δύο δομικά στοιχεία τών προτάσεων, τά κατηγορήματα· τό άλλο, οι λογικές σταθερές (οι σύνδεσμοι και οι ποσοδείκτες), είναι τό αντικείμενο τού επόμενου κεφαλαίου.

Μία *οικογένεια τύπων (type family)* είναι ένας μετασχηματισμός τών στοιχείων κάποιων τύπων σε τύπους. Σε μία οικογένεια $(x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n)\ A(x_1, \dots, x_n)$, οι

$A_1, \dots, A_n$ λέγονται *τύποι δεικτών (indexing types)*, και οι επιμέρους τύποι $A(x_1, \dots, x_n)$ λέγονται *στιγμιότυπα (instances)* τής οικογένειας.

Οι οικογένειες τύπων, που επίσης λέγονται εξαρτώμενοι τύποι (dependent types), ήταν μία από τίς σημαντικότερες καινοτομίες τής θεωρίας τύπων τού Martin-Löf. Τυπικά παραδείγματα οικογενειών τύπων αποτελούν τά διάφορα κατηγορήματα $(x, y : A) x = y$, $(x : \mathrm{Nat}) \mathrm{Prime}(x)$ κ.λπ. που συναντάμε στά μαθηματικά. Ένα στοιχειώδες, αλλά σημαντικό, παράδειγμα οικογένειας είναι η σταθερή οικογένεια $(x : A)\ B$ όπου A και B είναι τύποι. Και βέβαια, μία οικογένεια $()\ A()$ με μηδέν τό πλήθος ορίσματα δεν είναι παρά ένας τύπος.

Ο απλούστερος τρόπος να ορίσουμε μία οικογένεια είναι προδιαγράφοντας κατασκευαστές στά διάφορα στιγμιότυπά της, όπως κάναμε ήδη για μεμονωμένους τύπους. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τόν τρόπο για να ορίσουμε τήν ισότητα. Μάλιστα, θα τήν ορίσουμε με δύο τρόπους: Πρώτα σαν οικογένεια ως προς τό ένα από τα δύο σκέλη (με τό άλλο να λειτουργεί σαν παράμετρος), και μετά σαν οικογένεια ως προς αμφότερα τά σκέλη.

2.2 Βασισμένη ισότητα

Έστω $a : A$, όπου A τύπος. Η *ισότητα προς a* είναι η οικογένεια

$$(x : A)\ a =_A x$$

που έχει τόν μοναδικό κατασκευαστή

$$\mathsf{refl}_a : a =_A a.$$

Εφ' όσον δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης (ο A προσδιορίζεται μονοσήμαντα ως ο τύπος τών σκελών τής ισότητας), ο δείκτης παραλείπεται και γράφουμε, απλούστερα, $a = b$. Πρέπει, ωστόσο, να θυμόμαστε ότι πρόκειται για μία διαφορετική οικογένεια για κάθε τύπο A και για κάθε στοιχείο a αυτού.

Η ισότητα προς a λέγεται επίσης *βασισμένη (based)* ισότητα, διότι τό ένα σκέλος (τό αριστερό στόν συμβολισμό μας) κρατιέται σταθερό, σε αντιδιαστολή με τήν (απλώς) ισότητα που θα ορίσουμε παρακάτω, η οποία είναι οικογένεια ως προς αμφότερα τά σκέλη. Οι δύο ορισμοί διαφέρουν όσον αφορά τή μορφή τού αναδρομέα, αλλά είναι ισοδύναμοι· για τόν λόγο αυτόν χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο.

Σχετικά με τήν αρχή τής αναδρομής, παρατηρήστε ότι η ισότητα προς a είναι οικογένεια, οπότε αυτό που ορίζεται είναι μετασχηματισμοί προς οικογένειες επί τού ίδιου τύπου δεικτών A, και επίσης ότι έχουμε μόνο έναν κατασκευαστή, οπότε αρκεί να πούμε τί κάνει ένας τέτοιος μετασχηματισμός με αυτόν. Αναλυτικότερα, ας θεωρήσουμε ότι μάς έχουν δοθεί

- μία οικογένεια $(x : A)\ C(x)$, και
- ένα στοιχείο c_{refl_a} τού $C(a)$.

Τότε, η σχέση

$$t(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv c_{\mathsf{refl}_a}$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x : A, p : a = x)\ t(x, p) : C(x)$.

Αν συγκρίνουμε αυτή τήν αρχή αναδρομής με εκείνες τών μεμονωμένων τύπων, θα παρατηρήσουμε ότι εδώ έχουμε ένα παραπάνω όρισμα, ο ρόλος τού οποίου είναι να προσδιορίζει σε ποιο στιγμιότυπο βρισκόμαστε κάθε φορά.

Ο αναδρομέας τής ισότητας προς a είναι ο μετασχηματισμός

$$(b : A, c : C(a), p : a = b)\ \mathsf{rec}^C_{a=b}(c, p) : C(b) \tag{2.1}$$

που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\mathsf{rec}^C_{a=a}(c, \mathsf{refl}_a) :\equiv c. \tag{2.2}$$

Ο κανόνας σχηματισμού τού αναδρομέα (συμπεριλαμβάνοντας και τήν παράμετρο a) μάς δίνει τήν ευκαιρία να εισαγάγουμε τόν συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε στό εξής:

$$\frac{a : A \qquad b : A \qquad c : C(a) \qquad p : a = b}{\mathsf{transport}^C(p, c) :\equiv \mathsf{rec}^C_{a=b}(c, p) : C(b)}\ . \tag{2.3}$$

Ο συμβολισμός $\mathsf{transport}^C(p, c)$ προέρχεται από τήν ομοτοπική θεωρία τύπων και διαβάζεται «μεταφορά τού $c : C(a)$ στό $C(b)$ κατά μήκος τού $p : a = b$».

Αν από τόν (2.3) διατηρήσουμε μόνο τούς τύπους εκείνους που είναι ερμηνεύσιμοι ως προτάσεις, παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C(a) \qquad a = b}{C(b)} \tag{=*E}$$

τής βασισμένης ισότητας, γνωστό και ως *indiscernibility of identicals*, ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι τά ίσα μοιράζονται τίς ίδιες ιδιότητες.

Όπως αναμένεται, η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας. Η ανακλαστικότητα εξασφαλίζεται από τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{a = a} \tag{=I}$$

τής ισότητας, ο οποίος προκύπτει από τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{a : A}{\mathsf{refl}_a : a = a}$$

τού refl_a. Εν συνεχεία, αν θεωρήσουμε τήν οικογένεια $(x : A)\ C(x)$ με

$$C(x) :\equiv x = a,$$

ο (=*E) παίρνει τή μορφή

$$\frac{\overline{a = a} \qquad a = b}{b = a}\ .$$

Αν επαναφέρουμε τά στοιχεία, παίρνουμε τήν τυποθεωρητική κατασκευή

$$\frac{\mathsf{refl}_a : a = a \qquad p : a = b}{\mathsf{transport}^{-=a}(p, \mathsf{refl}_a) : b = a}\ .$$

Λήμμα 2.2.1 (Συμμετρία). *Για $a, b : A$ και $p : a = b$ ορίζεται πράξη*

$$p^{-1} :\equiv \mathsf{transport}^{-=a}(p, \mathsf{refl}_a) : b = a.$$

Επιπλέον, $\mathsf{refl}_a^{-1} \equiv \mathsf{refl}_a$.

Τέλος, αν θέσουμε $C(x) :\equiv a = x$, παίρνουμε τήν απαγωγή

$$\frac{a = b \qquad b = c}{a = c}\ .$$

Αν επαναφέρουμε τά στοιχεία, παίρνουμε τήν τυποθεωρητική κατασκευή

$$\frac{p : a = b \qquad q : b = c}{\mathsf{transport}^{a=\_}(q, p) : a = c}\ .$$

Λήμμα 2.2.2 (Μεταβατικότητα). *Για $a, b, c : A$, $p : a = b$, και $q : b = c$ ορίζεται πράξη*

$$p \bullet q :\equiv \mathsf{transport}^{a=\_}(q, p) : a = c.$$

Επιπλέον, $\mathsf{refl}_a \bullet \mathsf{refl}_a \equiv \mathsf{refl}_a$.

Άλλο πόρισμα τού (=*E) είναι ότι η βασισμένη ισότητα διατηρείται από μετασχηματισμούς· προκειμένου για έναν μετασχηματισμό $(x : A)\ u(x) : B$, τό ζητούμενο προκύπτει θεωρώντας στή θέση τού $C(x)$ τό $u(a) = u(x)$. Τό επόμενο λήμμα εισάγει έναν χρήσιμο συμβολισμό.

Λήμμα 2.2.3. *Έστω $(x : A)\ u(x) : B$ μετασχηματισμός. Για οποιαδήποτε $a, b : A$ και $p : a = b$, ορίζεται*

$$u(p) : u(a) = u(b),$$

ούτως ώστε $u(\mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_{u(a)}$.

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τό $u(p)$ με αναδρομή στό p. Θεωρούμε λοιπόν, για $a : A$, τήν οικογένεια $(x : A)\ u(a) = u(x)$, τήν οποία θα γράφουμε συντομότερα $u(a) = u(\_)$, και ορίζουμε τόν μετασχηματισμό $(x : A, p : a = x)\ t(x, p) : u(a) = u(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$t(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv \mathsf{refl}_{u(a)} : u(a) = u(a).$$

Για $p : a = b$ θέτουμε $u(p) :\equiv t(b, p)$. Τό δεύτερο ζητούμενο είναι άμεσο:

$$u(\mathsf{refl}_a) \equiv t(a, \mathsf{refl}_a) \equiv \mathsf{refl}_{u(a)}. \qquad \square$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε απ' ευθείας τό $u(p)$ επικαλούμενοι τόν αναδρομέα τής ισότητας:

$$u(p) :\equiv \mathsf{transport}^{u(a)=u(\_)}(p, \mathsf{refl}_{u(a)}).$$

Αυστηρά μιλώντας, θα έπρεπε να γράφουμε $u(a, b, p)$ αντί για $u(p)$, αλλά ακολουθούμε τήν πρακτική τής παράλειψης τών εννοουμένων. Επιπλέον, θεωρητικά, ο συμβολισμός αυτός είναι διφορούμενος (χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο για έναν μετασχηματισμό στοιχείων τού A και έναν μετασχηματισμό στοιχείων τού $a = b$), αλλά στήν πράξη δεν προκαλεί σύγχυση. Ακολουθεί τήν καθιερωμένη στή θεωρία κατηγοριών πρακτική τής χρήσης τού ίδιου συμβόλου για τήν εφαρμογή ενός συναρτητή σε αντικείμενα και σε μορφισμούς.

2.3 Επαγωγή

Η προσθήκη οικογενειών τύπων στή θεωρία μάς δίνει τή δυνατότητα να ισχυροποιήσουμε τίς αρχές αναδρομής τών διαφόρων τύπων. Θα πάρουμε ως παράδειγμα τούς φυσικούς αριθμούς: Η έννοια ενός αναδρομικού ορισμού

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c, \\ t(\mathrm{s}(n)) &:\equiv f_n(t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c : C$ και $(n : \mathrm{Nat}, x : C)\ f_n(x) : C$, είναι ότι ο t μπορεί να υπολογιστεί σε βήματα:

$$\begin{aligned} t(0) &\equiv c, \\ t(1) &\equiv f_0(t(0)), \\ t(2) &\equiv f_1(t(1)), \end{aligned}$$

και ούτω καθεξής. Σχηματικά, οι τιμές τού t λαμβάνονται «κυνηγώντας» τό c κατά μήκος τού διαγράμματος

$$C \xrightarrow{f_0} C \xrightarrow{f_1} C \xrightarrow{f_2} \cdots .$$

Η ίδια, όμως, διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται και στό γενικότερο διάγραμμα

$$C_0 \xrightarrow{f_0} C_1 \xrightarrow{f_1} C_2 \xrightarrow{f_2} \cdots ,$$

όπου, αντί για έναν τύπο C, έχουμε μία οικογένεια τύπων $(n : \mathrm{Nat})\ C_n$. Οδηγούμαστε έτσι στήν *αρχή τής επαγωγής* τού Nat: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{Nat})\ C(x)$,
- ενός $c_0 : C(0)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : \mathrm{Nat}, y : C(x))\ c_{\mathrm{s}}(x, y) : C(\mathrm{s}(x))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathrm{s}(n)) &:\equiv c_{\mathrm{s}}(n, t(n)) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathrm{Nat})\ t(x) : C(x).$$

Με ανάλογο τρόπο γενικεύονται οι αρχές αναδρομής τών άλλων τύπων. Η αρχή τής επαγωγής για τόν $\mathrm{List}(A)$, π.χ., διαμορφώνεται ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : \mathrm{List}(A))\ C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{nil}} : C(\mathsf{nil})$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A, y : \mathrm{List}(A), z : C(x))\ c_{\mathsf{cons}}(x, y, z) : C(\mathsf{cons}(x, y))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{nil}) &:\equiv c_{\mathsf{nil}}, \\ t(\mathsf{cons}(a, l)) &:\equiv c_{\mathsf{cons}}(a, l, t(l)), \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : \mathrm{List}(A))\ t(x) : C(x)$.

Άσκηση 2.1. Διατυπώστε τίς αρχές επαγωγής τών $\mathrm{Tree}(A)$ και Bool.

Λύση. Διατυπώνουμε τήν αρχή επαγωγής για τόν $\mathrm{Tree}(A)$: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x:\mathrm{Tree}(A))\,C(x)$,
- ενός $c_{\mathsf{triv}_A}:C(\mathsf{triv}_A)$, και
- ενός μετασχηματισμού
$((x:A)\,y(x):\mathrm{Tree}(A),(x:A)\,z(x):C)\;c_{\mathsf{join}_A}(y,z):C(\mathsf{join}_A(x:A)\,y(x))$,

οι σχέσεις

$$\begin{aligned} t(\mathsf{triv}_A) &:\equiv c_{\mathsf{triv}_A},\\ t(\mathsf{join}_A(x:A)\,b(x)) &:\equiv c_{\mathsf{join}_A}((x:A)\,b(x),(x:A)\,t(b(x))) \end{aligned}$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x:\mathrm{Tree}(A))\,t(x):C(x)$. □

Η αρχή τής επαγωγής τού Nat οφείλει τήν ονομασία της στό ότι εμπεριέχει τήν οικεία μέθοδο απόδειξης ιδιοτήτων τών φυσικών με επαγωγή: Εάν $\phi(x)$ είναι μία ιδιότητα φυσικών αριθμών, από μία απόδειξη c_0 τής $\phi(0)$ και μία απόδειξη $c_{\mathsf{s}}(x,y)$ τής $\phi(\mathsf{s}(x))$ από τήν $\phi(x)$ λαμβάνουμε, μέσω τού μετασχηματισμού t που ορίζεται με επαγωγή από τά c_0 και c_{s}, μία απόδειξη $t(x)$ τής $\phi(x)$ για οποιονδήποτε φυσικόν αριθμό x. Αυτό είναι σκόπιμο να τό διατυπώσουμε ξεχωριστά:

Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στόν Nat: Προκειμένου να αποδείξουμε τό $C(n)$ για τόν τυχόντα φυσικόν αριθμό n, αρκεί

- να δείξουμε τό $C(0)$, και
- να δείξουμε τό $C(\mathsf{s}(n))$ από τό $C(n)$, για τυχόν n.

Η γενίκευση τού αναδρομέα για τήν αρχή τής επαγωγής ονομάζεται *επαγωγέας* και συμβολίζεται ind· για τούς φυσικούς αριθμούς, έχει τή μορφή

$$\frac{z:C(0)\qquad (x:\mathrm{Nat},y:C(x))\,w(x,y):C(\mathsf{s}(x))\qquad n:\mathrm{Nat}}{\mathsf{ind}_{\mathrm{Nat}}(z,w,n):C(n)}\,.$$

Ως παράδειγμα εφαρμογής τής αρχής τής επαγωγής, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να δείξουμε ότι η πρόσθεση φυσικών αριθμών είναι αντιμεταθετική,

$$n+m=m+n,$$

με επαγωγή στό n. Αφ' ενός έχουμε να δείξουμε ότι $0+m=m+0$, τό οποίο, δεδομένου ότι $m+0\equiv m$, γράφεται ισοδύναμα

$$0+m=m. \tag{2.4}$$

Αφ' ετέρου, έχουμε να δείξουμε ότι εάν $n+m=m+n$, τότε $\mathsf{s}(n)+m=m+\mathsf{s}(n)$, τό οποίο, δεδομένου ότι $m+\mathsf{s}(n)\equiv\mathsf{s}(m+n)$, και αξιοποιώντας τήν επαγωγική υπόθεση, γράφεται ισοδύναμα

$$\mathsf{s}(n)+m=\mathsf{s}(n+m). \tag{2.5}$$

Παρατηρήστε ότι οι σχέσεις (2.4) και (2.5) είναι οι ορίζουσες σχέσεις τής πρόσθεσης αντεστραμμένες· αυτό φαίνεται καλύτερα εάν θεσουμε $m +' n :\equiv n + m$:

$$\begin{aligned} m +' 0 &= m, \\ m +' \mathrm{s}(n) &= \mathrm{s}(m +' n). \end{aligned}$$

Αυτό που μόλις διαπιστώσαμε είναι ειδική περίπτωση τού εξής αποτελέσματος.

Θεώρημα 2.3.1 (μοναδικότητα τού definiendum)**.** *Ας θεωρήσουμε τόν αναδρομικό ορισμό*

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv c_0, \\ t(\mathrm{s}(n)) &:\equiv c_{\mathrm{s}}(n, t(n)), \end{aligned}$$

όπου $c_0 : C$ και $(n : \mathrm{Nat}, x : C)\ c_{\mathrm{s}}(n, x) : C$, και ας υποθέσουμε ότι μάς έχει δοθεί ένας μετασχηματισμός $(n : \mathrm{Nat})\ u(n) : C$ μαζί με τά εξής δεδομένα:

1. *ένα $p_0 : u(0) = c_0$, και*
2. *ένα $p_{\mathrm{s}}(n) : u(\mathrm{s}(n)) = c_{\mathrm{s}}(n, u(n))$ για κάθε $n : \mathrm{Nat}$.*

Τότε, ορίζεται μετασχηματισμός

$$(n : \mathrm{Nat})\ p(n) : u(n) = t(n).$$

Απόδειξη. Θα ορίσουμε τόν p με επαγωγή. Η μία ρήτρα τού ορισμού είναι προφανής:

$$p(0) :\equiv p_0 : u(0) = c_0 \equiv t(0). \tag{2.6}$$

Όσον αφορά τήν άλλη, εάν $p(n) : u(n) = t(n)$, τότε παίρνουμε

$$p_{\mathrm{s}}(n) : u(\mathrm{s}(n)) = c_{\mathrm{s}}(n, u(n))$$

και

$$c_{\mathrm{s}}(n, p(n)) : c_{\mathrm{s}}(n, u(n)) = c_{\mathrm{s}}(n, t(n)) \equiv t(\mathrm{s}(n))$$

(με τόν συμβολισμό που εισαγάγαμε παραπάνω για τό $c_{\mathrm{s}}(n, \_)(p(n))$), οπότε μπορούμε να επικαλεστούμε τή μεταβατικότητα τής ισότητας και να θέσουμε

$$p(\mathrm{s}(n)) :\equiv p_{\mathrm{s}}(n) \bullet c_{\mathrm{s}}(n, p(n)) : u(\mathrm{s}(n)) = t(\mathrm{s}(n)). \tag{2.7}$$

Ο p ορίστηκε με επαγωγή από τίς (2.6) και (2.7). □

Άσκηση 2.2. Συμπληρώστε τήν απόδειξη τής αντιμεταθετικότητας τής πρόσθεσης. Συγκεκριμένα, ορίστε, με επαγωγή στό m, μετασχηματισμούς

$$(m : \mathrm{Nat})\ p_0(m) : 0 + m = m$$

και

$$(n, m : \mathrm{Nat})\ p_{\mathrm{s}}(n, m) : \mathrm{s}(n) + m = \mathrm{s}(n + m)$$

και μετά εφαρμόστε τό θεώρημα 2.3.1 για να συμπεράνετε ότι $n + m = m + n$ για οποιαδήποτε $m, n : \mathrm{Nat}$.

Λύση. Για να ορίσουμε τό p_0 χρειαζόμαστε, αφ' ενός, ένα

$$p_0(0) : 0 + 0 = 0.$$

Εν τώ μεταξύ, $0 + 0 \equiv 0$, οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$p_0(0) :\equiv \mathsf{refl}_0.$$

Αφ' ετέρου, υποθέτοντας ότι έχουμε ορίσει τό $p_0(m) : 0 + m = m$, χρειαζόμαστε ένα

$$p_0(\mathsf{s}(m)) : 0 + \mathsf{s}(m) = \mathsf{s}(m).$$

Εφ' όσον $0 + \mathsf{s}(m) \equiv \mathsf{s}(0 + m)$, μπορούμε να θέσουμε

$$p_0(\mathsf{s}(m)) :\equiv \mathsf{s}(p_0(m)).$$

Για τό p_s χρειαζόμαστε, κατά πρώτον, ένα

$$p_\mathsf{s}(n, 0) : \mathsf{s}(n) + 0 = \mathsf{s}(n + 0).$$

Τά σκέλη αυτής τής ισότητας υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} \mathsf{s}(n) + 0 &\equiv \mathsf{s}(n), \\ \mathsf{s}(n + 0) &\equiv \mathsf{s}(n). \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να θέσουμε

$$p_\mathsf{s}(n, 0) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{s}(n)}.$$

Κατά δεύτερον, χρειάζεται από τό $p_\mathsf{s}(n, m) : \mathsf{s}(n) + m = \mathsf{s}(n + m)$ να ορίσουμε τό

$$p_\mathsf{s}(n, \mathsf{s}(m)) : \mathsf{s}(n) + \mathsf{s}(m) = \mathsf{s}(n + \mathsf{s}(m)).$$

Τά σκέλη αυτής τής ισότητας υπολογίζονται:

$$\begin{aligned} \mathsf{s}(n) + \mathsf{s}(m) &\equiv \mathsf{s}(\mathsf{s}(n) + m), \\ \mathsf{s}(n + \mathsf{s}(m)) &\equiv \mathsf{s}(\mathsf{s}(n + m)). \end{aligned}$$

Μπορούμε, επομένως, να θέσουμε

$$p_\mathsf{s}(n, \mathsf{s}(m)) :\equiv \mathsf{s}(p_\mathsf{s}(n, m)).$$

Εάν θεωρήσουμε ένα $m : \mathrm{Nat}$, τό ζητούμενο, $n + m = m + n$ για οποιοδήποτε $n : \mathrm{Nat}$, λαμβάνεται ως τό συμπέρασμα τού θεωρήματος 2.3.1 εάν θέσουμε

- όπου c_0 τό m,
- όπου $c_\mathsf{s}(n, x)$ τό $\mathsf{s}(x)$,
- όπου $u(n)$ τό $n + m$,
- όπου p_0 τό $p_0(m)$,
- όπου $p_\mathsf{s}(n)$ τό $p_\mathsf{s}(n, m)$. □

Άσκηση 2.3. Διατυπώστε και αποδείξτε τό ανάλογο τού θεωρήματος 2.3.1 για λίστες.

Λύση. Η μοναδικότητα τού definiendum για αναδρομές επί τού $\mathsf{List}(A)$ διατυπώνεται ως εξής: Αν θεωρήσουμε ένα $c_{\mathsf{nil}} : C$ και ένα $(x : A, y : \mathsf{List}(A), z : C)\ c_{\mathsf{cons}}(x, y, z) : C$, καθώς και έναν μετασχηματισμό $(x : \mathsf{List}(A))\ u(x) : C$ που ικανοποιεί τίς σχέσεις

1. $u(\mathsf{nil}) = c_{\mathsf{nil}}$, και
2. $u(\mathsf{cons}(a, l)) = c_{\mathsf{cons}}(a, l, u(l))$ για οποιαδήποτε $a : A$ και $l : \mathsf{List}(A)$,

τότε

$$u(l) = \mathsf{rec}_{\mathsf{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, l)$$

για όλα τά $l : \mathsf{List}(A)$.

Η ζητούμενη ισότητα θα αποδειχθεί με επαγωγή στό l. Αφ' ενός,

$$\begin{aligned} u(\mathsf{nil}) &= c_{\mathsf{nil}} \\ &\equiv \mathsf{rec}_{\mathsf{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, \mathsf{nil}). \end{aligned}$$

Αφ' ετέρου, αν υποθέσουμε ότι $u(l) = \mathsf{rec}_{\mathsf{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, l)$, τότε

$$\begin{aligned} u(\mathsf{cons}(a, l)) &= c_{\mathsf{cons}}(a, l, u(l)) \\ &= c_{\mathsf{cons}}(a, l, \mathsf{rec}_{\mathsf{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, l)) \\ &\equiv \mathsf{rec}_{\mathsf{List}(A)}(c_{\mathsf{nil}}, c_{\mathsf{cons}}, \mathsf{cons}(a, l)). \end{aligned}$$ □

2.4 Ισότητα

Έστω A τύπος. Η ισότητα τού A είναι η οικογένεια

$$(x, y : A)\ x =_A y$$

που ορίζεται από τή μοναδική ρήτρα

- για $x : A$, $\mathsf{refl}_x : x =_A x$.

Σε αντίθεση με τή βασισμένη ισότητα, η ισότητα είναι οικογένεια ως προς αμφότερα τά σκέλη, και μάλιστα ο ορισμός της είναι συμμετρικός. Κατ' επέκταση, η αναδρομή στήν ισότητα ορίζει μετασχηματισμούς προς οικογένειες εξαρτώμενες, γενικά, από δύο παραμέτρους. Αναλυτικότερα, δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x, y : A)\ C(x, y)$, και
- ενός μετασχηματισμού $(x : A)\ c_{\mathsf{refl}}(x) : C(x, x)$,

η σχέση

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c_{\mathsf{refl}}(x)$$

ορίζει τό $t(x, y, p) : C(x, y)$ για τυχόντα $x, y : A$ και $p : x = y$.

Ο αναδρομέας

$$(a, b : A, (x : A)\ c(x) : C(x, x), p : a = b)\ \mathsf{rec}^C_{a=b}(c, p) : C(a, b)$$

τής ισότητας ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\mathsf{rec}^{C}_{x=x}(c, \mathsf{refl}_x) :\equiv c(x)$$

και έχει τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{a, b : A \qquad (x : A)\, c(x) : C(x, x) \qquad p : a = b}{\mathsf{rec}^{C}_{a=b}(c, p) : C(a, b)} \ ,$$

ο οποίος μάς δίνει τόν άλλον κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C(x, x) \qquad a = b}{C(a, b)} \tag{=E}$$

τής ισότητας (με τόν περιορισμό ότι τό x δεν εμφανίζεται ελεύθερο σε ανοιχτές υποθέσεις πάνω από τό $C(x, x)$), ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι η ισότητα είναι η ελάχιστη ανακλαστική σχέση. Ειδικότερα, εφ' όσον η βασισμένη ισότητα είναι ανακλαστική σχέση, έπεται ότι η ισότητα συνεπάγεται τή βασισμένη ισότητα. Ισχύει και τό αντίστροφο.

Για τίς ανάγκες αυτής τής ενότητας, η βασισμένη ισότητα θα συμβολίζεται $=^*$. Αφ' ενός, ο (=E) μάς δίνει

$$\frac{\overline{x =^* x} \qquad a = b}{a =^* b}$$

Επαναφέροντας τή διακόσμηση παίρνουμε τό τυποθεωρητικό γεγονός

$$\frac{\mathsf{refl}^*_x : x =^* x \qquad p : a = b}{u(p) :\equiv \mathsf{rec}^{(x,y\,:\,A)\ x =^* y}_{a=b}((x : A)\ \mathsf{refl}^*_x, p) : a =^* b} \ .$$

Αφ' ετέρου, θέτοντας $C(x) :\equiv a = x$ στόν ($=^*$E), παίρνουμε τήν απαγωγή

$$\frac{\overline{a = a} \qquad a =^* b}{a = b} \ ,$$

και τό αντίστοιχο τυποθεωρητικό γεγονός

$$\frac{\mathsf{refl}_a : a = a \qquad q : a =^* b}{v(q) :\equiv \mathsf{transport}^{a=-}(q, \mathsf{refl}_a) : a = b} \ .$$

Λήμμα 2.4.1. *Η ισότητα και η βασισμένη ισότητα είναι ισοδύναμες. Συγκεκριμένα,*

1. *Για $a, b : A$ και $p : a = b$ ορίζεται $u(p) : a =^* b$.*

2. *Για $a, b : A$ και $q : a =^* b$ ορίζεται $v(q) : a = b$.*

Η ύπαρξη τών παραπάνω μετασχηματισμών u και v σημαίνει ότι οι δύο ισότητες είναι λογικώς ισοδύναμες ως προτάσεις. Ισχύει κάτι περισσότερο: Οι u και v είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

Λήμμα 2.4.2. *Για $a, b : A$, $p : a = b$, και $q : a =^* b$,*

$$v(u(p)) = p,$$
$$u(v(q)) = q.$$

Παρατηρήστε ότι εδώ έχουμε να κάνουμε με ισότητες μεταξύ στοιχείων κάποιας ισότητας. Κάθε ισότητα, εφ' όσον είναι τύπος, είναι εφοδιασμένη με τή δική της ισότητα, κι αυτό δημιουργεί μία ιεραρχία

$$a =_A b \quad p =_{a=_A b} q \quad r =_{p=_{a=_A b} q} s \quad \ldots$$

ισότήτων που δεν καταρρέει, γενικά, σε κανένα πεπερασμένο στάδιο[1].

Σύμφωνα με τό λήμμα 2.4.2, οι δύο ισότητες ταυτίζονται ως τύποι (τί ακριβώς σημαίνει αυτό θα φανεί όταν θα μιλήσουμε για univalence). Αυτή είναι μία πολύ πιο ισχυρή σχέση από τή λογική ισοδυναμία. Στά επόμενα δεν θα διακρίνουμε ανάμσα στίς δύο ισότητες· θα χρησιμοποιούμε τό σύμβολο «=» για αμφότερες, όπως κάναμε μέχρι τώρα, και όταν εννοούμε τή βασισμένη ισότητα, αυτό θα διευκρινίζεται.

Τό λήμμα αποδεικνύεται με επαγωγή στά p και q αντίστοιχα. Θα χρειαστεί να διατυπώσουμε πρώτα τίς αρχές επαγωγής τών δύο ισοτήτων. Για τήν ισότητα προς a, η αρχή τής επαγωγής έχει ως εξής: Δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x : A, p : a = x)\, C(x, p)$, και
- ενός $c_{\mathsf{refl}_a} : C(a, \mathsf{refl}_a)$,

η σχέση

$$t(a, \mathsf{refl}_a) :\equiv c_{\mathsf{refl}_a}$$

ορίζει τό $t(x, p) : C(x, p)$ για οποιαδήποτε $x : A$ και $p : a = x$.

Αυτή η αρχή μάς δίνει τή λογική *αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στή βασισμένη ισότητα*: Έστω $a : A$. Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα $C(x, p)$ για όλα τά $x : A$ και $p : a = x$, αρκεί να δείξουμε τό $C(a, \mathsf{refl}_a)$.

Η αρχή επαγωγής τής ισότητας λέει ότι, δοθέντων

- μιας οικογένειας $(x, y : A, p : x = y)\, C(x, y, p)$, και
- ενός $c_{\mathsf{refl}}(x) : C(x, x, \mathsf{refl}_x)$ για κάθε $x : A$,

η σχέση

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv c_{\mathsf{refl}}(x)$$

ορίζει τό $t(x, y, p)$ για τυχόντα $x, y : A$ και $p : x = y$.

Και αυτή η αρχή μάς οδηγεί σε μία *αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στήν ισότητα*: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα $C(x, y, p)$ για όλα τά $x, y : A$ και $p : x = y$, αρκεί να δείξουμε τό $C(x, x, \mathsf{refl}_x)$ για τυχόν $x : A$.

Απόδειξη τού λήμματος 2.4.2. Για τήν πρώτη ισότητα, έχουμε να δείξουμε τό

$$C(a, b, p) :\equiv \mathsf{transport}^{a=-}(\mathsf{rec}^{(x,y\,:\,A)\; x=^* y}_{a=b}((x : A)\, \mathsf{refl}^*_x, p), \mathsf{refl}_a) = p.$$

[1] Κάποια στιγμή είχε εικαστεί ή υποτεθεί ότι αυτός ο πύργος ισοτήτων (πρέπει να) καταρρέει αμέσως· η σχετική αρχή, που ακούει στό όνομα *uniqueness of identiny proofs (UIP)*, και είναι ισοδύναμη με τήν υπόθεση ότι κάθε τύπος είναι σύνολο, έρχεται σε σύγκρουση με τό univalence, αλλά είναι συνεπής με τή θεωρία τύπων τού Martin-Löf.

για όλα τά $a, b : A$ και $p : a = b$. Από τήν αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στήν ισότητα, αρκεί να δείξουμε τό

$$\begin{aligned} C(a, a, \mathsf{refl}_a) &\equiv \mathsf{transport}^{a=-}(\mathsf{rec}_{a=a}^{(x,y:A)\, x=^* y}((x:A)\, \mathsf{refl}_x^*, \mathsf{refl}_a), \mathsf{refl}_a) = \mathsf{refl}_a \\ &\equiv \mathsf{transport}^{a=-}(\mathsf{refl}_a^*, \mathsf{refl}_a) = \mathsf{refl}_a \\ &\equiv \mathsf{refl}_a = \mathsf{refl}_a, \end{aligned}$$

για τυχόν $a : A$, τό οποίο, βεβαίως, ισχύει. Η άλλη ισότητα αποδεικνύεται ομοίως. □

2.5 Ασκήσεις

Άσκηση 2.4. Δείξτε ότι η συνένωση λιστών είναι προσεταιριστική, περιγράφοντας, για οποιαδήποτε $l, k, j : \mathrm{List}(A)$, ένα στοιχείο τού τύπου

$$(l + k) + j = l + (k + j).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό l.]

Λύση. Θα ορίσουμε, με επαγωγή στό l, έναν μετασχηματισμό

$$(l, k, j : \mathrm{List}(A))\ t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j).$$

Κατά πρώτον, πρέπει να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{nil}, k, j) : (\mathsf{nil} + k) + j = \mathsf{nil} + (k + j).$$

Από τόν ορισμό τής συνένωσης, όμως, παρατηρούμε ότι

$$(\mathsf{nil} + k) + j \equiv k + j \equiv \mathsf{nil} + (k + j),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{nil}, k, j) :\equiv \mathsf{refl}_{k+j}.$$

Κατά δεύτερον, ας υποθέσουμε ότι έχουμε τό $t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j)$, και θέλουμε να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{cons}(a, l), k, j) : (\mathsf{cons}(a, l) + k) + j = \mathsf{cons}(a, l) + (k + j).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών αυτής τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned} (\mathsf{cons}(a, l) + k) + j &\equiv \mathsf{cons}(a, (l + k)) + j \\ &\equiv \mathsf{cons}(a, (l + k) + j), \\ \mathsf{cons}(a, l) + (k + j) &\equiv \mathsf{cons}(a, l + (k + j)). \end{aligned}$$

Εφ' όσον $t(l, k, j) : (l + k) + j = l + (k + j)$, τό λήμμα 2.2.3 μάς δίνει ένα στοιχείο

$$\mathsf{cons}(a, t(l, k, j)) : \mathsf{cons}(a, (l + k) + j) = \mathsf{cons}(a, l + (k + j)),$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{cons}(a, l), k, j) :\equiv \mathsf{cons}(a, t(l, k, j)).$$ □

Άσκηση 2.5. Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x:A)u(x):B$, περιγράψτε, για οποιαδήποτε $l,k:\mathrm{List}(A)$, ένα στοιχείο τού τύπου

$$\mathrm{List}(u)(l+k) = \mathrm{List}(u)(l) + \mathrm{List}(u)(k).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό l.]

Λύση. Αφ' ενός, έχουμε να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{nil}_A, k) : \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A + k) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A) + \mathrm{List}(u)(k).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών αυτής τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned}\mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A + k) &\equiv \mathrm{List}(u)(k),\\ \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A) + \mathrm{List}(u)(k) &\equiv \mathsf{nil}_B + \mathrm{List}(u)(k)\\ &\equiv \mathrm{List}(u)(k),\end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{nil}_A, k) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathrm{List}(u)(k)}.$$

Αφ' ετέρου, έχουμε τό $t(l,k) : \mathrm{List}(u)(l+k) = \mathrm{List}(u)(l) + \mathrm{List}(u)(k)$ και χρειαζόμαστε τό $t(\mathsf{cons}_A(a,l),k) : \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a,l)+k) = \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a,l)) + \mathrm{List}(u)(k)$. Οι υπολογισμοί τών σκελών τής τελευταίας ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned}\mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a,l)+k) &\equiv \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a,l+k))\\ &\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), \mathrm{List}(u)(l+k)),\\ \mathrm{List}(u)(\mathsf{cons}_A(a,l)) + \mathrm{List}(u)(k) &\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), \mathrm{List}(u)(l)) + \mathrm{List}(u)(k)\\ &\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), \mathrm{List}(u)(l) + \mathrm{List}(u)(k)),\end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{cons}_A(a,l),k) :\equiv \mathsf{cons}_B(u(a), t(l,k)).$$ □

Άσκηση 2.6 (Φυσικότητα τού cat)**.** Δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x:A)\,u(x):B$, δείξτε ότι, για οποιαδήποτε λίστα $L:\mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$,

$$\mathrm{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)) = \mathrm{List}(u)(\mathrm{cat}(L)).$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό L. Χρησιμοποιήστε τήν προηγούμενη άσκηση.]

Λύση. Θα ορίσουμε, με επαγωγή στό L, ένα

$$t(L) : \mathrm{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)) = \mathrm{List}(u)(\mathrm{cat}(L))$$

για οποιαδήποτε λίστα $L:\mathrm{List}(\mathrm{List}(A))$. Αφ' ενός, έχουμε να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)}) : \mathrm{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)})) = \mathrm{List}(u)(\mathrm{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)})).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών τής ισότητας δίνουν

$$\begin{aligned}\mathrm{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)})) &\equiv \mathrm{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(B)})\\ &\equiv \mathsf{nil}_B,\\ \mathrm{List}(u)(\mathrm{cat}(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)})) &\equiv \mathrm{List}(u)(\mathsf{nil}_A)\\ &\equiv \mathsf{nil}_B,\end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{nil}_{\mathrm{List}(A)}) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{nil}_B}.$$

Αφ' ετέρου, έχουμε τό

$$t(L) : \mathrm{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)) = \mathrm{List}(u)(\mathrm{cat}(L))$$

και χρειαζόμαστε να ορίσουμε τό

$$t(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L)) : \mathrm{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L))) = \mathrm{List}(u)(\mathrm{cat}(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L))). \tag{$*$}$$

Εν τω μεταξύ, από τήν προηγούμενη άσκηση έχουμε ένα

$$w : \mathrm{List}(u)(l + \mathrm{cat}(L)) = \mathrm{List}(u)(l) + \mathrm{List}(u)(\mathrm{cat}(L)).$$

Οι υπολογισμοί τών σκελών τής ($*$) δίνουν

$$\begin{aligned} \mathrm{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L))) &\equiv \mathrm{cat}(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(B)}(\mathrm{List}(u)(l), \mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L))) \\ &\equiv \mathrm{List}(u)(l) + \mathrm{cat}(\mathrm{List}(\mathrm{List}(u))(L)), \\ \mathrm{List}(u)(\mathrm{cat}(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L))) &\equiv \mathrm{List}(u)(l + \mathrm{cat}(L)), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$t(\mathsf{cons}_{\mathrm{List}(A)}(l, L)) :\equiv (\mathrm{List}(u)(l) + t(L)) \bullet w^{-1}.$$ □

Άσκηση 2.7. Έστω $(x : A)\, B(x)$ οικογένεια. Δείξτε ότι, για $p : x = y$ και $q : y = z$ στόν A, η μεταφορά κατά μήκος τού $p \bullet q$ ισούται με τή σύνθεση τών μεταφορών κατά μήκος τών p και q: Για $w : B(x)$,

$$\mathsf{transport}^B(p \bullet q, w) = \mathsf{transport}^B(q, \mathsf{transport}^B(p, w)).$$

Λύση. Θα κάνουμε επαγωγή στά p και q. Θεωρούμε τήν οικογένεια

$$(x, y : A, p : x = y, z : A, q : y = z)\, C(x, y, p, z, q),$$

όπου

$$C(x, y, p, z, q) :\equiv (\mathsf{transport}^B(p \bullet q, w) = \mathsf{transport}^B(q, \mathsf{transport}^B(p, w))).$$

Έχουμε

$$\mathsf{transport}^B(\mathsf{refl}_x \bullet \mathsf{refl}_x, w) \equiv \mathsf{transport}^B(\mathsf{refl}_x, w) \equiv w$$

και

$$\mathsf{transport}^B(\mathsf{refl}_x, \mathsf{transport}^B(\mathsf{refl}_x, w)) \equiv w,$$

οπότε

$$\mathsf{refl}_w : C(x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x).$$

Μπορούμε, επομένως, να ορίσουμε ένα

$$u(x, z, q) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q)$$

μέσω τής επαγωγής

$$u(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_w.$$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τό επιθυμητό

$$v(x, y, p, z, q) : C(x, y, p, z, q)$$

μέσω τής επαγωγής

$$v(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q) :\equiv u(x, z, q). \qquad \square$$

Κεφάλαιο 3

Θεωρία τύπων τού Martin-Löf: Τά βασικά

Στό προηγούμενο κεφάλαιο εισαγάγαμε οικογένειες τύπων, δηλαδή κατηγορήματα, και ορίσαμε τήν ισότητα σαν ένα τέτοιο κατηγόρημα. Στό κεφάλαιο αυτό, θα πραγματευτούμε τά τυποθεωρητικά ανάλογα τών λογικών συνδέσμων.

3.1 Γινόμενα

Σύμφωνα με τήν ερμηνεία Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK), ένα τεκμήριο αλήθειας τής σύζευξης $\phi_1 \wedge \phi_2$ δύο προτάσεων ϕ_1 και ϕ_2 αποτελείται από ένα τεκμήριο αλήθειας τής ϕ_1 και ένα τής ϕ_2.

Ο τύπος που αντιστοιχεί στή σύζευξη δύο προτάσεων είναι ο τύπος τών *ζευγών*, ή *(καρτεσιανό) γινόμενο* δύο τύπων: Δοθέντων δύο τύπων A_1 και A_2, τό γινόμενο $A_1 \times A_2$ έχει τόν κατασκευαστή (διατεταγμένο ζεύγος)

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ \mathsf{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2,$$

ή, υπό μορφήν κανόνα σχηματισμού,

$$\frac{x_1 : A_1 \qquad x_2 : A_2}{\mathsf{pair}(x_1, x_2) : A_1 \times A_2}\ .$$

Αν αφαιρέσουμε τά στοιχεία και μεταβούμε σέ λογικό συμβολισμό, παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής τής σύζευξης,

$$\frac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_1 \wedge \phi_2}\ . \tag{$\wedge$I}$$

που εκφράζει τό στοιχειώδες λογικό γεγονός ότι από δύο προτάσεις μπορούμε να συμπεράνουμε τή σύζευξή τους. Ο κανόνας αυτός ονομάζεται *κανόνας εισαγωγής (introduction rule)* τής σύζευξης, διότι περιγράφει τόν (κανονικό) τρόπο με τόν οποίο μία σύζευξη εμφανίζεται ως συμπέρασμα μιας απόδειξης.

Η αρχή αναδρομής τού γινομένου λέει ότι, δοθέντων ενός τύπου C και ενός μετασχηματισμού $(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\ c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2) : C$, η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) :\equiv c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2)$$

ορίζει τό $t(x) : C$ για οποιοδήποτε $x : A_1 \times A_2$. Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$\frac{(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\, z(x_1, x_2) : C \qquad x : A_1 \times A_2}{\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}(z, x) : C}\ ,$$

οριζόμενο από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}(z, \mathsf{pair}(x_1, x_2)) :\equiv z(x_1, x_2).$$

Εάν από τόν κανόνα σχηματισμού τού $\mathsf{rec}_{A_1 \times A_2}$ παραλείψουμε τά στοιχεία και μεταβούμε σε λογικό συμβολισμό, παίρνουμε τόν κανόνα απαγωγής

$$\frac{\begin{array}{c}(\phi_1, \phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi_1 \wedge \phi_2}{\theta}\ , \tag{$\wedge$E}$$

ο οποίος εκφράζει τόν τρόπο με τόν οποίο μία σύζευξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υπόθεση, και γι' αυτό λέγεται *κανόνας απαλοιφής (elimination rule)* τής σύζευξης.

3.2 Αθροίσματα

Σύμφωνα με τήν BHK, τεκμήρια αλήθειας τής διάζευξης $\phi_1 \vee \phi_2$ δύο προτάσεων ϕ_1 και ϕ_2 είναι τά τεκμήρια αλήθειας τής ϕ_1, καθώς και εκείνα τής ϕ_2.

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τής διάζευξης είναι τό *άθροισμα* $A_1 + A_2$ δύο τύπων A_1 και A_2, τό οποίο έχει τούς κατασκευαστές

1. εάν $x_1 : A_1$, τότε $\mathsf{in}_1(x_1) : A_1 + A_2$,
2. εάν $x_2 : A_2$, τότε $\mathsf{in}_2(x_2) : A_1 + A_2$,

οι οποίοι γράφονται ως κανόνες στή μορφή

$$\frac{x_1 : A_1}{\mathsf{in}_1(x_1) : A_1 + A_2} \qquad\qquad \frac{x_2 : A_2}{\mathsf{in}_2(x_2) : A_1 + A_2}\ .$$

και από τούς οποίους παίρνουμε τούς κανόνες εισαγωγής

$$\frac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \qquad\qquad \frac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2} \tag{$\vee$I}$$

τής διάζευξης, οι οποίοι εκφράζουν τό γεγονός ότι μπορούμε να συμπεράνουμε μία διάζευξη από εκάτερη τών διαζευκτέων.

Η αρχή τής αναδρομής για τή διάζευξη έχει ως εξής: Δοθέντων ενός τύπου C και δύο μετασχηματισμών $(x_1 : A_1)\, c_{\mathsf{in}_1}(x_1) : C$ και $(x_2 : A_2)\, c_{\mathsf{in}_2}(x_2) : C$, οι σχέσεις

$$t(\mathsf{in}_1(x_1)) :\equiv c_{\mathsf{in}_1}(x_1),$$
$$t(\mathsf{in}_2(x_2)) :\equiv c_{\mathsf{in}_2}(x_2)$$

ορίζουν έναν μετασχηματισμό $(x : A_1 + A_2)\, t(x) : C$. Ο αναδρομέας τής διάζευξης έχει τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{(x_1 : A_1)\, z_1(x_1) : C \qquad (x_2 : A_2)\, z_2(x_2) : C \qquad x : A_1 + A_2}{\mathsf{rec}_{A_1 + A_2}(z_1, z_2, x) : C}$$

και ορίζεται από τίς σχέσεις

$$\mathsf{rec}_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_1(x_1)) :\equiv z_1(x_1),$$
$$\mathsf{rec}_{A_1+A_2}(z_1, z_2, \mathsf{in}_2(x_2)) :\equiv z_2(x_2).$$

Από τόν $\mathsf{rec}_{A_1+A_2}$ παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής τής διάζευξης

$$\frac{\begin{matrix}(\phi_1) \\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\phi_2) \\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \qquad \phi_1 \vee \phi_2}{\theta}, \tag{$\vee$E}$$

ο οποίος περιγράφει τήν απόδειξη με διάκριση περιπτώσεων.

3.3 Τύποι συναρτήσεων

Σύμφωνα με τήν BHK, ένα τεκμήριο αλήθειας τής συνεπαγωγής $\phi \supset \psi$ δύο προτάσεων ϕ και ψ είναι μία διαδικασία που μετασχηματίζει οποιοδήποτε τεκμήριο αλήθειας τής ϕ σε ένα τής ψ.

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τής συνεπαγωγής είναι ο τύπος $A \to B$ τών συναρτήσεων από τόν τύπο A στόν τύπο B, με κατασκευαστή (συναρτησιακή αφαίρεση ή λ-αφαίρεση)

- Για μετασχηματισμό $(x:A)\, b(x):B$, $\lambda(b):A \to B$.

Η ιδιαιτερότητα τού τύπου τών συναρτήσεων είναι ότι έχει έναν κατασκευαστή, τή *συναρτησιακή αφαίρεση ή λ-αφαίρεση*, τό όρισμα τού οποίου είναι μετασχηματισμός. Αυτό αντανακλάται και στόν κανόνα σχηματισμού του, ο οποίος έχει τή μορφή

$$\frac{(x:A)\, b(x):B}{\lambda(b):A \to B}.$$

Από τόν κανόνα αυτόν παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\begin{matrix}(\phi) \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \supset \psi} \tag{$\supset$I}$$

τής συνεπαγωγής, ο οποίος, σε άλλες διατυπώσεις τής λογικής, είναι γνωστός ως θεώρημα απαγωγής.

Η αρχή αναδρομής τού $A \to B$ λέει ότι, δοθέντων τύπου C και μετασχηματισμού $((x:A)\, y(x):B)\, c_\lambda(y):C$, η σχέση

$$t(\lambda(b)) :\equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει τό $t(f):C$ για τυχούσα συνάρτηση $f:A \to B$.

Ο αναδρομέας

$$\frac{((x:A)\, y(x):B)\, z(y):C \qquad f:A \to B}{\mathsf{rec}_{A\to B}(z, f):C}$$

τού $A \to B$ ορίζεται από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{A\to B}(z, \lambda(b)) :\equiv z(b),$$

και δίνει τόν κανόνα

$$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{\phi}{\psi}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi \supset \psi}{\theta} \quad (\supset\mathrm{E})$$

απαλοιφής τής συνεπαγωγής. Αν συμβολίσουμε $\Sigma \vdash \theta$ τό γεγονός ότι η θ έπεται (είναι λογική συνέπεια) τών προτάσεων και κανόνων που ανήκουν στό σύνολο Σ, ο $(\supset E)$ λέει ότι εάν $\Sigma \cup \{\frac{\phi}{\psi}\} \vdash \theta$, τότε $\Sigma \cup \{\phi \supset \psi\} \vdash \theta$.

3.4 Ο τύπος 0

Κατά τήν BHK, τό ψευδές F δεν έχει τεκμήρια αλήθειας.

Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τού ψευδούς είναι ο τύπος $\mathbf{0}$ που δεν έχει κανέναν κατασκευαστή. Κατά συνέπεια, τό ψευδές δεν έχει κανόνες εισαγωγής. Η αρχή τής αναδρομής για τόν $\mathbf{0}$ μάς δίνει έναν μετασχηματισμό $(x:\mathbf{0})\, t(x) : C$ για κάθε τύπο C, που είναι και ο αναδρομέας του,

$$\frac{x:\mathbf{0}}{\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}(x):C}\ .$$

Αντίστοιχα, ο κανόνας απαλοιφής τού ψευδούς είναι ο

$$\frac{\mathsf{F}}{\theta}\ , \quad (\mathsf{F}\mathrm{E})$$

γνωστός και ως ex falso (sequitur) quodlibet.

3.5 Ο τύπος 1

Τό αληθές T δεν είναι και τόσο χρήσιμο στη λογική. Είναι, όμως, χρήσιμο στή θεωρία τύπων. Σύμφωνα με τήν BHK, η πρόταση T έχει ένα τεκμήριο αλήθειας. Ο αντίστοιχος τύπος είναι ο $\mathbf{1}$, που έχει τόν κατασκευαστή

- $! : \mathbf{1}$,

ο οποίος δίνει τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{}{\mathsf{T}} \quad (\mathsf{T}\mathrm{I})$$

τού αληθούς, που λέει, απλώς, ότι η πρόταση T αληθεύει.

Προκειμένου να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό τών στοιχείων τού $\mathbf{1}$ δεν έχουμε παρά να πούμε πώς αυτός δρα στό μοναδικό στοιχείο ! αυτού· αυτό ακριβώς εκφράζεται από τήν αρχή αναδρομής τού αληθούς: Δοθέντος ενός $c_! : C$, η σχέση

$$t(!) :\equiv c_!$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(x:\mathbf{1})\, t(x):C$. Έτσι και ο αναδρομέας

$$\frac{x:C \qquad y:\mathbf{1}}{\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}(x,y):C}$$

τού **1** ορίζεται από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}(x,!) :\equiv x.$$

Από τόν κανόνα αυτόν παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής τού αληθούς

$$\frac{\theta \qquad \top}{\theta}\ . \tag{$\top$E}$$

3.6 Ειδικοί κανόνες απαλοιφής

Εάν ένας σύνδεσμος έχει ακριβώς έναν κανόνα εισαγωγής, ο μοναδικός αυτός κανόνας εισαγωγής μπορεί επίσης να διαβαστεί από κάτω προς τά επάνω. Τά προϊόντα αυτής τής αντιστροφής λέγονται *ειδικοί (special) κανόνες απαλοιφής* (και, ενίοτε, για αντιδιαστολή, οι άλλοι κανόνες απαλοιφής ονομάζονται *γενικοί*). Προκειμένου για τή σύζευξη, αυτοί είναι οι

$$\frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_1} \qquad\qquad \frac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_2}\ . \tag{$\wedge$S}$$

Για τή συνεπαγωγή έχουμε τόν κανόνα

$$\frac{\phi \supset \psi \qquad \phi}{\psi}\ , \tag{$\supset$S}$$

γνωστό και ως modus ponens. Τέλος, για τό αληθές έχουμε μηδέν τό πλήθος ειδικούς κανόνες απαλοιφής.

Για καθέναν από τούς τρεις παραπάνω συνδέσμους, οι ειδικοί κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι με τόν (γενικό) κανόνα απαλοιφής· αυτό είναι απόρροια τών ακόλουθων γενικότερων διαπιστώσεων που αφορούν τά τυποθεωρητικά ανάλογα τών συνδέσμων αυτών.

Για τό γινόμενο, θεωρούμε τούς μετασχηματισμούς (προβολές)

$$\frac{x:A_1 \times A_2}{\mathsf{pr}_1(x):A_1} \qquad\qquad \frac{x:A_1 \times A_2}{\mathsf{pr}_2(x):A_2}$$

που ορίζονται μέσω τών αναδρομών

$$\mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(a_1,a_2)) :\equiv a_1,$$
$$\mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(a_1,a_2)) :\equiv a_2.$$

Όπως και κάθε άλλος μετασχηματισμός που ορίζεται με αναδρομή, οι προβολές μπορούν να εκφραστούν με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού γινομένου· αντιστρόφως, ο $\mathsf{rec}_{A_1\times A_2}$ ορίζεται από τούς pr_1 και pr_2 μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{rec}_{A_1\times A_2}(z,x) :\equiv z(\mathsf{pr}_1(x),\mathsf{pr}_2(x)).$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιείται η ορίζουσα σχέση τού αναδρομέα:

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}_{A_1\times A_2}(z,\mathsf{pair}(x_1,x_2)) &\equiv z(\mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(x_1,x_2)),\mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(x_1,x_2)))\\ &\equiv z(x_1,x_2).\end{aligned}$$

Για τόν τύπο τών συναρτήσεων, θεωρούμε τόν μετασχηματισμό (εφαρμογή συνάρτησης σε όρισμα)

$$\frac{f:A\to B \qquad x:A}{\mathsf{apply}_f(x):B}$$

που ορίζεται μέσω τής αναδρομής

$$\mathsf{apply}_{\lambda(b)}(x) :\equiv b(x).$$

Ο $\mathsf{rec}_{A\to B}$ ορίζεται από τόν apply μέσω τής σχέσης

$$\mathsf{rec}_{A\to B}(z,f) :\equiv z(\mathsf{apply}_f).$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιείται η ορίζουσα σχέση τού αναδρομέα:

$$\begin{aligned}\mathsf{rec}_{A\to B}(z,\lambda(b)) &\equiv z(\mathsf{apply}_{\lambda(b)})\\ &\equiv z(b).\end{aligned}$$

Για τόν τύπο $\mathbf{1}$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο $\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}$ ορίζεται και χωρίς αναδρομή:

$$\mathsf{rec}_{\mathbf{1}}(x,y) :\equiv x.$$

Αυτό αντανακλά τό λογικό γεγονός ότι ο κανόνας απαλοιφής τού αληθούς δεν παράγει νέες αποδείξιμες προτάσεις.

3.7 Εξαρτώμενα αθροίσματα

Σύμφωνα με τήν BHK, ένα τεκμήριο αλήθειας τής $\exists(x:A)\,\phi(x)$, όπου A τό πεδίο διακύμανσης τής μεταβλητής x, αποτελείται από ένα στοιχείο a τού A και ένα τεκμήριο αλήθειας τού $\phi(a)$.

Ο τύπος που αντιστοιχεί στήν υπαρκτική ποσόδειξη είναι τό εξαρτώμενο άθροισμα: Εάν έχουμε μία οικογένεια τύπων $(x:A)B(x)$, μπορούμε επίσης να σχηματίζουμε ζέυγη $\mathsf{pair}(a,b)$ με $a:A$ και $b:B(a)$. Με άλλα λόγια, ο τύπος τής δεύτερης συντεταγμένης μπορεί να εξαρτάται από τήν πρώτη. Αυτά τά ζεύγη, τά οποία ενίοτε καλούνται *εξαρτώμενα* ζεύγη, συγκροτούν έναν τύπο $\sum(B)$, τό *(εξαρτώμενο) άθροισμα* τής οικογένειας $(x:A)\,B(x)$, με κατασκευαστή

$$\frac{x:A \qquad y:B(x)}{\mathsf{pair}(x,y):\sum(B)}\ .$$

Παρατηρήστε ότι, εάν η $(x:A)\,B(x)$ είναι σταθερή, δηλαδή ο $B(x)$ δεν εξαρτάταοι από τό x αλλά είναι ένας μεμονομένος τύπος B, αυτό που παίρνουμε από τόν ορισμό είναι τό $A\times B$. Με άλλα λόγια, τό εξαρτώμενο άθροισμα είναι γενίκευση τού καρτεσιανού γινομένου. Αυτό αιτιολογεί και τή χρήση τού ίδιου συμβόλου για τούς δύο κατασκευαστές.

Αντίστοιχα έχουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\phi(a)}{\exists(x:A)\,\phi(x)}\ , \tag{$\exists$I}$$

τού υπαρκτικού ποσοδείκτη, ο οποίος μάς λέει ότι από τήν $\phi(a)$ για κάποιο a μπορούμε να συμπεράνουμε τήν $\exists(x:A)\,\phi(x)$.

Η αρχή τής αναδρομής τού εξαρτώμενου αθροίσματος λέει ότι, δοθέντος ενός μετασχηματισμού $(x:A, y:B(x))\, c_{\mathsf{pair}}(x,y):C$, η σχέση

$$t(\mathsf{pair}(a,b)) :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a,b)$$

ορίζει έναν μετασχηματισμό $(w:\sum(B))\; t(w):C$. Η αρχή αυτή συνοψίζεται σε έναν αναδρομέα

$$\frac{(x:A, y:B(x))\; z(x,y):C \qquad w:\sum(B)}{\mathsf{rec}_{\sum(B)}(z,w):C}\ ,$$

οριζόμενο από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{\sum(B)}(z, \mathsf{pair}(a,b)) :\equiv z(a,b).$$

Από τόν κανόνα σχηματισμού τού αναδρομέα τού εξαρτώμενου γινομένου παίρνουμε τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\begin{array}{c}(\phi(x))\\ \vdots\\ \theta\end{array} \qquad \exists(x:A)\,\phi(x)}{\theta} \tag{$\exists$E}$$

τού υπαρκτικού ποσοδείκτη (με τόν περιορισμό ότι τό x δεν εμφανίζεται (ελεύθερο) σε (ανοιχτές) υποθέσεις πάνω από τό θ).

3.8 Εξαρτώμενα γινόμενα

Η ρήτρα τής BHK για τόν καθολικό ποσοδείκτη έχει ως εξής: Ένα τεκμήριο αλήθειας τής πρότασης $\forall(x:A)\,\phi(x)$ είναι μία διαδικασία που μετασχηματίζει τό τυχόν στοιχείο a τού A σε ένα τεκμήριο αλήθειας τής $\phi(a)$.

Η αντίστοιχη τυποθεωρητική έννοια είναι τό εξαρτώμενο γινόμενο. Κατ' αρχάς, παρατηρήστε ότι τά στοιχεία ενός τύπου είναι δυνατόν να μετασχηματίζονται σε στοιχεία διαφορετικών στιγμιοτύπων μιας οικογένειας. Τέτοια είναι η περίπτωση με τούς μετασχηματισμούς που ορίζονται με αναδρομή στήν ισότητα (και σε οποιαδήποτε άλλη μη τετριμμένη οικογένεια), καθώς και με τούς επαγωγείς τών διαφόρων τύπων. Σε έναν τέτοιο μετασχηματισμό $(x:A)\,b(x):B(x)$ αντιστοιχεί μία συνάρτηση f με $f(x):B(x)$ για $x:A$. Οι συναρτήσεις με αυτή τή γενικότερη έννοια, οι οποίες λέγονται και «εξαρτώμενες» συναρτήσεις, συγκροτούν έναν τύπο, τό *(εξαρτώμενο) γινόμενο* $\prod(B)$ τής οικογένειας $(x:A)\;B(x)$, ο οποίος έχει τόν κατασκευαστή

$$\frac{(x:A)\,b(x):B(x)}{\lambda(b):\prod(B)}\ .$$

Είναι φανερό από τήν περιγραφή τού $\prod(B)$ ότι ο $A \to B$ είναι η ειδική περίπτωση στήν οποία η οικογένεια $(x:A)\,B(x)$ είναι σταθερή.

Από τόν παραπάνω κανόνα παίρνουμε τόν κανόνα εισαγωγής

$$\frac{\phi(x)}{\forall\,(x:A)\,\phi(x)} \tag{$\forall$I}$$

τού καθολικού ποσοδείκτη (με τόν περιορισμό ότι τό x δεν εμφανίζεται σε υποθέσεις πάνω από τό $\phi(x)$), ο οποίος λέει ότι από μία απόδειξη τής $\phi(x)$ για τυχόν $x : A$ μπορούμε να συμπεράνουμε τήν $\forall\,(x:A)\,\phi(x)$.

Η αρχή τής αναδρομής για τό εξαρτώμενο γινόμενο είναι επίσης γενίκευση τής αντίστοιχης αρχής για τόν τύπο τών συναρτήσεων: Δοθέντος μετασχηματισμού

$$((x:A)\,y(x):B(x))\,c_\lambda(y):C,$$

η σχέση

$$t(\lambda(x:A)\,b(x)) :\equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει μετασχηματισμό $(f:\prod(B))\,t(f):C$. Ο αναδρομέας

$$\frac{((x:A)\,b(x):B(x))\,z(x:A)\,b(x):C \qquad f:\prod(B)}{\mathsf{rec}_{\prod(B)}(z,f):C}$$

τού εξαρτώμενου γινομένου ορίζεται από τή σχέση

$$\mathsf{rec}_{\prod(B)}(z,\lambda(b)) :\equiv z(b),$$

και δίνει τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\begin{matrix}\left(\dfrac{x:A}{\phi(x)}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{matrix} \qquad \forall\,(x:A)\,\phi(x)}{\theta}\;. \tag{$\forall$E}$$

τού καθολικού ποσοδείκτη.

Ο καθολικός ποσοδείκτης έχει επίσης έναν ειδικό κανόνα απαλοιφής

$$\frac{\forall\,(x:A)\,\phi(x)}{\phi(a)}\;, \tag{$\forall$S}$$

ο οποίος, όπως και στήν περίπτωση τής συνεπαγωγής, λαμβάνεται από τόν κανόνα σχηματισμού

$$\frac{f:\prod(B) \qquad x:A}{\mathsf{apply}_f(x):B(x)}$$

τού μετασχηματισμού apply που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\mathsf{apply}_{\lambda(b)}(x) :\equiv b(x).$$

Και πάλι, οι δύο κανόνες απαλοιφής είναι ισοδύναμοι συνεπεία τού εναλλακτικού ορισμού

$$\mathsf{rec}_{\prod(B)}(z,f) :\equiv z(\mathsf{apply}_f)$$

τού αναδρομέα τού εξαρτώμενου γινομένου.

Όλοι οι κανόνες φυσικής απαγωγής βρίσκονται συγκεντρωμένοι στόν πίνακα 3.1.

	Κανόνες εισαγωγής	Κανόνες απαλοιφής	(Ειδικοί)
$\wedge$	$\dfrac{\phi_1 \qquad \phi_2}{\phi_1 \wedge \phi_2}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi_1, \phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi_1 \wedge \phi_2}{\theta}$	$\dfrac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_1} \qquad \dfrac{\phi_1 \wedge \phi_2}{\phi_2}$
$\vee$	$\dfrac{\phi_1}{\phi_1 \vee \phi_2} \qquad \dfrac{\phi_2}{\phi_1 \vee \phi_2}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi_1)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\phi_2)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi_1 \vee \phi_2}{\theta}$	
$\supset$	$\dfrac{\begin{array}{c}(\phi)\\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \supset \psi}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{\phi}{\psi}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \phi \supset \psi}{\theta}$	$\dfrac{\phi \supset \psi \qquad \phi}{\psi}$
F		$\dfrac{\mathsf{F}}{\theta}$	
T	$\dfrac{}{\mathsf{T}}$	$\dfrac{\theta \qquad \mathsf{T}}{\theta}$	$\varnothing$
$\exists$	$\dfrac{a : A \qquad \phi(a)}{\exists (x : A)\, \phi(x)}$	$\dfrac{\begin{array}{c}(x : A, \phi(x))\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \exists (x : A)\, \phi(x)}{\theta}$	
$\forall$	$\dfrac{\begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots \\ \phi(x)\end{array}}{\forall (x : A)\, \phi(x)}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\left(\dfrac{x : A}{\phi(x)}\right)\\ \vdots \\ \theta\end{array} \qquad \forall (x : A)\, \phi(x)}{\theta}$	$\dfrac{\forall (x : A)\, \phi(x) \qquad a : A}{\phi(a)}$
$=$	$\dfrac{}{a = a}$	$\dfrac{b : A \qquad \phi(a) \qquad a = b}{\phi(b)}$	

Πίνακας 3.1: Κανόνες φυσικής απαγωγής

3.9 Αρχές επαγωγής

Μέχρι σττιγμής, περιγράψαμε κάποιους τύπους και είδαμε πώς οι κατασκευαστές τους αντιστοιχούν σε κανόνες εισαγωγής κάποιων προτάσεων και οι αναδρομείς τους σε κανόνες απαλοιφής τών ίδιων προτάσεων.

Οι τύποι συνοδεύονται επίσης από αρχές επαγωγής. Οι αρχές αυτές έχουν οργανικό ρόλο στή θεωρία τύπων, αλλά δεν αντανακλώνται στή φυσική απαγωγή. Θα συζητήσουμε τώρα τίς αρχές επαγωγής τών τύπων που παρουσιάσαμε (πλην τού αθροίσματος). Με τό ερώτημα τής (απουσίας) λογικής ερμηνείας αυτών θα καταπιαστούμε αργότερα (κεφάλαιο 6).

Οι αρχές επαγωγής τών τύπων είναι ευθείες γενικεύσεις τών αρχών αναδρομής τους. Η αρχή επαγωγής τού $A \to B$ διατυπώνεται ως εξής: Δοθέντων

- οικογένειας $(f : A \to B)\, C(f)$, και
- μετασχηματισμού $((x : A)\, b(x) : B)\, c_\lambda(b) : C(\lambda(b))$,

η σχέση

$$t(\lambda(b)) :\equiv c_\lambda(b)$$

ορίζει μετασχηματισμό

$$(f : A \to B)\, t(f) : C(f).$$

Η αρχή αυτή συνοψίζεται στόν επαγωγέα

$$\frac{((x : A)\; y(x) : B)\; z(y) : C(\lambda(y)) \qquad f : A \to B}{\mathsf{ind}_{A\to B}(z, f) : C(f)}$$

τού $A \to B$, με ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}_{A\to B}(z, \lambda(b)) :\equiv z(b).$$

Από τήν παραπάνω αρχή επαγωγής συνάγεται η

Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στόν τύπο τών συναρτήσεων: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα τών συναρτήσεων από τόν A στόν B, αρκεί να τήν δείξουμε για συναρτήσεις τής μορφής $\lambda(x : A)\, b(x)$.

Νωρίτερα παρατηρήσαμε ότι ο αναδρομέας τού $A \to B$ είναι δυνατόν να ληφθεί από τήν εφαρμογή, μέσω τού εναλλακτικού ορισμού

$$\mathsf{rec}_{A\to B}(z, f) :\equiv z(\mathsf{apply}_f).$$

Η απόπειρα επέκτασης τού αποτελέσματος αυτού στόν επαγωγέα προσκρούει στό ότι υπάρχει ασυμφωνία τύπων:

$$\begin{aligned} z(\mathsf{apply}_f) &: C(\lambda(\mathsf{apply}_f)),\\ \mathsf{ind}_{A\to B}(z, f) &: C(f). \end{aligned}$$

Ο τρόπος να συσχετίσουμε αυτά τά δύο στιγμιότυπα τής C μάς παρέχεται από τό επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.9.1. *Για οποιαδήποτε $f : A \to B$ υπάρχει ένα*

$$\eta_{A\to B}(f) : \lambda(\mathsf{apply}_f) = f,$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση $\eta_{A\to B}(\lambda(b)) \equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στήν f· αν η f είναι τής μορφής $\lambda(b)$, τότε

$$\lambda(\mathsf{apply}_{\lambda(b)}) \equiv \lambda(b)$$

(από τόν ορισμό τού apply), οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$\eta_{A\to B}(\lambda(b)) :\equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}. \qquad \square$$

Συνοψίζοντας, έχουμε τά εξής:

$$\begin{aligned} \mathsf{apply}_{\lambda(b)} &\equiv b, \\ \lambda(\mathsf{apply}_f) &= f. \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να θέσουμε

$$\mathsf{ind}_{A\to B}(z, f) :\equiv \mathsf{transport}^C(\eta_{A\to B}(f), z(\mathsf{apply}_f)).$$

Εύκολα ελέγχθεται ότι ο ορισμός αυτός επαληθεύει τήν ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{A\to B}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{ind}_{A\to B}(z, \lambda(b)) &\equiv \mathsf{transport}^C(\eta_{A\to B}(\lambda(b)), z(\mathsf{apply}_{\lambda(b)})) \\ &\equiv \mathsf{transport}^C(\mathsf{refl}_{\lambda(b)}, z(b)) \\ &\equiv z(b). \end{aligned}$$

Πόρισμα 3.9.2. *Ο $\mathsf{ind}_{A\to B}$ είναι ορίσιμος από τούς* apply *και* $\eta_{A\to B}$. $\square$

Εξ αιτίας αυτού, η συνήθης πρακτική κατά τήν παρουσίαση τής θεωρίας τύπων είναι ο $\mathsf{ind}_{A\to B}$ να αποσιωπάται προς χάριν τών apply και $\eta_{A\to B}$. Στό εξής θα υιοθετήσουμε αυτή τήν πρακτική. Επιπλέον, θα είμαστε πιο χαλαροί όσον αφορά τή διάκριση μεταξύ συναρτήσεων και μετασχηματισμών, και θα γράφουμε $f(x)$ αντί τού $\mathsf{apply}_f(x)$, όπως είναι καθιερωμένο στά μαθηματικά.

Με αυτόν τόν συμβολισμό, ο apply_f γράφεται

$$(x : A)\ f(x).$$

Αυτά που είπαμε για συναρτήσεις ισχύουν αυτούσια και για εξαρτώμενες συναρτήσεις. Ειδικότερα, ισχύουν τά ανάλογα τού λήμματος 3.9.1 και τού πορίσματος 3.9.2:

Λήμμα 3.9.3. *Για οποιαδήποτε $f : \prod(B)$ υπάρχει ένα*

$$\eta_{\prod(B)}(f) : \lambda(x : A)\ f(x) = f,$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση $\eta_{\prod(B)}(\lambda(b)) \equiv \mathsf{refl}_{\lambda(b)}$. $\square$

Πόρισμα 3.9.4. *Ο $\mathsf{ind}_{\prod(B)}$ είναι ορίσιμος από τούς* apply *και* $\eta_{\prod(B)}$. $\square$

Η αρχή επαγωγής για τόν $A_1 \times A_2$ λέει ότι, δοθέντων μιας οικογένειας

$$(x : A_1 \times A_2)\, C(x)$$

και ενός μετασχηματισμού

$$(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\, c_{\mathsf{pair}}(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)),$$

μπορούμε να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό $(x : A_1 \times A_2)\, t(x) : C(x)$ θέτοντας

$$t(\mathsf{pair}(a_1, a_2)) :\equiv c_{\mathsf{pair}}(a_1, a_2).$$

Από τήν αρχή επαγωγής λαμβάνεται ο επαγωγέας

$$\frac{(x_1 : A_1, x_2 : A_2)\, z(x_1, x_2) : C(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) \qquad x : A_1 \times A_2}{\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}(z, x) : C(x)}$$

τού $A_1 \times A_2$, με ορίζουσα σχέση

$$\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}(z, \mathsf{pair}(a_1, a_2)) :\equiv z(a_1, a_2).$$

Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στό γινόμενο: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα τών στοιχείων τού $A_1 \times A_2$, αρκεί να τήν δείξουμε για στοιχεία τής μορφής $\mathsf{pair}(x_1, x_2)$.

Όπως συνέβη και με τούς τύπους συναρτήσεων, προκειμένου να πάρουμε πίσω τόν $\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}$ από τίς pr_1 και pr_2 χρειαζόμαστε τό επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.9.5. *Για οποιοδήποτε $x : A_1 \times A_2$, υπάρχει ένα*

$$\eta_{A_1 \times A_2}(x) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση $\eta_{A_1 \times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στό x, θέτοντας

$$\eta_{A_1 \times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}. \qquad \square$$

Άσκηση 3.1. Ορίστε, με τή βοήθεια τών pr_i και $\eta_{A_1 \times A_2}$, έναν μετασχηματισμό ο οποίος ικανοποιεί τήν ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{A_1 \times A_2}$.

Λύση. Έστω C οικογένεια επί τού $A_1 \times A_2$. Τό

$$\mathsf{ind}'_{A_1 \times A_2}(z, x) :\equiv \mathsf{transport}^C(\eta_{A_1 \times A_2}(x), z(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)))$$

ικανοποιεί τήν ορίζουσα σχέση τού επαγωγέα τού γινομένου:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{ind}'_{A_1 \times A_2}(z, \mathsf{pair}(x_1, x_2)) \\
&\qquad \equiv \mathsf{transport}^C(\eta_{A_1 \times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)), z(\mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(x_1, x_2)), \mathsf{pr}_2(\mathsf{pair}(x_1, x_2)))) \\
&\qquad \equiv \mathsf{transport}^C(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}, z(x_1, x_2)) \\
&\qquad \equiv z(x_1, x_2).
\end{aligned} \qquad \square$$

Ισχύουν τά αυτά για εξαρτώμενα ζεύγη.

Η αρχή τής επαγωγής για τόν $\mathbf{1}$ λέει ότι, δοθέντων μιας οικογένειας $(x:\mathbf{1})\,C(x)$ και ενός $c_!:C(!)$, η σχέση

$$t(!) :\equiv c_!$$

ορίζει τό $t(x):C(x)$ για τυχόν $x:\mathbf{1}$. Ειδικότερα,

Αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στόν $\mathbf{1}$: Προκειμένου να αποδείξουμε μία ιδιότητα για τό τυχόν στοιχείο τού $\mathbf{1}$, αρκεί να τήν δείξουμε για τό !.

Νωρίτερα παρατηρήσαμε ότι ο αναδρομέας τού $\mathbf{1}$ είναι ορίσιμος χωρίς αναδρομή. Δεν συμβαίνει τό ίδιο με τόν επαγωγέα

$$\frac{z:C(!) \qquad x:\mathbf{1}}{\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(z,x):C(x)}$$

αυτού, όπου

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(z,!) :\equiv z.$$

Συγκεκριμένα, εκείνο που μάς λέει παραπάνω είναι ότι τό ! είναι τό μοναδικό στοιχείο τού $\mathbf{1}$:

Άσκηση 3.2. Δείξτε ότι, για οποιοδήποτε $x:\mathbf{1}$, υπάρχει ένα

$$\eta_{\mathbf{1}}(x):\,! = x$$

τό οποίο ικανοποιεί τή σχέση $\eta_{\mathbf{1}}(!) \equiv \mathsf{refl}_!$, και χρησιμοποιήστε το για να ορίσετε τόν $\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}$.

Λύση. Τό $\eta_{\mathbf{1}}(x)$ ορίζεται μέσω τής επαγωγής

$$\eta_{\mathbf{1}}(!) :\equiv \mathsf{refl}_!.$$

Δοθείσης οικογένειας C επί τού $\mathbf{1}$, τό $\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(z,x)$ μπορεί τώρα να οριστεί ως η μεταφορά τού z κατά μήκος τού $\eta_{\mathbf{1}}(x)$:

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{1}}(z,x) :\equiv \mathsf{transport}^C(\eta_{\mathbf{1}}(x),z).$$

Η ορίζουσα σχέση τού επαγωγέα τού $\mathbf{1}$ είναι άμεση. □

Η αρχή επαγωγής τού $\mathbf{0}$ δίνει, για οποιαδήποτε οικογένεια

$$(x:\mathbf{0})\,C(x),$$

έναν μετασχηματισμό

$$(x:\mathbf{0})\,t(x):C(x)$$

χωρίς ορίζουσες σχέσεις (μια και δεν υπάρχει τίποτα στό οποίο να μπορεί να οριστεί). Αυτός ο μετασχηματισμός είναι και ο επαγωγέας

$$\frac{x:\mathbf{0}}{\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}(x):C(x)}$$

τού $\mathbf{0}$.

Ο $\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}$ μπορεί να οριστεί από τόν $\mathsf{rec}_{\mathbf{0}}$:

$$\mathsf{ind}_{\mathbf{0}}^{C}(x) :\equiv \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}^{C(x)}(x).$$

Στή λογική, η άρνηση μιας πρότασης ϕ είναι η πρόταση

$$\neg\phi :\equiv \phi \supset \mathsf{F}.$$

Η $\neg\phi$ λέει ότι από τήν υπόθεση ϕ μπορούμε να οδηγηθούμε σε άτοπο, ή, ισοδύναμα, ότι η ϕ δεν έχει τεκμήρια αλήθειας. Τό τυποθεωρητικό ανάλογο τής άρνησης είναι ο τύπος $\neg A :\equiv A \to \mathbf{0}$ τών συναρτήσεων από έναν τύπο A στόν $\mathbf{0}$, ο οποίος εκφράζει τό γεγονός ότι ο A δεν είναι κατοικημένος (δεν έχει στοιχεία).

Άσκηση 3.3. Έστω E ο τύπος που έχει ως μοναδικό κατασκευαστή τόν

$$(x:E)\, e(x):E.$$

Δείξτε ότι ο E δεν έχει στοιχεία. [Υπόδειξη: Διατυπώστε πρώτα τήν αρχή αναδρομής τού E.]

Λύση. Προκειμένου να ορίσουμε μία συνάρτηση $f:E \to \mathbf{0}$ θα χρειαστούμε τήν αρχή τής αναδρομής τού E: Δοθέντων

- ενός τύπου C, και
- ενός $c_e(x,y):C$ για τυχόντα $x:E$ και $y:C$,

η σχέση

$$t(e(x)) :\equiv c_e(x, t(x))$$

ορίζει τό $t(x):C$ για οποιοδήποτε $x:E$.

Αν πάρουμε για C τόν τύπο $\mathbf{0}$, η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f :\equiv \lambda(x:E)\, t(x)$, όπου τό $t(x)$ ορίζεται από τήν αναδρομή

$$t(e(x)) :\equiv t(x)$$

(άλλως ειπείν, εφαρμόζουμε τήν αρχή τής αναδρομής, όπου $c_e(x,y)$ τό y). □

Για τύπους A και B γράφουμε

$$A \simeq B$$

αν υπάρχουν $f:A \to B$ και $g:B \to A$ ούτως ώστε $g(f(x)) = x$ για κάθε $x:A$ και $f(g(y)) = y$ για κάθε $y:B$.

Άσκηση 3.4. Δείξτε ότι αν $\neg A$ τότε $A \simeq \mathbf{0}$.

Λύση. Έστω $f:A \to \mathbf{0}$. Στήν αντίθετη κατεύθυνση ορίζεται

$$g :\equiv \lambda(x:\mathbf{0})\, \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}^{A}(x) : \mathbf{0} \to A.$$

Η αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στό $\mathbf{0}$ μάς λέει ότι κάθε στοιχείο τού $\mathbf{0}$ ικανοποιεί κάθε ιδιότητα· ειδικότερα, για $x:A$ και $y:\mathbf{0}$, $f(x) = y$ και $g(y) = x$, από τά οποία προκύπτουν οι ζητούμενες σχέσεις $g(f(x)) = x$ και $f(g(y)) = y$. □

3.10 Ασκήσεις

Άσκηση 3.5. Περιγράψτε συναρτήσεις

1. $A \to \neg\neg A$.
2. $\neg\neg(A + \neg A)$.
3. $(A + \neg A) \to (\neg\neg A \to A)$.

Λύση. 1. $\lambda(x : A)\, \lambda(f : \neg A)\, f(x)$.

2. $\lambda(f : \neg(A + \neg A))\, f(\mathsf{in}_2(\lambda(x : A)\, f(\mathsf{in}_1(x))))$.
3. Ορίζουμε μετασχηματισμό $(x : A + \neg A)\, t(x) : \neg\neg A \to A$ μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} t(\mathsf{in}_1(x_1)) &:\equiv \lambda(f : \neg\neg A)\, x_1, \\ t(\mathsf{in}_2(x_2)) &:\equiv \lambda(f : \neg\neg A)\, \mathsf{rec}^A_{\mathbf{0}}(f(x)). \end{aligned}$$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $\lambda(t)$. □

Άσκηση 3.6. Περιγράψτε συνάρτηση

$$f : ((A_1 \to C) \times (A_2 \to C)) \to (A_1 + A_2) \to C.$$

Λύση. Αρκεί να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό

$$(x : (A_1 \to C) \times (A_2 \to C))\, u(x) : (A_1 + A_2) \to C.$$

Γι' αυτό, αρκεί να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό

$$(x : (A_1 \to C) \times (A_2 \to C), y : A_1 + A_2)\, v(x, y) : C.$$

Ένας τέτοιος v μπορεί να οριστεί με διπλή αναδρομή στά x και y,

$$v(\mathsf{pair}(f_1, f_2), \mathsf{in}_i(y_i)) :\equiv f_i(y_i), \quad i = 1, 2,$$

ή, ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας τίς προβολές και τόν αναδρομέα τού $A_1 + A_2$:

$$v(x, y) :\equiv \mathsf{rec}_{A_1 + A_2}(\mathsf{apply}_{\mathsf{pr}_1(x)}, \mathsf{apply}_{\mathsf{pr}_2(x)}, y).$$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$\lambda(x : (A_1 \to C) \times (A_2 \to C))\, \lambda(y : A_1 + A_2)\, v(x, y).$$ □

Άσκηση 3.7. Περιγράψτε συνάρτηση

$$f : \prod(x : A_1 + A_2) \left[\Big(\sum(x_1 : A_1)\, \mathsf{in}_1(x_1) = x\Big) + \Big(\sum(x_2 : A_2)\, \mathsf{in}_2(x_2) = x\Big)\right].$$

Λύση. Ας θέσουμε, για $x : A_1 + A_2$,

$$C(x) :\equiv \Big(\sum(x_1 : A_1)\, \mathsf{in}_1(x_1) = x\Big) + \Big(\sum(x_2 : A_2)\, \mathsf{in}_2(x_2) = x\Big).$$

Για $a_1 : A_1$, έχουμε

$$\mathsf{pair}(a_1, \mathsf{refl}_{\mathsf{in}_1(a_1)}) : \sum(x_1 : A_1)\, \mathsf{in}_1(x_1) = \mathsf{in}_1(a_1),$$

οπότε

$$\mathsf{in}_1(\mathsf{pair}(a_1, \mathsf{refl}_{\mathsf{in}_1(a_1)})) : C(\mathsf{in}_1(a_1)).$$

Όμοια, για $a_2 : A_2$ έχουμε

$$\mathsf{in}_2(\mathsf{pair}(a_2, \mathsf{refl}_{\mathsf{in}_2(a_2)})) : C(\mathsf{in}_2(a_2)).$$

Ορίζεται, επομένως, μετασχηματισμός $(x : A_1 + A_2)\, t(x) : C(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} t(\mathsf{in}_1(a_1)) &:\equiv \mathsf{in}_1(\mathsf{pair}(a_1, \mathsf{refl}_{\mathsf{in}_1(a_1)})), \\ t(\mathsf{in}_2(a_2)) &:\equiv \mathsf{in}_2(\mathsf{pair}(a_2, \mathsf{refl}_{\mathsf{in}_2(a_2)})). \end{aligned}$$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $\lambda(t)$. □

Άσκηση 3.8. Ορίστε συνάρτηση

$$f : \Big(\sum(x : \mathbf{1})\, A(x)\Big) \to A(!)$$

ούτως ώστε $f(\mathsf{pair}(!, a)) \equiv a$.

Λύση. Για $x : \mathbf{1}$ ορίζουμε συνάρτηση $g_x : A(x) \to A(!)$ μέσω τής επαγωγής

$$g_! :\equiv \lambda(y : A(\mathbf{1}))\, y.$$

Εν συνεχεία, θεωρούμε τή συνάρτηση $f : (\sum(x : \mathbf{1})\, A(x)) \to A(!)$ που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$f(\mathsf{pair}(x, y)) :\equiv g_x(y).$$

Η f ικανοποιεί τή σχέση τής εκφώνησης:

$$f(\mathsf{pair}(!, a)) \equiv g_!(a) \equiv a.$$

Η f θα μπορούσε να οριστεί και απ' ευθείας από τίς προβολές και τόν $\eta_{\mathbf{1}}$:

$$f :\equiv \lambda(z : \sum(x : \mathbf{1})\, A(x))\, \mathsf{transport}^A(\eta_{\mathbf{1}}(\mathsf{pr}_1(z))^{-1}, \mathsf{pr}_2(z)).$$ □

Άσκηση 3.9. Χρησιμοποιήστε τόν $\mathsf{ind}_{\mathrm{Bool}}$ για να ορίσετε συνάρτηση

$$f : \prod(x : \mathrm{Bool})\, ((\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x))$$

με $f(\mathsf{false}) \equiv \mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}})$ και $f(\mathsf{true}) \equiv \mathsf{in}_2(\mathsf{refl}_{\mathsf{true}})$.

Λύση. Θεωρούμε τήν οικογένεια $(x : \mathrm{Bool})\, C(x)$ με $C(x) :\equiv (\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x)$, και τά

$$\begin{aligned} c_{\mathsf{false}} &:\equiv \mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}}) : C(\mathsf{false}), \\ c_{\mathsf{true}} &:\equiv \mathsf{in}_2(\mathsf{refl}_{\mathsf{true}}) : C(\mathsf{true}), \end{aligned}$$

με τή βοήθεια τών οποίων σχηματίζεται η συνάρτηση

$$f :\equiv \lambda(x : \mathrm{Bool})\, \mathsf{ind}_{\mathrm{Bool}}^C(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, x).$$ □

Άσκηση 3.10. Χρησιμοποιήστε τήν f τής προηγούμενης άσκησης για να ορίσετε έναν μετασχηματισμό

$$(c_{\mathsf{false}} : C(\mathsf{false}), c_{\mathsf{true}} : C(\mathsf{true}), x : \mathsf{Bool})\ \mathsf{ind}'(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, x) : C(x)$$

ο οποίος ικανοποιεί τήν ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{\mathsf{Bool}}$.

Λύση. Θεωρούμε τόν μετασχηματισμό

$$(y : (\mathsf{false} = x) + (\mathsf{true} = x))\ t(y) : C(x)$$

που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} t(\mathsf{in}_1(p)) &:\equiv \mathsf{transport}^C(p, c_{\mathsf{false}}), \\ t(\mathsf{in}_2(q)) &:\equiv \mathsf{transport}^C(q, c_{\mathsf{true}}), \end{aligned}$$

και θέτουμε

$$\mathsf{ind}'(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, x) :\equiv t(f(x)).$$

Ελέγχουμε ότι ικανοποιείται η ορίζουσα σχέση τού $\mathsf{ind}_{\mathsf{Bool}}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{ind}'(c_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{true}}, \mathsf{false}) &\equiv t(f(\mathsf{false})) \\ &\equiv t(\mathsf{in}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}})) && (\text{ορισμός τού } f) \\ &\equiv \mathsf{transport}^C(\mathsf{refl}_{\mathsf{false}}, c_{\mathsf{false}}) && (\text{ορισμός τού } t) \\ &\equiv c_{\mathsf{false}} && (\text{ορισμός τού transport}) \end{aligned}$$

και όμοια για τό true. □

Άσκηση 3.11 ([7, άσκηση 1.4])**.** Ειδική περίπτωση τού ορισμού με αναδρομή στόν Nat είναι ο ορισμός με *επανάληψη* (iteration):

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv d_0, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv d_{\mathsf{s}}(t(n)), \end{aligned}$$

όπου C τύπος, $d_0 : C$ και $(x : C)\ d_{\mathsf{s}}(x) : C$. Δοθέντων ενός τύπου C, ενός $c_0 : C$, και ενός $(x : \mathsf{Nat}, y : C)\ c_{\mathsf{s}}(x, y) : C$ ορίστε, χρησιμοποιώντας επανάληψη αντί για αναδρομή, έναν μετασχηματισμό $(n : \mathsf{Nat})\ r(n) : C$ ο οποίος ικανοποιεί τίς ισότητες

$$\begin{aligned} r(0) &= c_0, \\ r(\mathsf{s}(n)) &= c_{\mathsf{s}}(n, r(n)), \end{aligned}$$

και συμπεράνετε ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n,

$$r(n) = \mathsf{rec}_{\mathsf{Nat}}(c_0, c_{\mathsf{s}}, n).$$

[Υπόδειξη: Ορίστε, με επανάληψη, έναν μετασχηματισμό $(n : \mathsf{Nat})\ t(n) : \mathsf{Nat} \times C$, και εφαρμόστε τή δεύτερη προβολή για να πάρετε τόν r. Για τή δεύτερη ισότητα, κάντε επαγωγή στό n. Τέλος, χρησιμοποιήστε τό θεώρημα 2.3.1.]

Λύση. Πρώτα ορίζουμε μετασχηματισμό $(n : \text{Nat})\, t(n) : \text{Nat} \times C$ μέσω τής επανάληψης

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv \mathsf{pair}(0, c_0), \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{pair}(\mathsf{s}(\mathsf{pr}_1(t(n))), c_{\mathsf{s}}(\mathsf{pr}_1(t(n)), \mathsf{pr}_2(t(n)))), \end{aligned}$$

και εν συνεχεία θέτουμε $r(n) :\equiv \mathsf{pr}_2(t(n))$. Η πρώτη ισότητα είναι άμεση:

$$\begin{aligned} r(0) &\equiv \mathsf{pr}_2(t(0)) \\ &\equiv c_0. \end{aligned}$$

Για τη δεύτερη, ορίζουμε πρώτα ένα $u(n) : \mathsf{pr}_1(t(n)) = n$ μέσω τής επανάληψης

$$\begin{aligned} u(0) &:\equiv \mathsf{refl}_0, \\ u(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{s}(u(n)), \end{aligned}$$

τό οποίο μάς βεβαιώνει ότι $\mathsf{pr}_1(t(n)) = n$. Τώρα μπορούμε να δείξουμε τό ζητούμενο:

$$\begin{aligned} r(\mathsf{s}(n)) &\equiv \mathsf{pr}_2(t(\mathsf{s}(n))) \\ &\equiv c_{\mathsf{s}}(\mathsf{pr}_1(t(n)), \mathsf{pr}_2(t(n))) \\ &= c_{\mathsf{s}}(n, r(n)). \end{aligned}$$

□

Άσκηση 3.12 ([7, άσκηση 1.5]). Δείξτε ότι τό εξαρτώμενο άθροισμα $\sum(A)$ μιας οικογένειας A επί τού Bool συμπεριφέρεται όπως ο τύπος $A(\mathsf{false}) + A(\mathsf{true})$: Ορίστε κατάλληλους μετασχηματισμούς in'_1, in'_2, και ind', και επαληθεύστε τίς ορίζουσες σχέσεις τού επαγωγέα.

Λύση. Οι in'_1 και in'_2 ορίζονται εύκολα:

$$\begin{aligned} \mathsf{in}'_1(x_1) &:\equiv \mathsf{pair}(\mathsf{false}, x_1), \\ \mathsf{in}'_2(x_2) &:\equiv \mathsf{pair}(\mathsf{true}, x_2). \end{aligned}$$

Για να ορίσουμε τό $\mathsf{ind}'(z_1, z_2, z) : C(z)$, όπου

- C οικογένεια τύπων επί τού $\sum(A)$,
- $(x_1 : A(\mathsf{false}))\, z_1(x_1) : C(\mathsf{in}'_1(x_1))$,
- $(x_2 : A(\mathsf{true}))\, z_2(x_2) : C(\mathsf{in}'_2(x_2))$, και
- $z : \sum(A)$,

θεωρούμε τόν μετασχηματισμό

$$(x : \text{Bool})\, t(x) : \prod(y : A(x))\, C(\mathsf{pair}(x, y))$$

που ορίζεται από τήν επαγωγή

$$\begin{aligned} t(\mathsf{false}) &:\equiv \lambda(z_1), \\ t(\mathsf{true}) &:\equiv \lambda(z_2), \end{aligned}$$

και εν συνεχεία ορίζουμε τό $\mathsf{ind}'(z_1, z_2, z)$ με επαγωγή στό z:

$$\mathsf{ind}'(z_1, z_2, \mathsf{pair}(x, y)) :\equiv t(x)(y).$$

Δείχνουμε ότι ικανοποιούνται οι ορίζουσες σχέσεις τού επαγωγέα:

$$\begin{aligned} \mathsf{ind}'(z_1, z_2, \mathsf{in}_1'(x_1)) &\equiv \mathsf{ind}'(z_1, z_2, \mathsf{pair}(\mathsf{false}, x_1)) \\ &\equiv t(\mathsf{false})(x_1) \\ &\equiv z_1(x_1) \end{aligned}$$

και όμοια για τήν άλλη. □

Άσκηση 3.13 ([7, άσκηση 1.6])**.** Εάν A οικογένεια επί τού Bool, ορίστε κατάλληλους μετασχηματισμούς

$$(x_1 : A(\mathsf{false}), x_2 : A(\mathsf{true}))\ \mathsf{pair}'(x_1, x_2) : \prod(A),$$

και

$$\begin{aligned} (f : \prod(A))\ \mathsf{pr}_1'(f) : A(\mathsf{false}), \\ (f : \prod(A))\ \mathsf{pr}_2'(f) : A(\mathsf{true}), \end{aligned}$$

και επαληθεύστε ότι ικανοποιούνται οι προβλεπόμενες ορίζουσες σχέσεις.

Λύση. Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathsf{pair}'(x_1, x_2) &:\equiv \lambda(x : \mathrm{Bool})\ rec_{\mathrm{Bool}}(x_1, x_2, x), \\ \mathsf{pr}_1'(f) &:\equiv f(\mathsf{false}), \\ \mathsf{pr}_2'(f) &:\equiv f(\mathsf{true}). \end{aligned}$$

Οι ορίζουσες σχέσεις ικανοποιούνται:

$$\begin{aligned} \mathsf{pr}_1'(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) &\equiv \mathsf{rec}_{\mathrm{Bool}}(x_1, x_2, \mathsf{false}) \\ &\equiv x_1 \end{aligned}$$

και όμοια για τήν άλλη. □

Άσκηση 3.14. Δείξτε ότι

1. $A + \mathbf{0} \ \simeq\ A$,
2. $A \times \mathbf{0} \ \simeq\ \mathbf{0}$,
3. $A \times \mathbf{1} \ \simeq\ A$.

Λύση. 1. Υπάρχει μία προφανής $f : A \to (A + \mathbf{0})$:

$$f :\equiv \mathsf{in}_1.$$

Στήν αντίθετη κατεύθυνση, ορίζουμε μία $g : (A + \mathbf{0}) \to A$ μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} g(\mathsf{in}_1(x)) &:\equiv x, \\ g(\mathsf{in}_2(y)) &:\equiv \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}^A(y). \end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχεται ότι $g(f(x)) = x$. Για να δείξουμε ότι $f(g(z)) = z$, κάνουμε επαγωγή στό z:

$$\begin{aligned} g(f(\mathsf{in}_1(x))) &\equiv \mathsf{in}_1(x), && (\text{ορισμοί τών } f \text{ και } g) \\ g(f(\mathsf{in}_2(y))) &= \mathsf{in}_2(y). && (\text{επαγωγή στό } y) \end{aligned}$$

2. Θεωρούμε τίς συναρτήσεις

$$f :\equiv \mathsf{pr}_2 : (A \times \mathbf{0}) \leftrightarrows \mathbf{0} : \mathsf{rec}_{\mathbf{0}}^{A\times\mathbf{0}} \equiv: g.$$

Η ισότητα $f(g(y)) = y$ προκύπτει αμέσως με επαγωγή στό y. Για τήν αντίστροφη σύνθεση $g(f(z)) = z$, η αρχή τής απόδειξης με επαγωγή στό z ανάγει τό ζητούμενο στό

$$g(f(\mathsf{pair}(x, y))) = \mathsf{pair}(x, y),$$

τό οποίο προκύπτει αμέσως με επαγωγή στό y.

3. Θέτουμε

$$f :\equiv \mathsf{pr}_1 : (A \times \mathbf{1}) \leftrightarrows A : \mathsf{pair}(\_, !) \equiv: g.$$

Ο έλεγχος ότι οι f και g είναι αντίστροφες αφήνεται στόν αναγνώστη. $\square$

Κεφάλαιο 4

Σύμπαντα

Σε μία πρώτη ανάγνωση, τά σύμπαντα είναι για τούς τύπους ό,τι οι τύποι συναρτήσεων για τούς μετασχηματισμούς. Τά στοιχεία ενός τύπου συναρτήσεων κωδικοποιούν κάποιους μετασχηματισμούς, και η αποκωδικοποίηση πραγματοποιείται από τόν apply· τά στοιχεία ενός σύμπαντος κωδικοποιούν κάποιους τύπους, και η αποκωδικοποίηση πραγματοποιείται από ένα κατηγόρημα T. Ωστόσο, η αναλογία σταματάει κάπου εδώ. Θα ξεκινήσουμε με κάποια πράγματα που μπορούμε να κάνουμε, ή θα θέλαμε να μπορούμε να κάνουμε, στή θεωρία τύπων.

4.1 Αναδρομικές οικογένειες τύπων

Η αρχή αναδρομής ενός τύπου μάς επιτρέπει να ορίζουμε μετασχηματισμούς αξιοποιώντας τόν τρόπο με τόν οποίο τά στοιχεία του παράγονται από τούς διάφορους κατασκευαστές. Τίποτα δεν χρησιμοποιείται από, ή προϋποτίθεται για, τίς τιμές τού οριζόμενου μετασχηματισμού. Μπορούμε, επομένως, να άρουμε τόν περιορισμό ότι οι τιμές είναι στοιχεία κάποιου τύπου (ή κάποιων τύπων, στήν περίπτωση τής αναδρομής σε οικογένεια), και να θεωρήσουμε αναδρομικούς ορισμούς γενικότερης μορφής. Ένα είδος μετασχηματισμού που μάς ενδιαφέρει είναι οι οικογένειες τύπων· προκειμένου για τόν τύπο Bool, η σχετική αρχή έχει ως εξής: Δοθέντων δύο τύπων C_{false} και C_{true}, οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
C(\mathsf{false}) &:\equiv C_{\mathsf{false}},\\
C(\mathsf{true}) &:\equiv C_{\mathsf{true}},
\end{aligned}
$$

ορίζουν μία οικογένεια $(x : \mathrm{Bool})\, C(x)$.

Η άσκηση 3.9 χαρακτηρίζει τά στοιχεία τού Bool κατά τό ήμισυ: κάθε στοιχείο τού Bool είναι ίσο με ένα εκ τών false και true. Έχοντας στή διάθεσή μας αναδρομικές οικογένειες, μπορούμε να δείξουμε ότι αυτά τά δύο δεν είναι ίσα μεταξύ τους.

Θεώρημα 4.1.1. $\mathsf{true} \neq \mathsf{false}$.

Απόδειξη. Χρειαζόμαστε μία συνάρτηση από τόν $\mathsf{true} = \mathsf{false}$ στόν $\mathbf{0}$. Θεωρούμε τήν οικογένεια $(x : \mathrm{Bool})\, C(x)$ που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$
\begin{aligned}
C(\mathsf{false}) &:\equiv \mathbf{0},\\
C(\mathsf{true}) &:\equiv \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$\lambda(p : \mathsf{true} = \mathsf{false})\, \mathsf{transport}^C(p, !). \qquad \square$$

Από τό παραπάνω θεώρημα μπορούμε να συναγάγουμε όλες τίς αναμενόμενες ανισότητες· για παράδειγμα,

Πόρισμα 4.1.2 (4ο αξίωμα τού Peano)**.** *Για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό n,* $\mathsf{s}(n) \neq 0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τόν μετασχηματισμό που ορίζεται από τήν αναδρομή

$$\begin{aligned} t(0) &:\equiv \mathsf{false}, \\ t(\mathsf{s}(n)) &:\equiv \mathsf{true}. \end{aligned}$$

Εάν για κάποιον n, $\mathsf{s}(n) = 0$, τότε $\mathsf{true} = \mathsf{false}$, άτοπο. $\square$

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε τήν οικογένεια $(n : \mathrm{Nat})\ F_n$ τών πεπερασμένων τύπων, όπου ο τύπος F_n έχει ακριβώς n στοιχεία, μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} F_0 &:\equiv \mathbf{0}, \\ F_{\mathsf{s}(n)} &:\equiv F_n + \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Τό επόμενο παράδειγμα έχει λογικό ενδιαφέρον, και θα μάς οδηγήσει στό αντικείμενο τού κεφαλαίου. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε έναν τύπο, τά στοιχεία τού οποίου αναπαριστούν τίς προτάσεις τής γλώσσας τής κατηγορηματικής λογικής με ισότητα. Θα χρειαστεί πρώτα απ' όλα να διευθετήσουμε τό θέμα τών μεταβλητών (individual variables). Στίς γλώσσες πρώτης τάξης, οι μεταβλητές έχουν πεδία διακύμανσης, τά λεγόμενα είδη (sorts). Συνήθως υπάρχει μόνο ένα είδος, οπότε αυτό αποσιωπάται, καθώς δεν συνεισφέρει κάτι στή διατύπωση. Η θεωρία τών διανυσματικών χώρων, όμως, έχει δύο είδη, τό Scalar για τά στοιχεία τού σώματος, και τό Vector για τά στοιχεία τού διανυσματικού χώρου, ενώ η θεωρία τών κατηγοριών έχει ένα είδος Object και μία οικογένεια ειδών $(a, b : \mathrm{Object})\ \mathrm{Hom}(a, b)$. Εμείς εδώ θα πραγματευθούμε τή γενική περίπτωση, οπότε θα θεωρήσουμε ότι μάς έχει δοθεί ένας τύπος Sort, τά στοιχεία τού οποίου είναι τά σύμβολα τής γλώσσας για τά διάφορα είδη, και επιπλέον, για κάθε $k : \mathrm{Sort}$, ένας τύπος $T_{\mathrm{Sort}}(k)$ που ερμηνεύει τό σύμβολο k και αποτελεί τό πεδίο διακύμανσης τών αντίστοιχων μεταβλητών. Αυτό θα μάς επιτρέψει να περιγράψουμε τίς προτάσεις απ' ευθείας, χρησιμοποιώντας τόν διαθέσιμο μηχανισμό τής περιβάλλουσας θεωρίας τύπων για να αναπαραστήσουμε τίς φόρμουλες ως μετασχηματισμούς.

Για να μην προκληθεί σύγχυση με τήν ισότητα τής θεωρίας τύπων, η ισότητα τής γλώσσας θα συμβολίζεται eq. Ο τύπος Sent τών τυπικών προτάσεων έχει τούς κατασκευαστές

- $(r, s : \mathrm{Sent})\ r \wedge s : \mathrm{Sent}$,
- $(r, s : \mathrm{Sent})\ r \vee s : \mathrm{Sent}$,
- $(r, s : \mathrm{Sent})\ r \supset s : \mathrm{Sent}$,
- $\mathsf{F} : \mathrm{Sent}$,
- $\mathsf{T} : \mathrm{Sent}$,
- $(k : \mathrm{Sort}, (x : T_{\mathrm{Sort}}(k))\ t(x) : \mathrm{Sent})\ \forall(k, t) : \mathrm{Sent}$,

- $(k : \mathrm{Sort}, (x : T_{\mathrm{Sort}}(k))\, t(x) : \mathrm{Sent})\ \exists(k, t) : \mathrm{Sent}$,
- $(k : \mathrm{Sort}, a, b : T_{\mathrm{Sort}}(k))\ \mathrm{eq}_k(a, b) : \mathrm{Sent}$.

Υπάρχουν πολλά πράγματα που θα μπορούσαμε να κάνουμε με τήν παραπάνω περιγραφή. Αυτό που μάς ενδιαφέρει πρωτίστως είναι η ερμηνεία τών τυπικών προτάσεων. Ορίζουμε λοιπόν τήν οικογένεια τύπων, ή κατηγόρημα,

$$(s : \mathrm{Sent})\ T(s)$$

μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned}
T(r \wedge s) &:\equiv T(r) \times T(s),\\
T(r \vee s) &:\equiv T(r) + T(s),\\
T(r \supset s) &:\equiv T(r) \to T(s),\\
T(\mathsf{F}) &:\equiv \mathbf{0},\\
T(\mathsf{T}) &:\equiv \mathbf{1},\\
T(\forall(k, t)) &:\equiv \prod(x : T_{\mathrm{Sort}}(k))\, t(x),\\
T(\exists(k, t)) &:\equiv \sum(x : T_{\mathrm{Sort}}(k))\, t(x),\\
T(\mathrm{eq}_k(a, b)) &:\equiv a =_{T_{\mathrm{Sort}}(k)} b.
\end{aligned}$$

Τό T αποτελεί ανάθεση τεκμηρίων αλήθειας, ή απόδοση νοήματος, στίς τυπικές προτάσεις. Σε πιο παραδοσιακή φιλοσοφική ορολογία, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι τύποι είναι αναγνώσιμοι ως (ερμηνευμένες) προτάσεις, τό $T(s)$ μπορεί να νοηθεί ως η πραγματική πρόταση που εκφράζει τίς συνθήκες αλήθειας τής τυπικής πρότασης s. Για τόν λόγο αυτόν, αφ' ότου εισήχθη από τόν Tarski στό [6], τό T ονομάζεται τό *κατηγόρημα τής αλήθειας* τού Sent.

4.2 Σύμπαντα κατά Tarski

Θα θέλαμε να μιμηθούμε τήν παραπάνω κατασκευή για να ορίσουμε έναν τύπο U, τά στοιχεία τού οποίου θα αναπαριστούν, με τή βοήθεια ενός κατηγορήματος T, κάποιους από τούς τύπους. Τώρα δεν υπάρχει η διάκριση μεταξύ Sort και Sent, και τά U και T χρειάζεται να οριστούν από τό μηδέν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην είναι πλέον εφικτός ο διαχωρισμός ανάμεσα στόν ορισμό τού U και εκείνον τού T. Για παράδειγμα, ο κατασκευαστής που αντιστοιχεί στό εξαρτώμενο γινόμενο έχει τή μορφή

$$(a : U, (x : T(a))\, b(x) : U)\ \mathrm{prod}(a, b) : U,$$

ή, ως κανόνας σχηματισμού,

$$\dfrac{a : U \qquad \begin{matrix}(x : T(a))\\ b(x) : U\end{matrix}}{\mathrm{prod}(a, b) : U}\ ,$$

όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι προκειμένου να σχηματίσουμε τό $\mathrm{prod}(a, b)$ πρέπει ήδη να γνωρίζουμε τό $T(a)$. Παρόμοια είναι η κατάσταση με τό εξαρτώμενο άθροισμα και τήν ισότητα. Ο πλήρης αμοιβαίος ορισμός τών U και T έχει τή μορφή

$$
\begin{aligned}
(a, b : U)\ \mathsf{plus}(a,b) : U &\qquad T(\mathsf{plus}(a,b)) :\equiv T(a) + T(b),\\
0 : U &\qquad T(0) :\equiv \mathbf{0},\\
1 : U &\qquad T(1) :\equiv \mathbf{1},\\
(a : U, (x : T(a))\, b(x) : U)\ \mathsf{prod}(a,b) : U &\qquad T(\mathsf{prod}(a,b)) :\equiv \prod (x : T(a))\, T(b(x)),\\
(a : U, (x : T(a))\, b(x) : U)\ \mathsf{sum}(a,b) : U &\qquad T(\mathsf{sum}(a,b)) :\equiv \sum (x : T(a))\, T(b(x)),\\
(a : U, b, c : T(a))\ \mathsf{eq}_a(b,c) : U &\qquad T(\mathsf{eq}_a(b,c)) :\equiv b =_{T(a)} c.
\end{aligned}
$$

Κάθε ρήτρα τού παραπάνω ορισμού αποτελείται από έναν κατασκευαστή τού U, καθώς και τήν ορίζουσα σχέση τού T που αντιστοιχεί σε αυτόν τόν κατασκευαστή, εις τρόπον ώστε οι κατασκευαστές τού U να μπορούν να αναφέρονται στίς τιμές τού T σε στοιχεία που έχουν κατασκευαστεί ήδη. Οι ορισμοί αυτής τής μορφής ονομάζονται *επαγωγικοαναδρομικοί (inductive-recursive)* ορισμοί (επειδή διαπλέκονται ο επαγωγικός ορισμός τού U και ο αναδρομικός ορισμός τού T), και αποτελούν τήν κύρια μέθοδο κατασκευής συμπάντων.

Ορισμός 4.2.1. Ένα *σύμπαν κατά Tarski* είναι ένα ζεύγος (U, T) αποτελούμενο από έναν τύπο U και μία οικογένεια T επί τού U.

Ο U είναι ο υποκείμενος τύπος τού σύμπαντος (και συχνά αναφέρεται αυτός ως τό σύμπαν), ενώ η T είναι τό κατηγόρημα αλήθειας τού σύμπαντος.

Εάν $a : U$ με $T(a) \equiv A$, λέμε ότι τό a είναι η *ανάκλαση* τού A στό U, και (εάν υπάρχει τέτοιο a) ότι ο A *ανακλάται* στό U. Στό παράδειγμα, οι τύποι που ανακλώνται στό σύμπαν είναι τά αθροίσματα (ανακλασμένων) τύπων, οι τύποι $\mathbf{0}$ και $\mathbf{1}$, τά εξαρτώμενα γινόμενα και αθροίσματα, και οι ισότητες. Ισοδύναμα, λέμε ότι τό σύμπαν είναι *κλειστό* ως προς τούς παραπάνω τρόπους σχηματισμού τύπων.

Η επιλογή τών τύπων στόν παραπάνω ορισμό είναι ενδεικτική. Θα μπορούσαμε, φερ' ειπείν, να προσθέσουμε ένα στοιχείο που να αναπαριστά τούς φυσικούς αριθμούς:

$$\mathsf{nat} : U \qquad\qquad T(\mathsf{nat}) :\equiv \mathrm{Nat}.$$

Μπορούμε επίσης να ανακλάσουμε ένα σύμπαν U μέσα σε ένα (ευρύτερο) σύμπαν U', εντάσσοντας στόν ορισμό τού U' τή ρήτρα

$$\mathsf{u} : U' \qquad\qquad T'(\mathsf{u}) :\equiv U.$$

Με αυτόν τόν τρόπο μπορούμε να σχηματίσουμε μία ολόκληρη ακολουθία

$$U_0, U_1, U_2, \ldots$$

συμπάντων, καθένα από τά οποία ανακλά και επεκτείνει όλα τά προηγούμενα. Εν συνεχεία, μπορούμε να ανακλάσουμε τό ίδιο τό σχήμα

$$(U)\, U'$$

σε ένα σύμπαν U_ω τό οποίο, κατά συνέπεια, ανακλά όλα τά U_n. Και δεν υπάρχει λόγος να σταματήσουμε εδώ.

Μέρος II

Ομοτοπική θεωρία τύπων

Κεφάλαιο 5

Η ομοτοπική δομή τών τύπων

Η κεντρική ιδέα στήν ομοτοπική θεωρία τύπων είναι ότι οι τύποι μπορούν να γίνουν αντιληπτοί ως γεωμετρικά αντικείμενα μέχρις ομοτοπικής ισοδυναμίας. Στήν κλασική θεωρία ομοτοπίας, ένας χώρος X αναπαρίσταται από ένα σύνολο σημείων εφοδιασμένο με μία τοπολογία, και ένα μονοπάτι μεταξύ τών σημείων x και y τού X αναπαρίσταται από μία συνεχή απεικόνιση $p : [0, 1] \to X$, όπου $p(0) = x$ και $p(1) = y$. Από πολλές απόψεις, η αυστηρή (δηλαδή, κατά σημείο) ισότητα μονοπατιών είναι υπερβολικά λεπτή σχέση. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να ορίσει τίς πράξεις τής συνένωσης μονοπατιών (αν τό p είναι μονοπάτι από τό x στό y και τό q είναι μονοπάτι από τό y στό z, τότε η συνένωση $p \bullet q$ είναι μονοπάτι από τό x στό z) και τής αντιστροφής (τό p^{-1} είναι μονοπάτι από τό y στό x). Ωστόσο, υπάρχουν φυσικές εξισώσεις μεταξύ αυτών τών πράξεων που δεν ισχύουν για τήν αυστηρή ισότητα: Για παράδειγμα, τό μονοπάτι $p \bullet p^{-1}$ (τό οποίο πηγαίνει από τό x στό y και πάλι πίσω) δεν είναι αυστηρά ίσο με τό σταθερό μονοπάτι στό x.

Η λύση είναι να θεωρήσουμε μία αδρότερη έννοια ισότητας μονοπατιών που ονομάζεται *ομοτοπία.* Μία ομοτοπία μεταξύ τών συνεχών απεικονίσεων $f : X_1 \to X_2$ και $g : X_1 \to X_2$ είναι μία συνεχής απεικόνιση $H : X_1 \times [0, 1] \to X_2$ με $H(x, 0) = f(x)$ και $H(x, 1) = g(x)$. Προκειμένου για δύο μονοπάτια p και q από τό x στό y, μία ομοτοπία είναι μία συνεχής απεικόνιση $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ με $H(s, 0) = p(s)$ και $H(s, 1) = q(s)$ για όλα τά $s \in [0, 1]$. Σε αυτήν τήν περίπτωση απαιτούμε επίσης ότι $H(0, t) = x$ και $H(1, t) = y$ για όλα τά $t \in [0, 1]$, ούτως ώστε για κάθε t η απεικόνιση $H(\_, t)$ να είναι και πάλι μονοπάτι από τό x στό y· μία ομοτοπία αυτού τού είδους λέμε ότι *διατηρεί τά άκρα.* Δεδομένου ότι τό $[0, 1] \times [0, 1]$ είναι διδιάστατο, μιλάμε επίσης για τήν H ως διδιάστατο *μονοπάτι μεταξύ μονοπατιών.*

Για παράδειγμα, επειδή τό $p \bullet p^{-1}$ φεύγει και επιστρέφει κατά μήκος τής ίδιας διαδρομής, γνωρίζουμε ότι μπορεί να συρρικνωθεί συνεχώς στό σταθερό μονοπάτι— δεν θα πιαστεί, για παράδειγμα, γύρω από μία τρύπα στόν χώρο. Η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας, και πράξεις όπως η συνένωση, η αντιστροφή, κ.λπ. τήν σέβονται. Επιπλέον, οι κλάσεις ισοδυναμίας τών ομοτοπικών βρόχων (loops) σε κάποιο σημείο x_0 (όπου δύο βρόχοι p και q εξισώνονται όταν υπάρχει μία *βασισμένη* ομοτοπία μεταξύ τους, δηλαδή μία ομοτοπία H όπως παραπάνω που ικανοποιεί επιπλέον $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ για όλα τά t) σχηματίζουν μία ομάδα που ονομάζεται *θεμελιώδης ομάδα.* Αυτή η ομάδα είναι μία *αλγεβρική αναλλοίωτη* ενός χώρου, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διερευνηθεί εάν δύο χώροι είναι *ομοτοπικά ισοδύναμοι* (υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις εκατέρωθεν, οι συνθέσεις τών οποίων είναι ομοτοπικές προς τίς ταυτοτικές), επειδή οι ισοδύναμοι χώροι έχουν ισόμορφες θεμελιώδεις ομάδες.

Επειδή οι ομοτοπίες είναι οι ίδιες ένα είδος διδιάστατου μονοπατιού, υπάρχει μία φυσική έννοια τριδιάστατης *ομοτοπίας μεταξύ ομοτοπιών*, και, στή συνέχεια, *ομοτοπίας μεταξύ ομοτοπιών μεταξύ ομοτοπιών*, και ούτω καθεξής. Αυτός ο άπειρος πύργος σημείων, μονοπατιών, ομοτοπιών, ομοτοπιών μεταξύ ομοτοπιών, ..., εφοδιασμένος με αλγεβρικές πράξεις όπως η θεμελιώδης ομάδα, είναι στιγμιότυπο μιας αλγεβρικής δομής που ονομάζεται (ασθενές) *∞-ομαδοειδές*. Ένα ∞-ομαδοειδές αποτελείται από μία συλλογή αντικειμένων, μία συλλογή *μορφισμών* μεταξύ αντικειμένων, και στή συνέχεια *μορφισμών μεταξύ μορφισμών*, και ούτω καθεξής, εφοδιασμένων με κάποια περίπλοκη αλγεβρική δομή· ένας μορφισμός στό επίπεδο k ονομάζεται k-μορφισμός. Οι μορφισμοί σε κάθε επίπεδο έχουν ταυτοτικούς, σύνθεση και αντιστροφή, τά οποία είναι ασθενή με τήν έννοια ότι ικανοποιούν τούς νόμους τού ομαδοειδούς (η σύνθεση είναι προσεταιριστική, οι ταυτοτικοί είναι ουδέτερα στοιχεία για τή σύνθεση, τά αντίστροφα απλοποιούνται) μόνο κατά προσέγγιση μορφισμών στό επόμενο επίπεδο, και αυτό δημιουργεί περαιτέρω δομή. Για παράδειγμα, επειδή η προσεταιριστικότητα τής σύνθεσης μορφισμών $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$ είναι η ίδια μορφισμός τής αμέσως επόμενης διάστασης, χρειάζονται πρόσθετες πράξεις που να συσχετίζουν τίς διάφορες αποδείξεις προσεταιριστικότητας: Οι διάφοροι τρόποι συσχετισμού τού $p \cdot (q \cdot (r \cdot s))$ με τό $((p \cdot q) \cdot r) \cdot s$ δημιουργούν τό πεντάγωνο τού Mac Lane.

Κάθε τοπολογικός χώρος X έχει ένα *θεμελιώδες ∞-ομαδοειδές*, οι k-μορφισμοί τού οποίου είναι τά k-διάστατα μονοπάτια στόν X. Η ασθένεια τού ∞-ομαδοειδούς αντιστοιχεί ευθέως στό γεγονός ότι τά μονοπάτια σχηματίζουν ομάδα μόνο μέχρις ομοτοπίας, με τά $k+1$-μονοπάτια να χρησιμεύουν ως ομοτοπίες μεταξύ k-μονοπατιών. Επιπλέον, τό ∞-ομαδοειδούς ενός χώρου διατηρεί αρκετές πτυχές τού χώρου ώστε να μπορούμε να κάνουμε θεωρία ομοτοπίας: Η κατασκευή τού θεμελιώδους ∞-ομαδοειδούς είναι προσαρτημένη προς τή γεωμετρική υλοποίηση ενός ∞-ομαδοειδούς ως χώρου, και αυτή η προσάρτηση διατηρεί τή θεωρία τής ομοτοπίας (αυτό ονομαζεται *ομοτοπική υπόθεση/ομοτοπικό θεώρημα*, διότι τό εάν είναι υπόθεση ή θεώρημα εξαρτάται από τό πώς ορίζει κανείς τό ∞-ομαδοειδές). Για παράδειγμα, μπορείτε εύκολα να ορίσετε τή θεμελιώδη ομάδα ενός ∞-ομαδοειδούς, και αν υπολογίσετε τή θεμελιώδη ομάδα τού θεμελιώδους ∞-ομαδοειδούς ενός χώρου, θα συμπέσει με τόν κλασικό ορισμό τής θεμελιώδους ομάδας αυτού τού χώρου. Εξαιτίας αυτής τής αντιστοιχίας, η θεωρία τής ομοτοπίας και η ανώτερη θεωρία κατηγοριών σχετίζονται στενά.

Στήν ομοτοπική θεωρία τύπων, κάθε τύπος έχει τή δομή ενός ∞-ομαδοειδούς. Θυμηθείτε ότι για οποιονδήποτε τύπο A και οποιαδήποτε $x, y : A$ έχουμε έναν τύπο ισότητας $x = y$. Λογικά, μπορούμε να σκεφτούμε τά στοιχεία τού $x = y$ ως τεκμήρια ότι τά x και y είναι ίσα ή ως ταυτίσεις τού x με τό y. Επιπλέον, στή θεωρία τύπων (σε αντίθεση, ας πούμε, με τή λογική πρώτης τάξης) τά στοιχεία τού $x = y$ μπορούν να είναι αντικείμενο περαιτέρω προτάσεων. Επομένως, μπορούμε να *επαναλάβουμε* τήν ισότητα: Μπορούμε να σχηματίσουμε τόν τύπο $p =_{x=y} q$ τών ταυτίσεων μεταξύ τών ταυτίσεων p και q, και τόν τύπο $r =_{p=_{x=y}q} s$, και ούτω καθεξής. Η δομή αυτού τού πύργου ισοτήτων αντιστοιχεί ακριβώς σε αυτή τών συνεχών μονοπατιών και (ανώτερων) ομοτοπιών μεταξύ τους σε έναν χώρο, ή σε ένα ∞-ομαδοειδές.

Έτσι, θα αναφερόμαστε συχνά σε ένα στοιχείο p τού $x = y$ ως μονοπάτι από τό x στό y· καλούμε τά x και y άκρα τού μονοπατιού. Δύο μονοπάτια $p, q : x = y$ με τά ίδια άκρα λέγεται ότι είναι παράλληλα, οπότε ένα στοιχείο $r : p =_{x=y} q$ μπορεί να νοηθεί ως ομοτοπία· θα τό αναφέρουμε συχνά ως διδιάστατο μονοπάτι. Παρομοίως, ο $r =_{p=_{x=y}q} s$ είναι ο τύπος τών τριδιάστατων μονοπατιών μεταξύ δύο παράλληλων διδιάστατων μονοπατιών, και ούτω καθεξής. Εάν ο τύπος A είναι «σύνολο», όπως ο

Nat, αυτοί οι επαναλαμβανόμενοι τύποι ισότητας δεν θα έχουν ενδιαφέρον, αλλά στή γενική περίπτωση μπορούν να αναπαριστούν μη τετριμμένους τύπους ομοτοπίας.

Μία σημαντική διαφορά μεταξύ τής ομοτοπικής θεωρίας τύπων και τής κλασικής θεωρίας τής ομοτοπίας είναι ότι η ομοτοπική θεωρία τύπων παρέχει μία *συνθετική* περιγραφή τών χώρων, με τήν εξής έννοια. Η συνθετική γεωμετρία είναι η γεωμετρία στό στυλ τού Ευκλείδη: Ξεκινά από κάποιες βασικές έννοιες (σημεία και ευθείες), κατασκευές (μία ευθεία που συνδέει δύο σημεία) και αξιώματα (όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες), και συνάγει τίς λογικές τους συνέπειες. Αυτό αντιδιαστέλλεται με τήν αναλυτική γεωμετρία, όπου έννοιες όπως σημεία και ευθείες ερμηνεύονται συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες στόν $\mathbb{R}^n$—οι ευθείες είναι σύνολα σημείων—και οι βασικές κατασκευές και αξιώματα συνάγονται από αυτή τήν αναπαράσταση. Ενώ η κλασική θεωρία τής ομοτοπίας είναι αναλυτική (οι χώροι και τά μονοπάτια αποτελούνται από σημεία), η ομοτοπική θεωρία τύπων είναι συνθετική: τά σημεία, τά μονοπάτια και τά μονοπάτια μεταξύ μονοπατιών είναι βασικές, αδιαίρετες, αρχικές έννοιες.

Επιπλέον, ένα από τά εκπληκτικά πράγματα σχετικά με τήν ομοτοπική θεωρία τύπων είναι ότι όλες οι βασικές κατασκευές και αξιώματα—όλη η ανώτερη δομή ομαδοειδούς—προκύπτει αυτόματα από τήν αρχή επαγωγής τής ισότητας. Αυτή η αρχή επαγωγής εφοδιάζει κάθε τύπο με τή δομή ενός ∞-ομαδοειδούς, και κάθε συνάρτηση μεταξύ δύο τύπων με τή δομή ενός μορφισμού μεταξύ δύο τέτοιων ομαδοειδών. Αυτό είναι ενδιαφέρον από μαθηματική άποψη, επειδή δίνει έναν νέο τρόπο εργασίας με ∞-ομαδοειδή. Είναι ενδιαφέρον από τυποθεωρητική άποψη, επειδή αποκαλύπτει νέες πράξεις που συνδέονται με κάθε τύπο και συνάρτηση.

5.1 Οι τύποι είναι ανώτερα ομαδοειδή

Θυμηθείτε (λήμματα 2.2.1 και 2.2.2) ότι ένας οποιοσδήποτε τύπος A φέρει τήν εξής δομή:

- Για $x, y, z : A$, $p : x = y$ και $q : y = z$, ένα $p \cdot q : x = z$ με $\mathsf{refl}_x \cdot \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$. Καλούμε τό $p \cdot q$ τή *συνένωση (concatenation)* τών p και q.
- Για $x : A$, ένα $\mathsf{refl}_x : x = x$. Καλούμε τό refl_x τό *σταθερό μονοπάτι (constant path)* στό x.
- Για $x, y : A$ και $p : x = y$, ένα $p^{-1} : y = x$ με $\mathsf{refl}_x^{-1} \equiv \mathsf{refl}_x$. Καλούμε τό p^{-1} τό *αντίστροφο (inverse)* τού p.

Τά παραπάνω προέκυψαν από τήν απόδειξη ότι η ισότητα τού A είναι σχέση ισοδυναμίας. Ωστόσο, τό πράγμα δεν τελειώνει εδώ. Από ομοτοπική άποψη, οι πράξεις αυτές αποτελούν τό πρώτο επίπεδο τής δομής ομαδοειδούς τού A—χρειαζόμαστε επίσης συνθήκες συνοχής (coherence conditions) για τίς πράξεις αυτές, καθώς και ανάλογες πράξεις σε ανώτερες διαστάσεις. Για παράδειγμα, θέλουμε να ξέρουμε ότι η συνένωση είναι προσεταιριστική, ότι τά σταθερά μονοπάτια είναι ουδέτερα και ότι τό p^{-1} είναι αντίστροφο τού p για τή συνένωση.

Λήμμα 5.1.1. *Έστω A τύπος.*

1. *Για οποιαδήποτε $x, y, z, w : A$, $p : x = y$, $q : y = z$ και $r : z = w$, $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.*
2. *Για οποιαδήποτε $x, y : A$ και $p : x = y$, $\mathsf{refl}_x \cdot p = p$ και $p \cdot \mathsf{refl}_y = p$.*

3. *Για οποιαδήποτε* $x, y : A$ *και* $p : x = y$, $p \bullet p^{-1} = \mathsf{refl}_x$ *και* $p^{-1} \bullet p = \mathsf{refl}_y$.

Οι ιδιότητες αυτές είναι τά αξιώματα τής εξής αλγεβρικής δομής:

Ορισμός 5.1.2. Ένα *ομαδοειδές (groupoid)* είναι μία κατηγορία, όλοι οι μορφισμοί τής οποίας είναι ισομορφισμοί.

Αυτό που μάς λέει τό λήμμα 5.1.1 είναι ότι κάθε τύπος A, εφοδιασμένος με σταθερά μονοπάτια, συνένωση και αντιστροφή μονοπατιών είναι ένα ομαδοειδές, με αντικείμενα τά σημεία τού A, μορφισμούς από τό x στό y τά μονοπάτια από τό x στό y, σύνθεση τή συνένωση μονοπατιών, ταυτοτικούς μορφισμούς τά σταθερά μονοπάτια, και αντίστροφους μορφισμούς τά αντίστροφα μονοπάτια.

Απόδειξη τού λήμματος. Σε όλες τίς περιπτώσεις, θα επιστρατεύσουμε τήν αρχή επαγωγής τής ισότητας προκειμένου να αναγάγουμε τό γενικό αποδεικτέο στό ειδικό στό οποίο όλα τά μονοπάτια είναι σταθερά.

1. Θα κανουμε διαδοχικά επαγωγή στά p, q, και r. Θεωρούμε τήν οικογένεια $(x, y : A, p : x = y, z : A, q : y = z, w : A, r : z = w)\, C(x, y, p, z, q, w, r)$, όπου

   $$C(x, y, p, z, q, w, r) :\equiv (p \bullet q) \bullet r = p \bullet (q \bullet r).$$

   Κατ' αρχάς έχουμε

   $$(\mathsf{refl}_x \bullet \mathsf{refl}_x) \bullet \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x \bullet \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$$

   και

   $$\mathsf{refl}_x \bullet (\mathsf{refl}_x \bullet \mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_x \bullet \mathsf{refl}_x \equiv \mathsf{refl}_x$$

   και επομένως

   $$\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x} : C(x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x).$$

   Μπορούμε επομένως να ορίσουμε ένα

   $$u(x, w, r) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x, w, r)$$

   μέσω τής επαγωγής

   $$u(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}.$$

   Εν συνεχεία ορίζουμε ένα

   $$v(x, z, q, w, r) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q, w, r)$$

   μέσω τής επαγωγής

   $$v(x, x, \mathsf{refl}_x, w, r) :\equiv u(x, w, r).$$

   Τέλος ορίζουμε τό επιθυμητό στοιχείο

   $$\mathsf{assoc}(x, y, p, z, q, w, r) : C(x, y, p, z, q, w, r)$$

   μέσω τής επαγωγής

   $$\mathsf{assoc}(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q, w, r) :\equiv v(x, z, q, w, r).$$

2. Δείχνουμε τήν πρώτη ισότητα. Πλήρως διατυπωμένο, τό ζητούμενο είναι να ορίσουμε ένα

$$\mathsf{lunit}(x, y, p) : \mathsf{refl}_x \bullet p = p.$$

Αν θεωρήσουμε τήν οικογένεια $(x, y : A, p : x = y)\, C(x, y, p)$ με $C(x, y, p) :\equiv \mathsf{refl}_x \bullet p = p$, τότε,

$$\begin{aligned} C(x, x, \mathsf{refl}_x) &\equiv \mathsf{refl}_x \bullet \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x \\ &\equiv \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x, \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να ορίσουμε τό $\mathsf{lunit}(x, y, p)$ με επαγωγή στό p, θέτοντας

$$\mathsf{lunit}(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}.$$

Όμοια ορίζεται ένα

$$\mathsf{runit}(x, y, p) : p \bullet \mathsf{refl}_y = p.$$

3. Για τήν πρώτη ισότητα, θεωρούμε τήν οικογένεια $(x, y : A, p : x = y)\, C(x, y, p)$ με $C(x, y, p) :\equiv p \bullet p^{-1} = \mathsf{refl}_x$. Τότε,

$$\begin{aligned} C(x, x, \mathsf{refl}_x) &\equiv \mathsf{refl}_x \bullet (\mathsf{refl}_x)^{-1} = \mathsf{refl}_x \\ &\equiv \mathsf{refl}_x \bullet \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x \\ &\equiv \mathsf{refl}_x = \mathsf{refl}_x. \end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε ένα

$$\mathsf{rinv}(x, y, p) : C(x, y, p)$$

μέσω τής επαγωγής

$$\mathsf{rinv}(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}.$$

Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται παρομοίως. □

5.2 Οι συναρτήσεις είναι συναρτητές

Συνεχίζοντας, θα εξετάσουμε τή συμπεριφορά τών συναρτήσεων στά μονοπάτια. Θα δούμε ότι όπως οι τύποι είναι αυτομάτως (∞-)ομαδοειδή, έτσι και οι συναρτήσεις είναι αυτομάτως ομομορφισμοί ομαδοειδών.

Λήμμα 5.2.1. *Η δράση μιας συνάρτησης $f : A \to B$ στά μονοπάτια τού A είναι ομομορφική:*

1. $f(\mathsf{refl}_x) = \mathsf{refl}_{f(x)}$,
2. $f(p \bullet q) = f(p) \bullet f(q)$,
3. $f(p^{-1}) = f(p)^{-1}$.

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε, κατ' αρχάς, τήν ορίζουσα σχέση τής εφαρμογής τής f στά μονοπάτια τού A: Για $x : A$,

$$f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(x)}.$$

1. Άμεσο.
2. Μπορούμε να κάνουμε επαγωγή σε οποιοδήποτε από τά p και q, ή σε αμφότερα· στήν τελευταία περίπτωση, που είναι και η ενδεδειγμένη, θεωρούμε τήν οικογένεια $(x, y : A, p : x = y, z : A, q : y = z)\, C(x, y, p, z, q)$ με

   $$C(x, y, p, z, q) :\equiv f(p \bullet q) = f(p) \bullet f(q).$$

   Έχουμε

   $$f(\mathsf{refl}_x \bullet \mathsf{refl}_x) \equiv f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(y)}$$

   και

   $$f(\mathsf{refl}_x) \bullet f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(y)} \bullet \mathsf{refl}_{f(y)} \equiv \mathsf{refl}_{f(y)}$$

   και επομένως

   $$\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{f(x)}} : C(x, x, \mathsf{refl}_x, x, \mathsf{refl}_x).$$

   Άρα μπορούμε να ορίσουμε, για $x, z : A$ και $q : x = z$, ένα

   $$u(x, z, q) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q)$$

   με τήν επαγωγή

   $$u(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{u(x)}}.$$

   Εν συνεχεία ορίζουμε, με επαγωγή στό p, ένα

   $$v(x, y, p, z, q) : C(x, y, p, z, q)$$

   θέτοντας

   $$v(x, x, \mathsf{refl}_x, z, q) :\equiv u(x, z, q)$$

   που είναι και τό ζητούμενο.
3. Θεωρούμε τήν οικογένεια $(x, y : A, p : x = y)\, C(x, y, p)$ με

   $$C(x, y, p) :\equiv f(p^{-1}) = f(p)^{-1}.$$

   Οι υπολογισμοί δίνουν

   $$f(\mathsf{refl}_x^{-1}) \equiv f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(x)},$$

   και

   $$f(\mathsf{refl}_x)^{-1} \equiv \mathsf{refl}_{f(x)}^{-1} \equiv \mathsf{refl}_{f(x)},$$

   οπότε έχουμε

   $$\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{f(x)}} : C(x, x, \mathsf{refl}_x).$$

Μπορούμε επομένως να ορίσουμε ένα

$$t(x, y, p) : C(x, y, p)$$

θέτοντας

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_{f(x)}},$$

που είναι τό ζητούμενο.

Εναλλακτικά, μπορούμε να μιμηθούμε τήν απόδειξη τής διατήρησης τών αντιστρόφων από ομομορφισμούς ομάδων:

$$\begin{aligned} f(p^{-1}) &= f(p^{-1}) \bullet \mathsf{refl}_x \\ &= f(p^{-1}) \bullet (f(p) \bullet f(p)^{-1}) \\ &= (f(p^{-1}) \bullet f(p)) \bullet f(p)^{-1} \\ &= (f(p^{-1} \bullet p)) \bullet f(p)^{-1} \\ &= f(\mathsf{refl}_x) \bullet f(p)^{-1} \\ &= \mathsf{refl}_{f(x)} \bullet f(p)^{-1} \\ &= f(p)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Τό επόμενο λήμμα βεβαιώνει ότι ο παραπάνω ορισμός τής δράσης τής f στά μονοπάτια είναι συναρτητικός ως προς f. Ας θυμηθούμε τίς βασικές κατηγορικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων:

$$\begin{aligned} \mathsf{id}_A &:\equiv \lambda(x : A)\, x, \\ g \circ f &:\equiv \lambda(x : A)\, g(f(x)). \end{aligned}$$

Λήμμα 5.2.2. *1.* $\mathsf{id}_A(p) = p$,

2. $(g \circ f)(p) = g(f(p))$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στό p, αρκεί να ελέγξουμε καθεμία από τίς ισότητες στήν περίπτωση που τό p είναι ένα σταθερό μονοπάτι. Για τήν πρώτη έχουμε

$$\mathsf{id}_A(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{id}_A(x)} \equiv \mathsf{refl}_x,$$

ενώ για τή δεύτερη,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\mathsf{refl}_x) &\equiv \mathsf{refl}_{(g \circ f)(x)} \equiv \mathsf{refl}_{g(f(x))}, \\ g(f(\mathsf{refl}_x)) &\equiv g(\mathsf{refl}_{f(x)}) \equiv \mathsf{refl}_{g(f(x))}. \end{aligned}$$

□

5.3 Οι ομοτοπίες είναι φυσικοί μετασχηματισμοί

Παραδοσιακά, θεωρούμε ότι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται εάν παίρνουν ίσες τιμές σε όλα τά ορίσματα. Σύμφωνα με την ερμηνεία των προτάσεων ως τύπων, αυτό υποδεικνύει ότι δύο (ενδεχομένως εξαρτώμενες) συναρτήσεις f και g θα πρέπει να ταυτίζονται εάν ο τύπος $\prod(x : A)\, f(x) = g(x)$ κατοικείται. Σύμφωνα με τήν ομοτοπική ερμηνεία, αυτός ο τύπος εξαρτώμενων συναρτήσεων αποτελείται από *συνεχή* μονοπάτια ή *συναρτητικές* ισοδυναμίες, και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ο τύπος τών *ομοτοπίων* ή τών *φυσικών ισομορφισμών*. Θα υιοθετήσουμε την τοπολογική ορολογία για τά στοιχεία τού τύπου αυτού.

Ορισμός 5.3.1. Ας θεωρήσουμε μία οικογένεια $(x : A)\ B(x)$ και δύο συναρτήσεις $f, g : \prod(x : A)\ B(x)$. Μία *ομοτοπία* από τήν f στήν g είναι ένα στοιχείο τού τύπου

$$f \sim g :\equiv \prod(x : A)\,(f(x) = g(x)).$$

Λήμμα 5.3.2. *Η ομοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η ανακλαστικότητα είναι προφανής:

$$\lambda(x : A)\ \mathsf{refl}_{f(x)} : f \sim f.$$

Για τή συμμετρία: Εάν $H : f \sim g$, τότε

$$\lambda(x : A)\ H(x)^{-1} : g \sim f.$$

Τέλος, για τή μεταβατικότητα, εάν $H : f \sim g$ και $I : g \sim h$, τότε

$$\lambda(x : A)\ H(x) \bullet I(x) : f \sim h. \qquad \square$$

Όπως οι συναρτήσεις είναι αυτομάτως συναρτητές (=ομομορφισμοί ομαδοειδών), οι ομοτοπίες είναι αυτομάτως φυσικοί μετασχηματισμοί.

Λήμμα 5.3.3. *Εάν $H : f \sim g$ ομοτοπία μεταξύ τών συναρτήσεων $f, g : \prod(x : A)\ B(x)$, και $p : x =_A y$, τότε $f(p) \bullet H(y) = H(x) \bullet g(p)$.*

Απόδειξη. Στήν περίπτωση ενός σταθερού μονοπατιού refl_x έχουμε

$$f(\mathsf{refl}_x) \bullet H(x) = \mathsf{refl}_{f(x)} \bullet H(x) = H(x),$$

και

$$H(x) \bullet g(\mathsf{refl}_x) = H(x) \bullet \mathsf{refl}_{g(x)} = H(x).$$

Τό ζητούμενο έπεται με επαγωγή στό p. $\square$

Πόρισμα 5.3.4. *Έστω $H : f \sim \mathsf{id}_A$ ομοτοπία, όπου $f : A \to A$. Τότε, για οποιοδήποτε $x : A$,*

$$H(f(x)) = f(H(x)).$$

Απόδειξη. Από τό προηγούμενο λήμμα, $f(H(x)) \bullet H(x) = H(f(x)) \bullet H(x)$. Τό ζητούμενο προκύπτει με απλοποίηση τού $H(x)$. $\square$

5.4 Οι οικογένειες τύπων είναι fibrations

Εφ' όσον οι εξαρτώμενες συναρτήσεις αποτελούν ουσιώδες συστατικό τής θεωρίας τύπων, θα χρειαστούμε επίσης μια εκδοχή τού λήμματος 2.2.3 για αυτές. Ωστόσο, αυτό δεν είναι τόσο απλό να διατυπωθεί, επειδή για $f : \prod(x : A) B(x)$ και $p : x_1 =_A x_2$, τά $f(x_1) : B(x_1)$ και $f(x_2) : B(x_2)$ είναι στοιχεία διαφορετικών τύπων, ούτως ώστε a priori να μην μπορούμε καν να ρωτήσουμε αν είναι ίσα. Προκειμένου να συσχετίσουμε τά $f(x_1)$ και $f(x_2)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τό transport· μία ισοδύναμη, πλην κανονικότερη λύση είναι να ορίσουμε μία ετερογενή ισότητα μεταξύ των στοιχείων διαφορετικών στιγμιοτύπων μιας οικογένειας.

Τό transport ορίστηκε ως ο αναδρομέας τής βασισμένης ισότητας. Γεωμετρικά, σχετίζεται με τήν ύψωση μονοπατιών σε μία ίνωση (fibration). Φανταζόμαστε μία οικογένεια $(x : A)\, B(x)$ σαν *ίνωση* με *βάση* A, με $B(x)$ τήν ίνα πάνω από τό x, και $\sum(B)$ τόν **ολικό χώρο** τής ίνωσης, με πρώτη προβολή $\mathsf{pr}_1 : \sum(B) \to A$. Η χαρακτηριστική ιδιότητα τής ίνωσης είναι ότι ένα μονοπάτι p στή βάση A με αφετηρία $\mathsf{pr}_1(z)$ έχει μία ύψωση r στόν ολικό χώρο $\sum(B)$ με αφετηρία z. Τό $\mathsf{transport}(p, z)$ μπορεί να νοηθεί ως τό άλλο άκρο αυτής τής ύψωσης.

Λήμμα 5.4.1 (Ιδιότητα ύψωσης μονοπατιών)**.** *Έστω $(x : A)\, B(x)$ οικογένεια τύπων. Για $y_1 : B(x_1)$, οποιοδήποτε μονοπάτι $p : x_1 = x_2$ μπορεί να υψωθεί σε ένα μονοπάτι*

$$\mathsf{lift}(y_1, p) : \mathsf{pair}(x_1, y_1) = \mathsf{pair}(x_2, \mathsf{transport}(p, y_1))$$

στόν $\sum(B)$, ούτως ώστε $\mathsf{pr}_1(\mathsf{lift}(y_1, p)) = p$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στό p· θέτουμε

$$\mathsf{lift}(y, \mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x,y)}.$$

Η ζητούμενη ιδιότητα βεβαιώνεται επίσης με επαγωγή στό p:

$$\mathsf{pr}_1(\mathsf{lift}(y, \mathsf{refl}_x)) \equiv \mathsf{pr}_1(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x,y)}) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(\mathsf{pair}(x,y))} \equiv \mathsf{refl}_x. \qquad \square$$

Στήν κλασική θεωρία τής ομοτοπίας, η ίνωση ορίζεται ως μία απεικόνιση για τήν οποία υπάρχουν υψώσεις μονοπατιών ενώ αντίθετα, μόλις δείξαμε ότι στή θεωρία τύπων, κάθε οικογένεια τύπων έρχεται με έναν ορισμένο μετασχηματισμό ύψωσης μονοπατιών.

Σχετικά με τήν εξαρτώμενη εκδοχή τού λήμματος 2.2.3, η γεωμετρική ενόραση είναι ότι δοθέντων συνάρτησης $f : \prod(x : A)\, B(x)$ και μονοπατιού $p : x_1 = x_2$ στόν A, μπορούμε να εφαρμόσουμε τήν f στό p και να πάρουμε ένα μονοπάτι πάνω από τό p στόν ολικό χώρο.

Τό λήμμα 2.2.3 μάς δίνει ένα τέτοιο μονοπάτι: Δοθείσης $f : \prod(B)$, μπορούμε να ορίσουμε τή μη εξαρτώμενη συνάρτηση $f' : A \to \sum(B)$ όπου $f'(x) :\equiv \mathsf{pair}(x, f(x))$, και εν συνεχεία να θεωρήσουμε τό $f'(p) : f'(x_1) = f'(x_2)$. Από τό λήμμα 5.2.2, $\mathsf{pr}_1(f'(p)) = (\mathsf{pr}_1 \circ f')(p) = \mathsf{id}_A(p) = p$, οπότε τό $f'(p)$ βρίσκεται όντως πάνω από τό p. Ωστόσο, αυτό δεν αποτυπώνεται στόν *τύπο* τού $f'(p)$.

5.4.1 Ετερογενής ισότητα

Είναι χρήσιμο να έχουμε έναν τύπο «μονοπατιών πάνω από τό p». Ένας προφανής υποψήφιος είναι ο τύπος

$$\sum(r : z_1 = z_2)\, \mathsf{pr}_1(r) = p.$$

Ωστόσο, ο τύπος αυτός περιέχει ανεπιθύμητη πληροφορία (υπάρχουν διάφοροι τρόποι με τούς οποίους τό $\mathsf{pr}_1(r)$ είναι ίσο με p). Μία λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε τόν transport, και να γράψουμε

$$y_1 =_p y_2 \quad :\equiv \quad \mathsf{transport}(p, y_1) = y_2.$$

Μία κανονικότερη λύση είναι να ορίσουμε μία σχέση ετερογενούς ισότητας μεταξύ τών στοιχείων διαφορετικών στιγμιοτύπων μιας οικογένειας. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε μία τέτοια σχέση σαν επαγωγική οικογένεια, όπως κάναμε με τήν ισότητα (άσκηση 5.4). Είναι, ωστόσο, τεχνικά απλούστερο να τήν ορίσουμε σαν αναδρομική οικογένεια.

Ορισμός 5.4.2. Έστω $(x : A)\ B(x)$ οικογένεια. Η *ετερογενής ισότητα* τής B είναι η σχέση

$$(x_1, x_2 : A, p : x_1 = x_2, y_1 : B(x_1), y_2 : B(x_2))\ y_1 =^B_p y_2$$

που ορίζεται μέσω τής αναδρομής (στό p)

$$y_1 =^B_{\mathsf{refl}_x} y_2 \quad :\equiv \quad y_1 =_{B(x)} y_2.$$

Είναι, φυσικά, απαραίτητο να μπορούμε να κάνουμε αναδρομή και επαγωγή στήν ετερογενή ισότητα. Θα πραγματευθούμε κατ' ευθείαν τήν επαγωγή. Για να ορίσουμε ένα

$$t(x_1, x_2, p, y_1, y_2, q) : C(x_1, x_2, p, y_1, y_2, q),$$

όπου $p : x_1 =_A x_2$ και $q : y_1 =_p y_2$, αρκεί, με επαγωγή στό p, να ορίσουμε τό

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x, y_1, y_2, q) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, y_1, y_2, q)$$

για $x : A$ και $q : y_1 =_{\mathsf{refl}_x} y_2$. Περαιτέρω, επειδή τό $y_1 =_{\mathsf{refl}_x} y_2$ έχει οριστεί να είναι τό $y_1 =_{B(x)} y_2$, αρκεί, με επαγωγή στό q, να ορίσουμε τό

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x, y, y, \mathsf{refl}_y) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, y, y, \mathsf{refl}_y).$$

Αρχή επαγωγής τής ετερογενούς ισότητας: Δοθέντων

- ενός τύπου $C(x_1, x_2, p, y_1, y_2, q)$ για $p : x_1 =_A x_2$ και $q : y_1 =_p y_2$, και
- ενός $c_{\mathsf{refl}}(x, y) : C(x, x, \mathsf{refl}_x, y, y, \mathsf{refl}_y)$ για $x : A$ και $y : B(x)$,

η σχέση

$$t(x, x, \mathsf{refl}_x, y, y, \mathsf{refl}_y) :\equiv c_{\mathsf{refl}}(x, y)$$

ορίζει τό $t(x_1, x_2, p, y_1, y_2, q)$ για τυχόντα $p : x_1 =_A x_2$ και $q : y_1 =_p y_2$.

Με τή βοήθεια τής ετερογενούς ισότητας μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε μία εκδοχή τού λήμματος 2.2.3 για εξαρτώμενες συναρτήσεις.

Λήμμα 5.4.3. *Για $f : \prod(x : A)\ B(x)$ και $p : x_1 =_A x_2$, ορίζεται*

$$f(p) : f(x_1) =_p f(x_2)$$

η οποία ικανοποιεί τή σχέση $f(\mathsf{refl}_x) \equiv \mathsf{refl}_{f(x)}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$f(p) : f(x_1) =_p f(x_2)$$

μέσω τής επαγωγής

$$f(\mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{f(x)}. \qquad \square$$

Για σταθερές οικογένειες, η ετερογενής ισότητα συμπίπτει με τήν οικεία ισότητα:

Λήμμα 5.4.4. *Έστω $(x : A)\ C(x)$ σταθερή οικογένεια, όπου $C(x) \equiv B$. Για $x_1, x_2 : A$, $p : x_1 = x_2$, και $y_1, y_2 : B$,*

$$y_1 =_p y_2 \quad \simeq \quad y_1 =_B y_2.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στό p, αρκεί

$$y_1 =_{\mathsf{refl}_x} y_2 \quad \simeq \quad y_1 =_B y_2,$$

που ισχύει εξ ορισμού. □

Άσκηση 5.1. Δείξτε, στηριζόμενοι στό προηγούμενο λήμμα, ότι, για σταθερές οικογένειες, ο παραπάνω ορισμός τής εφαρμογής συνάρτησης σε μονοπάτι συμφωνεί με αυτόν τού λήμματος 2.2.3.

Η άλλη χρησιμότητα τής ετερογενούς ισότητας είναι ότι μάς δίνει έναν τρόπο να χαρακτηρίσουμε τήν ισότητα στά εξαρτώμενα αθροίσματα.

Λήμμα 5.4.5. *Για $z_1, z_2 : \sum(x : A)\ B(x)$,*

$$z_1 = z_2 \quad \simeq \quad \sum(p : \mathsf{pr}_1(z_1) = \mathsf{pr}_1(z_2))\ \mathsf{pr}_2(z_1) =_p \mathsf{pr}_2(z_2).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, για $z : \sum(B)$ ορίζεται

$$t(z) : \mathsf{pr}_2(z) =_{\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(z)}} \mathsf{pr}_2(z)$$

μέσω τής επαγωγής

$$t(\mathsf{pair}(x, y)) :\equiv \mathsf{refl}_y.$$

Για $z_1, z_2 : \sum(B)$ θεωρούμε τή συνάρτηση

$$F : z_1 = z_2 \to \sum(p : \mathsf{pr}_1(z_1) = \mathsf{pr}_1(z_2))\ \mathsf{pr}_2(z_1) =_p \mathsf{pr}_2(z_2)$$

που ορίζεται μέσω τής αναδρομής

$$F(\mathsf{refl}_z) :\equiv \mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(z)}, t(z)).$$

Ειδικότερα,

$$F(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x,y)}) \equiv \mathsf{pair}(\mathsf{refl}_x, \mathsf{refl}_y).$$

Στήν αντίθετη κατεύθυνση, για $x_1, x_2 : A$, $p : x_1 = x_2$, $y_1 : B(x_1)$, $y_2 : B(x_2)$ και $q : y_1 =_p y_2$ ορίζουμε

$$u(p, q) : \mathsf{pair}(x_1, y_1) = \mathsf{pair}(x_2, y_2)$$

μέσω τής αναδρομής στήν ετερογενή ισότητα

$$u(\mathsf{refl}_x, \mathsf{refl}_y) :\equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x,y)}.$$

Εν συνεχεία ορίζουμε συνάρτηση

$$v : \sum(p : x_1 = x_2)\ y_1 =_p y_2 \to \mathsf{pair}(x_1, y_1) = \mathsf{pair}(x_2, y_2)$$

μέσω τής αναδρομής

$$v(\mathsf{pair}(p, q)) :\equiv u(p, q).$$

Τέλος, με αναδρομή στά $z_1, z_2 : \sum(B)$ ορίζουμε τή συνάρτηση

$$G : \sum(p : \mathsf{pr}_1(z_1) = \mathsf{pr}_1(z_2))\, \mathsf{pr}_2(z_1) =_p \mathsf{pr}_2(z_2) \to z_1 = z_2.$$

Ειδικότερα,

$$G(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_x, \mathsf{refl}_y)) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x,y)}.$$

Για να δείξουμε ότι $G(F(r)) = r$, παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, για $x : A$ και $y : B(x)$,

$$G(F(\mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x,y)})) \equiv \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x,y)}.$$

Με επαγωγή στό $z : \sum(B)$ συμπεραίνουμε ότι

$$G(F(\mathsf{refl}_z)) = \mathsf{refl}_z,$$

και με επαγωγή στό $r : z_1 = z_2$ ότι

$$G(F(r)) = r.$$

Για να δείξουμε ότι $F(G(o)) = o$, παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, για $x : A$ και $y : B(x)$,

$$F(G(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_x, \mathsf{refl}_y))) \equiv \mathsf{pair}(\mathsf{refl}_x, \mathsf{refl}_y).$$

Με επαγωγή στήν ετερογενή ισότητα παίρνουμε, για $p : x_1 =_A x_2$ και $q : y_1 =_p y_2$,

$$F(G(\mathsf{pair}(p, q))) = \mathsf{pair}(p, q),$$

μετά, με επαγωγή στό $o : \sum(p : x_1 = x_2)\, y_1 =_p y_2$, ότι

$$F(G(o)) = o,$$

και τέλος, με επαγωγή στά $z_1, z_2 : \sum(B)$, ότι

$$F(G(o)) = o$$

για $o : \sum(p : \mathsf{pr}_1(z_1) = \mathsf{pr}_1(z_2))\, \mathsf{pr}_2(z_1) =_p \mathsf{pr}_2(z_2)$. □

Άσκηση 5.2. Δείξτε ότι η συνάρτηση G που ορίστηκε στήν απόδειξη τού προηγούμενου λήμματος ικανοποιεί τή σχέση $G(\mathsf{pair}(\mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_1(z)}, \mathsf{refl}_{\mathsf{pr}_2(z)})) = \eta_{\sum(B)}(z)$.

Πόρισμα 5.4.6. *Για $z, w : A_1 \times A_2$,*

$$z = w \quad \simeq \quad (\mathsf{pr}_1(z) = pr_1(w)) \times (\mathsf{pr}_2(z) = pr_2(w)).$$

Λήμμα 5.4.7. *Για $x, y : \mathbf{1}$,*

$$x = y \quad \simeq \quad \mathbf{1}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $F : x = y \to \mathbf{1}$ μέσω τής αναδρομής $f(\mathsf{refl}_!) :\equiv\, !$. Στήν αντίθετη κατεύθυνση, ορίζουμε πρώτα $c : \mathbf{1} \to\, ! =\, !$ μέσω τής αναδρομής $c(!) :\equiv \mathsf{refl}_!$, και από αυτήν, με επαγωγή στά x και y, τήν $G : \mathbf{1} \to x = y$.

Προκειμένου να δείξουμε ότι $G(F(p)) = p$ για $p : x =_{\mathbf{1}} y$ αρκεί, με επαγωγή στό p, να δείξουμε ότι $G(F(\mathsf{refl}_x)) = \mathsf{refl}_x$ και, με επαγωγή στό x, ότι $G(F(\mathsf{refl}_!)) = \mathsf{refl}_!$, τό οποίο ισχύει εξ ορισμού. Για τήν άλλη σύνθεση αρκεί, με επαγωγή στό $\mathbf{1}$, να δείξουμε ότι $F(G(!)) =\, !$, και, με επαγωγή στά x και y, ότι $F(c(!)) =\, !$, τό οποίο επίσης ισχύει εξ ορισμού. □

5.5 Ασκήσεις

Άσκηση 5.3. Δείξτε ότι η ετερογενής ισότητα που ορίσαμε είναι ισοδύναμη με εκείνη τού [7, σελ. 183]:

$$y_1 =_p^B y_2 \quad \simeq \quad \mathsf{transport}^B(p, y_1) = y_2.$$

[Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στό p.]

Άσκηση 5.4. Η ετερογενής ισότητα μπορεί επίσης να οριστεί ως *επαγωγική* οικογένεια, δηλαδή ως η σχέση

$$(x_1, x_2 : A, p : x_1 = x_2, y_1 : B(x_1), y_2 : B(x_2))\ y_1 =_p' y_2$$

που έχει τόν μοναδικό κατασκευαστή

$$\mathsf{refl}(x, y) : y =_{\mathsf{refl}_x}' y.$$

Δείξτε ότι

$$y_1 =_p' y_2 \quad \simeq \quad y_1 =_p y_2.$$

[Υπόδειξη: Ορίστε αντίστροφες μεταξύ τους συναρτήσεις $F : y_1 =_p' y_2 \to y_1 =_p y_2$ και $G : y_1 =_p y_2 \to y_1 =_p' y_2$.]

Κεφάλαιο 6

Λογική και σύνολα I

Η θεωρία τύπων είναι μία συλλογή κανόνων για τόν χειρισμό τών τύπων και τών στοιχείων τους. Αλλά στά μαθηματικά, καθώς και στή φυσική γλώσσα γενικώς, χρησιμοποιούμε λογικούς συνδέσμους όπως «και» και «ή», και ποσοδείκτες όπως «για κάθε» και «υπάρχει». Η θεωρία τύπων μάς προσφέρει διάφορους τρόπους να αντιστοιχίσουμε τίς προτάσεις τής κοινής μαθηματικής γλώσσας σε τύπους.

Η αντιστοιχία Curry-Howard εκφράζει μία αυστηρά κατασκευαστική αντίληψη για τή λογική, η οποία έχει σημαντικές αρετές (κατασκευαστικότητα, υπολογιστικότητα, απλότητα). Παρ' όλ' αυτά (ή, ίσως, ακριβώς για αυτόν τόν λόγο), είναι ακατάλληλη για τήν τυποθεωρητική διατύπωση ορισμένων κλασικών αρχών, όπως η αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου και τό αξίωμα τής επιλογής.

Στό κεφάλαιο αυτό θα προετοιμάσουμε τό έδαφος για μία άλλη μετάφραση τής λογικής στήν θεωρία τύπων, η οποία θα μάς επιτρέψει να διαχειριστούμε αυτές τίς αρχές.

6.1 Λογική κατά Curry-Howard

Στά δύο προηγούμενα κεφάλαια είδαμε πώς ορισμένοι τύποι είναι (μεθ)ερμηνεύσιμοι ως προτάσεις, εις τρόπον ώστε οι κατασκευαστές τους να αντιστοιχούν στούς κανόνες εισαγωγής και οι αναδρομείς τους στούς κανόνες απαλοιφής τών προτάσεων αυτών. Αυτό μάς επιτρέπει να διατυπώνουμε ισχυρισμούς χρησιμοποιώντας λέξεις τής φυσικής γλώσσας όπως «και», «ή», «για κάθε» και ούτω καθεξής, ενώ μπορούμε ανά πάσα στιγμή να γράφουμε αυτούς τούς ισχυρισμούς σε αμιγώς τυποθεωρητική γλώσσα και να τούς εννοούμε ως τύπους. Και, εφ' όσον οι αποδείξεις είναι περιγραφές τεκμηρίων αλήθειας, τό να αποδείξουμε έναν τέτοιον ισχυρισμό συνίσταται στό να εμφανίσουμε ένα στοιχείο τού αντίστοιχου τύπου.

Αντιστρόφως, υπό τήν αντιστοιχία Curry-Howard, κάθε τύπος μπορεί να διαβαστεί σαν πρόταση, αρκεί τά στοιχεία του να εννοηθούν ως τεκμήρια αλήθειας. Ο Nat, για παράδειγμα, είναι η πρόταση που έχει τούς δύο κανόνες εισαγωγής

$$\frac{}{\mathsf{Nat}} \qquad\qquad \frac{\mathsf{Nat}}{\mathsf{Nat}}$$

και τόν κανόνα απαλοιφής

$$\frac{C \qquad \begin{array}{c}(\mathsf{Nat}, C)\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \mathsf{Nat}}{C}\ .$$

Οι κανόνες αυτοί μπορεί να έχουν ενδιαφέρον από τή σκοπιά τής δομικής θεωρίας αποδείξεων, αλλά από μία πιο πρακτική σκοπιά, σύμφωνα με τήν οποία η λογική είναι ένα εργαλείο για τήν οργάνωση και συστηματοποίηση ενός σώματος γνώσης, είναι άχρηστοι, καθώς δεν συνεισφέρουν στή σχέση τής αποδειξιμότητας. Επίσης, η φυσική αντίληψη για τόν Nat δεν είναι εκείνη μιας πρότασης, καθώς δεν μάς φαίνεται να εκφράζει κάποιο γεγονός, μαθηματικό ή άλλο· ειδικότερα, δεν αντιστοιχεί σε μία πρόταση τής φυσικής γλώσσας.

Στήν πράξη, οι μαθηματικές θεωρίες διαχωρίζουν τή λογική από τό καθ' εαυτού αντικείμενό τους: Η λογική αντιμετωπίζεται ως μία συλλογή αναλυτικών γεγονότων, και επομένως είναι κατά τό μάλλον ή ήττον κοινή ανάμεσα στίς διάφορες θεωρίες, ενώ τό ειδικό αντικείμενο, γενικά, δεν είναι[1].

Τεχνικώς, οι τύποι τών θεωριών αυτών είναι χωρισμένοι σε δύο ομάδες. Αφ' ενός έχουμε τά είδη (sorts), τά οποία παίζουν τόν ρόλο τών τύπων δεικτών· για τήν αριθμητική, αυτή η ομάδα περιέχει τόν Nat. Αφ' ετέρου, έχουμε τίς προτάσεις, οι οποίες παίζουν τόν ρόλο τών στιγμιοτύπων τών οικογενειών. Με άλλα λόγια, μόνο οικογένειες προτάσεων παραμετροποιημένες από είδη μπορούν να εκφραστούν. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι μόνο τά είδη έχουν διατυπώσιμες αρχές επαγωγής, και μάλιστα περιορισμένες σε τέτοιες οικογένειες· η αριθμητική, λόγου χάριν, περιλαμβάνει τήν αρχή τής επαγωγής τού Nat, άλλα μόνο για φόρμουλες τής γλώσσας.

Αυτή η μορφή οργάνωσης αντανακλά τή βασική πρόθεση πίσω από τήν εκάστοτε θεωρία. Αν, για παράδειγμα, τό αντικείμενο μελέτης μας είναι οι φυσικοί αριθμοί, τότε μάς ενδιαφέρει να μπορούμε να εκφράζουμε ιδιότητες (τής δομής) τών φυσικών αριθμών, ενώ ιδιότητες τών τεκμηρίων αλήθειας τών προτάσεων όχι και τόσο. Κατά συνέπεια, οι αρχές επαγωγής τών προτάσεων ούτε χρειάζονται ούτε μπορούν να διατυπωθούν στή γλώσσα τής αριθμητικής.

Αυτή η ως επί τό πλείστον συμβασιοκρατική εξήγηση υπονοεί ότι ανά πάσα στιγμή μπορούμε, αν τό θελήσουμε, να εμπλουτίσουμε μία γλώσσα πρώτης τάξης με κατηγορήματα επί τεκμηρίων αλήθειας, και τότε βεβαίως να προσθέσουμε και τίς κατάλληλες αρχές επαγωγής. Είναι, επίσης, γνωστό, ότι μπορούμε να προσθέσουμε τήν αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου και να πάρουμε τήν αντίστοιχη κλασική θεωρία. Ωστόσο, αυτά τά δύο δεν μπορούμε να τά κάνουμε ταυτόχρονα: Τό σχήμα

$$A + \neg A,$$

όπου A τυχών τύπος, αντιφάσκει με τό univalence. Προκειμένου να έχουμε στη διάθεσή μας τήν αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου, έστω και σαν ρητή υπόθεση, χρειαζόμαστε έναν άλλο τρόπο να εκφράσουμε αυτή τήν αρχή.

6.2 Συναρτήσεις επιλογής

Ας μεταφερθούμε για λίγο στή θεωρία συνόλων. Μπορούμε να αναπαραστήσουμε μία οικογένεια συνόλων $(B_x)_{x \in A}$ ως μία σχέση $R \subseteq A \times B$, όπου B η ένωση τών

[1]Ωστόσο, ο Frege επιχειρηματολογεί υπέρ τής αναλυτικότητας τής αριθμητικής, η δουλειά τού Bishop υποδεικνύει ότι η ανάλυση είναι, κατά πάσα πιθανότητα, αναλυτική, ενώ η ομοτοπική θεωρία τύπων κάνει τό ίδιο για μεγάλο μέρος τής άλγεβρας και τής γεωμετρίας.

B_x. Μία τέτοια οικογένεια είναι οικογένεια μή κενών συνόλων αν $(\forall x \in A)(\exists y \in B)R(x, y)$. Μία συνάρτηση επιλογής για μία οικογένεια $R \subseteq A \times B$ είναι μία $f : A \to B$ τέτοια που $(\forall x \in A)R(x, f(x))$. Η ύπαρξη συνάρτησεων επιλογής για οικογένειες μη κενών συνόλων,

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)R(x, y) \quad \to \quad (\exists f : A \to B)(\forall x \in A)R(x, f(x)), \tag{6.1}$$

είναι μία από τίς ισοδύναμες μορφές τού αξιώματος τής επιλογής. Ωστόσο, είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο αντίστοιχος τύπος,

$$\prod(x : A) \sum(y : B) \, R(x, y) \quad \to \quad \sum(f : A \to B) \prod(x : A) \, R(x, f(x)), \tag{6.2}$$

είναι κατοικημένος: Αν θεωρήσουμε μία $g : \prod(x : A) \sum(y : B) \, R(x, y)$, τότε έχουμε, για $x : A$,

$$\mathsf{pr}_1(g(x)) : B$$

και

$$\mathsf{pr}_2(g(x)) : R(x, \mathsf{pr}_1(g(x))),$$

οπότε

$$\mathsf{pair}(\lambda(x : A) \, \mathsf{pr}_1(g(x)), \lambda(x : A) \, \mathsf{pr}_2(g(x))) : \sum(f : A \to B) \prod(x : A) \, R(x, f(x)).$$

Αυτό συμβαίνει επειδή η κατασκευαστική ύπαρξη είναι αρκετά ισχυρή ώστε από μία οικογένεια κατοικημένων τύπων να μπορούν να εξαχθούν συγκεκριμένα στοιχεία αυτών, από τά οποία εν συνεχεία λαμβάνεται η συνάρτηση επιλογής. Κατά μία έννοια, επομένως, ο τύπος (6.2) αποτυγχάνει να συλλάβει τό νόημα τού (6.1). Επίσης, δεν έχει τίς ίδιες συνέπειες με αυτό: Στή θεωρία συνόλων, τό αξίωμα επιλογής συνεπάγεται τήν αρχή τού αποκλειόμενου τρίτου (θεώρημα Diaconescu-Goodman-Myhill)· τίποτα τέτοιο, βεβαίως, δεν συμβαίνει με τό (6.2). Τό χάσμα ανάμεσα στή συνολοθεωρητική και τήν τυποθεωρητική διατύπωση φαίνεται πιο καθαρά αν εξετάσουμε ένα άλλο γνωστό ισοδύναμο τού αξιώματος επιλογής, ότι τό καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας μη κενών συνόλων είναι μη κενό:

$$(\forall x \in A)B_x \neq \varnothing \quad \to \quad \prod_{x \in A} B_x \neq \varnothing.$$

Η τυποθεωρητική μετάφραση αυτού είναι

$$\prod(x : A) \, B(x) \quad \to \quad \prod(x : A) \, B(x).$$

Βλέπουμε, εδώ, ότι δεν γίνεται διάκριση ανάμεσα στό να είναι κατοικημένοι κάποιοι τύποι και στό να είναι κατοικημένο τό γινόμενό τους. Για να πετύχουμε μία μη τετριμμένη διατύπωση, εκείνο που χρειαζόμαστε είναι ένας άλλος τρόπος να εκφράσουμε τήν ιδιότητα ενός τύπου να είναι κατοικημένος, ώστε από τήν πληροφορία ότι ένας τύπος είναι κατοικημένος να μη μπορούμε αυτομάτως να εξαγάγουμε ένα στοιχείο του.

6.3 Απλές προτάσεις

Όταν οι τύποι διαβάζονται ως προτάσεις, τά στοιχεία τους ενδέχεται να περιέχουν πληροφορία πέραν τού ότι αυτές αληθεύουν, η οποία απορρέει από τήν ύπαρξη διαφορετικών μεταξύ τους τεκμηρίων αλήθειας, και όλες οι τυποθεωρητικές κατασκευές σέβονται αυτή τήν επιπλέον πληροφορία. Για παράδειγμα, ένα στοιχείο τού τύπου $A + B$ μάς αποκαλύπτει περισσότερα από τό απλό γεγονός ότι ο $A + B$ είναι κατοικημένος: Μάς λέει επίσης από ποιον προσθετέο έχει προέλθει. Ομοίως, ένα στοιχείο τού $\sum(x : A)B(x)$ περιέχει ως πρόσθετη πληροφορία έναν μάρτυρα ύπαρξης, δηλαδή ένα $a : A$ τέτοιο που $B(a)$. Ωστόσο, στήν πράξη δεν ενδιαφερόμαστε για τό πόσα και ποια τεκμήρια αλήθειας έχει μία πρόταση, αλλά μόνο για τό αν έχει τέτοια τεκμήρια, δηλαδή αν αληθεύει.

Μπορούμε να λάβουμε μία πιο συμβατική λογική περιοριζόμενοι σε τύπους, τά στοιχεία τών οποίων δεν περιέχουν πληροφορία πλέον τού ότι είναι κατοικημένοι, και αντιμετωπίζοντας μόνο αυτούς ως προτάσεις. Αυτό υποδεικνύει τόν ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 6.3.1. Μία *απλή πρόταση (mere proposition)* είναι ένας τύπος, όλα τά στοιχεία τού οποίου είναι ίσα μεταξύ τους.

Μπορούμε να γράψουμε τόν παραπάνω ορισμό ως τόν τύπο

$$\mathrm{IsProp}(A) :\equiv \prod(x, y : A)\; x = y.$$

Απόρροια τού παραπάνω ορισμού είναι ότι η λογική ισοδυναμία μεταξύ απλών προτάσεων ταυτίζεται με τήν ισοδυναμία:

Λήμμα 6.3.2. *Για απλές προτάσεις A και B, εάν $A \to B$ και $B \to A$, τότε $A \simeq B$.*

Απόδειξη. Εάν $f : A \to B$ και $g : B \to A$ τότε, εφ' όσον ο A είναι απλή πρόταση, για $x : A$ θα έχουμε $g(f(x)) = x$· όμοια, για $y : B$ έχουμε $f(g(y)) = y$. Άρα, οι f και g είναι αντίστροφες μεταξύ τους. □

Άσκηση 6.1. Δείξτε ότι αν ο A είναι απλή πρόταση και $A \simeq B$, τότε ο B είναι επίσης απλή πρόταση.

Σε συνέχεια τής συζήτηση που μάς οδήγησε στόν ορισμό 6.3.1, αρμόζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι οι αρχές επαγωγής τών απλών προτάσεων δεν είναι, γενικά, ιδιαίτερα χρήσιμες· για παράδειγμα,

Λήμμα 6.3.3. *Αν ο $A_1 \times A_2$ είναι απλή πρόταση, τότε η αρχή επαγωγής του συνάγεται από τήν αρχή αναδρομής του.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τό λήμμα 3.9.5 και τήν άσκηση που τό ακολουθεί, η αρχή επαγωγής τού $A_1 \times A_2$ είναι ισοδύναμη με τήν ισότητα

$$\mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

η οποία, εφ' όσον ο $A_1 \times A_2$ είναι απλή πρόταση, ικανοποιείται αυτομάτως. □

Άσκηση 6.2. Βελτιώστε τήν απόδειξη τού λήμματος: Δείξτε ότι, δοθέντος ενός

$$\eta_{A_1 \times A_2}(x) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

για κάθε $x : A_1 \times A_2$, μπορούμε να ορίσουμε ένα

$$\eta'_{A_1 \times A_2}(x) : \mathsf{pair}(\mathsf{pr}_1(x), \mathsf{pr}_2(x)) = x$$

ούτως ώστε $\eta'_{A_1 \times A_2}(\mathsf{pair}(x_1, x_2)) = \mathsf{refl}_{\mathsf{pair}(x_1, x_2)}$.

Ας σημειωθεί, ωστόσο, ότι η αρχή επαγωγής ενός τύπου είναι συνήθως απαραίτητη προκειμένου να δείξουμε ότι ο τύπος αυτός είναι απλή πρόταση.

Στο εξής, όπως και μέχρι τώρα, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τήν αντιστοιχία Curry-Howard για να μετεγγράφουμε στή θεωρία τύπων τίς προτάσεις που θα διατυπώνουμε στή φυσική γλώσσα, καθώς είναι αυτή που κατά κανόνα εκφράζει πιστά αυτό που θέλουμε να πούμε. Στις μεμονωμένες περιπτώσεις που θα εννοούμε κάτι άλλο, θα τό δηλώνουμε ρητά. Με τή λογική τών απλών προτάσεων θα ασχοληθούμε διεξοδικά στό κεφάλαιο (forward reference).

6.4 Σύνολα κ.λπ.

Ενώ οι τύποι γενικά συμπεριφέρονται σαν χώροι ή ανώτερα ομαδοειδή, κάποιοι από αυτούς συμπεριφέρονται περισσότερο σαν τά σύνολα ενός παραδοσιακού συνολοθεωρητικού συστήματος. Κατηγορικά, μπορούμε να θεωρήσουμε διακριτά ομαδοειδή, τά οποία προσδιορίζονται από ένα σύνολο αντικειμένων και μόνο ταυτοτικούς μορφισμούς και ανώτερους μορφισμούς, ενώ τοπολογικά, μπορούμε να εξετάσουμε χώρους που έχουν τή διακριτή τοπολογία. Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε ομαδοειδή ή χώρους που είναι *ισοδύναμοι* με ομαδοειδή ή χώρους αυτού τού είδους· αφού ό,τι κάνουμε στή θεωρία τύπων είναι μέχρις ομοτοπίας, δεν αναμένεται να μπορούμε να τά ξεχωρίσουμε.

Διαισθητικά, θα περιμέναμε από έναν τύπο να «είναι σύνολο» με αυτή τήν έννοια, εάν «δεν έχει γεωμετρία»: οποιαδήποτε δύο παράλληλα μονοπάτια είναι ίσα (μέχρις ομοτοπίας), και τό ίδιο ισχύει για παράλληλα ανώτερα μονοπάτια σε όλες τίς διαστάσεις. Ευτυχώς, επειδή τά πάντα στή θεωρία τύπων είναι αυτομάτως συναρτητικά/συνεχή, αρκεί να τό αιτηθούμε αυτό στό κατώτατο επίπεδο.

Ορισμός 6.4.1. Ο τύπος A είναι *σύνολο* όταν, για οποιαδήποτε $x, y : A$, ο τύπος $x = y$ είναι απλή πρόταση.

Γράφουμε

$$\mathrm{IsSet}(A) :\equiv \prod(x, y : A)\,\mathrm{IsProp}(x = y).$$

Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε στήν επόμενη διάσταση, και να ονομάσουμε (απλό) ομαδοειδές (ή 1-ομαδοειδές) έναν τύπο, όλες οι ισότητες τού οποίου είναι σύνολα,

$$\mathrm{IsGroupoid}(A) :\equiv \prod(x, y : A)\,\mathrm{IsSet}(x = y),$$

και ούτω καθεξής. Αντ' αυτού, θα ορίσουμε ολόκληρη τήν κλίμακα με αναδρομή, ξεκινώντας μάλιστα ένα επίπεδο κάτω από τίς απλές προτάσεις:

Ορισμός 6.4.2. Ένας τύπος A ονομάζεται *συσταλτός (contractible)* αν υπάρχει $a : A$, τό *κέντρο συστολής* τού A, ούτως ώστε $a = x$ για οποιδήποτε $x : A$.

Με άλλα λόγια, έχουμε έναν τύπο

$$\mathrm{IsContr}(A) :\equiv \sum(a : A)\,\prod(x : A)\, a = x.$$

Λήμμα 6.4.3. *Ο A είναι απλή πρόταση τότε και μόνο, αν για οποιαδήποτε $x, y : A$ ο τύπος $x = y$ είναι συσταλτός.*

Απόδειξη. Έστω A απλή πρόταση. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε $x, y : A$ έχουμε ένα $p(x, y) : x = y$. Θα δείξουμε ότι, για $x, y : A$, τό $p(x, x)^{-1} \bullet p(x, y)$ είναι κέντρο συστολής τού $x = y$, δηλαδή ότι για οποιοδήποτε $p : x = y$, $p(x, x)^{-1} \bullet p(x, y) = p$ ή, με επαγωγή στό p, ότι $p(x, x)^{-1} \bullet p(x, x) = \mathsf{refl}_x$. Τό αντίστροφο είναι προφανές. □

Μπορούμε να δώσουμε τόν εξής χαρακτηρισμό τής συσταλτότητας:

Θεώρημα 6.4.4. *Για έναν τύπο A, τά ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο A είναι συσταλτός.*
2. *Ο A είναι κατοικημένη (ή αληθής) απλή πρόταση.*
3. *Ο A είναι ισοδύναμος με τόν* $\mathbf{1}$.

Απόδειξη. 1. ⇒ 2.: Εάν ο A έχει κέντρο συστολής a, τότε σίγουρα είναι κατοικημένος (από τό a), και για $x, y : A$ έχουμε $x = a = y$.

2. ⇒ 3.: Εφ' όσον οι A και $\mathbf{1}$ είναι αμφότεροι κατοικημένοι, υπάρχουν σταθερές συναρτήσεις $A \to \mathbf{1}$ και $\mathbf{1} \to A$. Επομένως, είναι λογικά ισοδύναμοι. Και εφ' όσον είναι απλές προτάσεις (ο $\mathbf{1}$ είναι απλή πρόταση από τό προηγούμενο βήμα τής απόδειξης), από τό λήμμα 6.3.2 έπεται ότι είναι ισοδύναμοι.

3. ⇒ 1.: Η συσταλτότητα τού A έπεται από τήν ισοδυναμία του με έναν συσταλτό τύπο. Αναλυτικότερα, αν οι $f : A \to \mathbf{1}$ και $g : \mathbf{1} \to A$ είναι αντίστροφες μεταξύ τους, τότε για $x : A$ έχουμε

$$! = f(x),$$

οπότε

$$g(!) = g(f(x)) = x.$$

Επομένως, ο A έχει κέντρο συστολής τό $g(!)$. □

Είναι συνεπές με τή θεωρία τύπων τού Martin-Löf να υποθέσουμε ότι κάθε τύπος είναι σύνολο· για να έχουμε γνήσια ανώτερους τύπους, χρειαζόμαστε τό univalence.

6.5 Ασκήσεις

Άσκηση 6.3. Έστω $(x : A)\ P(x)$ οικογένεια απλών προτάσεων. Για $p : x_1 =_A x_2$, $y_1 : P(x_1)$ και $y_2 : P(x_2)$, δείξτε ότι $y_1 =^P_p y_2$.

Κεφάλαιο 7

Ανώτεροι επαγωγικοί τύποι

Μέχρι τώρα κινούμασταν στήν επικράτεια τής θεωρίας τύπων τού Martin-Löf. Τώρα θα εισαγάγουμε τό ένα από τά δύο συστατικά που διαφοροποιούν τήν ομοτοπική θεωρία τύπων, στήν τρέχουσα μορφή της, από τή θεωρία τύπων τού Martin-Löf: Τούς ανώτερους επαγωγικούς τύπους. Αυτοί θα μάς οδηγήσουν στήν άλλη ειδοποιό διαφορά τής ομοτοπικής θεωρίας τύπων: τό univalence.

Όπως οι τύποι που έχουμε δει μέχρι τώρα, οι *ανώτεροι επαγωγικοί τύποι*, ή *τύποι ανώτερης διάστασης*, αποτελούν ένα γενικό σχήμα ορισμού νέων τύπων, τά στοιχεία τών οποίων παράγονται από κάποιους κατασκευαστές. Αντίθετα από τίς περιπτώσεις που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα, ο ορισμός ενός ανώτερου επαγωγικού τύπου μπορεί να περιλαμβάνει κατασκευαστές που παράγουν όχι μόνο στοιχεία, αλλά επίσης μονοπάτια και ανώτερα μονοπάτια στόν τύπο αυτόν.

7.1 Τό διάστημα

Τό διάστημα I είναι ο ανώτερος επαγωγικός τύπος που παράγεται από

- ένα σημείο $0_{\mathrm{I}} : \mathrm{I}$,
- ένα σημείο $1_{\mathrm{I}} : \mathrm{I}$, και
- ένα μονοπάτι $\mathsf{seg} : 0_{\mathrm{I}} = 1_{\mathrm{I}}$.

Η παραπάνω περιγραφή εννοείται ως γενίκευση τής περιγραφής τών τύπων μέσω κατασκευαστών. Φανταζόμενοι τούς τύπους ως (ανώτερα) ομαδοειδή, αυτή η γενικότερη έννοια παραγωγής έρχεται φυσικά: Εφ' όσον εκτός από στοιχεία υπάρχουν επίσης μονοπάτια, μονοπάτια μεταξύ μονοπατιών κ.ο.κ., έχει νόημα να έχουμε κατασκευαστές σε όλες τίς διαστάσεις. Επίσης, είναι ανάλογη με τήν περιγραφή μιας αλγεβρικής δομής με γεννήτορες και σχέσεις.

Η αρχή αναδρομής τού I λέει ότι, δοθέντος ενός τύπου C μαζί με

- ένα σημείο $c_0 : C$,
- ένα σημείο $c_1 : C$, και
- ένα μονοπάτι $p_{\mathsf{seg}} : c_0 = c_1$,

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{I})\, t(x) : C$ ο οποίος ικανοποιεί τίς σχέσεις

$$\begin{aligned} t(0_\mathrm{I}) &\equiv c_0, \\ t(1_\mathrm{I}) &\equiv c_1, \\ t(\mathsf{seg}) &= p_\mathsf{seg}. \end{aligned}$$

Για τεχνικούς λόγους, στήν τελευταία σχέση έχουμε προτασιακή ισότητα αντί για εξ ορισμού ισότητα.

Όσον αφορά τήν αρχή επαγωγής τού I, ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι για έναν μετασχηματισμό

$$(x : \mathrm{I})\, t(x) : C(x)$$

από τό λήμμα 5.4.3 έχουμε

$$t(\mathsf{seg}) : t(0_\mathrm{I}) =^C_\mathsf{seg} t(1_\mathrm{I})$$

Αυτό υποδεικνύει τήν εξής διατύπωση τής αρχής επαγωγής: Αν μάς έχει δοθεί μία οικογένεια $(x : \mathrm{I})\, C(x)$ μαζί με

- ένα σημείο $c_0 : C(0_\mathrm{I})$,
- ένα σημείο $c_1 : C(1_\mathrm{I})$, και
- ένα μονοπάτι $p_\mathsf{seg} : c_0 =^C_\mathsf{seg} c_1$,

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{I})\, t(x) : C(x)$ με

$$\begin{aligned} t(0_\mathrm{I}) &\equiv c_0, \\ t(1_\mathrm{I}) &\equiv c_1, \\ t(\mathsf{seg}) &= p_\mathsf{seg}. \end{aligned}$$

Συχνά, δεν μάς ενδιαφέρει πού ακριβώς θα απεικονιστεί τό seg μέσω τού οριζόμενου μετασχηματισμού, παρά μάς αρκεί να ξέρουμε ότι υπάρχει κατάλληλο μονοπάτι στό οποίο μπορεί να απεικονιστεί. Στήν περίπτωση αυτή, τό p_seg μπορεί να αποσιωπηθεί, οπότε οδηγούμαστε στήν εξής απλουστευμένη αρχή επαγωγής: Δοθέντων δύο σημείων $c_0 : C(0_\mathrm{I})$ και $c_1 : C(1_\mathrm{I})$ που ικανοποιούν τή σχέση

$$c_0 =^C_\mathsf{seg} c_1, \tag{7.1}$$

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{I})\, t(x) : C(x)$ με

$$\begin{aligned} t(0_\mathrm{I}) &\equiv c_0, \\ t(1_\mathrm{I}) &\equiv c_1. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε, επίσης, ότι στήν περίπτωση που οι τύποι $C(x)$ είναι απλές προτάσεις (ορισμός 6.3.1), η συνθήκη (7.1) ικανοποιείται αυτομάτως (άσκηση 6.3).

Άσκηση 7.1. Διατυπώστε τήν απλουστευμένη αρχή *αναδρομής* τού I.

Από ομοτοπική άποψη, τό διάστημα δεν είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον, καθώς είναι συσταλτός τύπος. Για να τό δείξουμε αυτό, θα χρειαστούμε τό εξής αποτέλεσμα.

Λήμμα 7.1.1. *Για* $p : x =_A y$ *και* $q : y =_A z$*,*

$$p =^{x=-}_{q} p \cdot q.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στά p και q, η ζητούμενη σχέση ανάγεται στήν

$$\mathsf{refl}_x =^{x=-}_{\mathsf{refl}_x} \mathsf{refl}_x,$$

για τήν οποία έχουμε τό τεκμήριο αλήθειας $\mathsf{refl}_{\mathsf{refl}_x}$. □

Λήμμα 7.1.2. *Ο τύπος* I *είναι συσταλτός.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι τό 0_{I} είναι κέντρο συστολής τού I. Από τό προηγούμενο λήμμα ξέρουμε ότι

$$\mathsf{refl}_{0_{\mathrm{I}}} =^{0_{\mathrm{I}}=-}_{\mathsf{seg}} \mathsf{seg}.$$

Επομένως, από τήν απλουστευμένη αρχή επαγωγής παίρνουμε, για οποιοδήποτε $x : \mathrm{I}$, ένα $\mathsf{contr}_x : 0_{\mathrm{I}} = x$, ούτως ώστε

$$\mathsf{contr}_{0_{\mathrm{I}}} \equiv \mathsf{refl}_{0_{\mathrm{I}}},$$
$$\mathsf{contr}_{1_{\mathrm{I}}} \equiv \mathsf{seg}.$$ □

Παρ' όλ' αυτά, η παρουσία τού διαστήματος έχει μη τετριμμένες τυποθεωρητικές συνέπειες· μάς επιτρέπει, φερ' ειπείν, να δείξουμε ότι οι τύποι συναρτήσεων είναι εκτασιακοί.

Θεώρημα 7.1.3. *Για οποιεσδήποτε* $f, g : \prod(x : A)\, B(x)$*, αν* $f \sim g$*, τότε* $f = g$*.*

Απόδειξη. Από τήν εκφώνηση μάς έχει δοθεί $H : f \sim g \equiv \prod(x : A)\, f(x) = g(x)$. Έστω $x : A$. Για $y : \mathrm{I}$, ορίζουμε $t_x(y) : B(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$t_x(0_{\mathrm{I}}) :\equiv f(x),$$
$$t_x(1_{\mathrm{I}}) :\equiv g(x),$$
$$t_x(\mathsf{seg}) := H(x).$$

Θέτοντας, για $y : \mathrm{I}$,

$$t(y) :\equiv \lambda(x : A)\, t_x(y) : \prod(x : A)\, B(x),$$

παίρνουμε τό σύνθετο μονοπάτι

$$f \overset{\eta_{\prod(B)}(f)^{-1}}{=\!=\!=} \lambda(x : A)\, f(x) \equiv t(0_{\mathrm{I}}) \overset{t(\mathsf{seg})}{=\!=} t(1_{\mathrm{I}}) \equiv \lambda(x : A)\, g(x) \overset{\eta_{\prod(B)}(g)}{=\!=\!=} g.$$ □

Η αρχή αναδρομής τού διαστήματος μάς λέει ότι οι συναρτήσεις από τόν I προς έναν τύπο A είναι, κατ' ουσίαν, μονοπάτια στόν A. Για να τό αποδείξουμε αυτό θα χρειαστούμε τήν ακόλουθη γενίκευση τού λήμματος 5.3.3.

Λήμμα 7.1.4. *Για τύπους* A, B *και συναρτήσεις* $f, g : A \to B$ *θεωρούμε τήν οικογένεια* $(x : A)\, C(x)$ *με* $C(x) :\equiv f(x) = g(x)$*. Για* $p : x =_A x'$*,* $q : C(x)$ *και* $q' : C(x')$*,*

$$q =^C_p q' \quad \simeq \quad q \cdot g(p) =_{f(x)=g(x')} f(p) \cdot q'.$$

Ειδικότερα,

$$q =^C_p f(p)^{-1} \cdot q \cdot g(p).$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στό p. □

Λήμμα 7.1.5. *Για οποιονδήποτε τύπο A,*

$$\mathrm{I} \to A \quad \simeq \quad \sum(x, y : A)\, x = y.$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε τά στοιχεία τού $\sum(x, y : A)\ x = y$ ως τριάδες (x, y, p) με $x, y : A$ και $p : x = y$. Στή μία κατεύθυνση, για $f : \mathrm{I} \to A$ σχηματίζεται η τριάδα

$$F(f) :\equiv (f(0_{\mathrm{I}}), f(1_{\mathrm{I}}), f(\mathsf{seg})).$$

Στήν αντίθετη κατεύθυνση, για $(x, y, p) : \sum(x, y : A)\ x = y$ ορίζεται συνάρτηση $G((x, y, p)) : \mathrm{I} \to A$ με

$$\begin{aligned} G((x,y,p))(0_{\mathrm{I}}) &\equiv x, \\ G((x,y,p))(1_{\mathrm{I}}) &\equiv y, \\ G((x,y,p))(\mathsf{seg}) &= p. \end{aligned}$$

Έστω $g :\equiv G(F(f))$· θα δείξουμε ότι $f = g$. Θεωρούμε τήν οικογένεια $(x : \mathrm{I})C(x)$, όπου $C(x) :\equiv f(x) = g(x)$. Από τίς ισότητες

$$\begin{aligned} \mathsf{refl}_{f(0_{\mathrm{I}})} &=^{C}_{\mathsf{seg}} f(\mathsf{seg})^{-1} \bullet \mathsf{refl}_{f(0_{\mathrm{I}})} \bullet g(\mathsf{seg}) && \text{(προηγούμενο λήμμα)} \\ &=^{C}_{\mathsf{refl}_{1_I}} \mathsf{refl}_{f(1_{\mathrm{I}})}. && (g(\mathsf{seg}) = f(\mathsf{seg})) \end{aligned}$$

λαμβάνουμε τό σύνθετο μονοπάτι

$$r : \mathsf{refl}_{f(0_{\mathrm{I}})} =^{C}_{\mathsf{seg}} \mathsf{refl}_{f(1_{\mathrm{I}})}.$$

Από τήν αρχή επαγωγής τού I ορίζεται, για $x : \mathrm{I}$, $H(x) : f(x) = g(x)$· τό ζητούμενο προκύπτει από τό θεώρημα 7.1.3.

Η απόδειξη ότι η G είναι δεξιά αντίστροφη τής F αφήνεται στόν αναγνώστη. □

7.2 Ο κύκλος

Ο *κύκλος* S^1 είναι ο ανώτερος τύπος που παράγεται από

- ένα σημείο $\mathsf{base} : \mathrm{S}^1$, και
- ένα μονοπάτι $\mathsf{loop} : \mathsf{base} = \mathsf{base}$.

Η αρχή αναδρομής τού κύκλου λέει ότι δοθέντος ενός τύπου C μαζί με

- ένα σημείο $c_{\mathsf{base}} : C$, και
- ένα μονοπάτι $p_{\mathsf{loop}} : c_{\mathsf{base}} = c_{\mathsf{base}}$,

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\ t(x) : C$ με

$$\begin{aligned} t(\mathsf{base}) &\equiv c_{\mathsf{base}}, \\ t(\mathsf{loop}) &= p_{\mathsf{loop}}. \end{aligned}$$

Γενικότερα, δοθείσης μιας οικογένειας $(x : \mathrm{S}^1)\ C(x)$ μαζί με

- ένα σημείο $c_{\mathsf{base}} : C(\mathsf{base})$, και
- ένα μονοπάτι $p_{\mathsf{loop}} : c_{\mathsf{base}} =^{C}_{\mathsf{loop}} c_{\mathsf{base}}$,

ορίζεται, με επαγωγή, μετασχηματισμός $(x : \mathsf{S}^1)\ t(x) : C(x)$ ο οποίος ικανοποιεί τίς σχέσεις

$$t(\mathsf{base}) \equiv c_{\mathsf{base}},$$
$$t(\mathsf{loop}) = p_{\mathsf{loop}}.$$

Και εδώ, αποσιωπώντας τό p_{loop} παίρνουμε τήν εξής απλουστευμένη εκδοχή τής αρχής επαγωγής: Δοθέντος ενός $c_{\mathsf{base}} : C(\mathsf{base})$ με

$$c_{\mathsf{base}} =^{C}_{\mathsf{loop}} c_{\mathsf{base}},$$

ορίζεται μετασχηματισμός $(x : \mathsf{S}^1)\ t(x) : C(x)$ ούτως ώστε

$$t(\mathsf{base}) \equiv c_{\mathsf{base}}.$$

Ώς παράδειγμα χρήσης τής επαγωγής αποδεικνύουμε τό ακόλουθο

Λήμμα 7.2.1 ([7, λήμμα 6.4.2]). *Υπάρχει* $f : \prod(x : \mathsf{S}^1)\ (x = x)$ *με* $f(\mathsf{base}) = \mathsf{loop}$.

Απόδειξη. Έστω $(x : \mathsf{S}^1)\ C(x)$ με $C(x) :\equiv x = x$. Εφαρμόζοντας τό λήμμα 7.1.4 στήν περίπτωση όπου αμφότερες οι f και g είναι η ταυτοτική τού S^1 και αμφότερα τά p και q είναι τό loop, παίρνουμε

$$\mathsf{loop} =^{C}_{\mathsf{loop}} \mathsf{loop}^{-1} \cdot \mathsf{loop} \cdot \mathsf{loop} =^{C}_{\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}} \mathsf{loop},$$

δηλαδή $\mathsf{loop} =^{C}_{\mathsf{loop}} \mathsf{loop}$. Η ζητούμενη f ορίζεται μέσω τής επαγωγής

$$f(\mathsf{base}) :\equiv \mathsf{loop}. \qquad \square$$

Έχουμε τό ανάλογο τού λήμματος 7.1.5:

Λήμμα 7.2.2. *Για οποιονδήποτε τύπο* A,

$$\mathsf{S}^1 \to A \quad \simeq \quad \sum(x : A)\ x = x.$$

Απόδειξη. Στή μία κατεύθυνση έχουμε τή συνάρτηση $F : (\mathsf{S}^1 \to A) \to \sum(x : A)\ x = x$ που στέλνει τήν $f : \mathsf{S}^1 \to A$ στό ζεύγος $(f(\mathsf{base}), f(\mathsf{loop}))$. Στήν άλλη κατεύθυνση ορίζεται συνάρτηση $G : (\sum(x : A)\ x = x) \to (\mathsf{S}^1 \to A)$ με

$$G((a, p))(\mathsf{base}) \equiv a,$$
$$G((a, p))(\mathsf{loop}) = p.$$

Για $f : \mathsf{S}^1 \to A$, έστω $g :\equiv G(F(f))$. Από τούς ορισμούς έχουμε

$$f(\mathsf{base}) \equiv g(\mathsf{base}),$$
$$f(\mathsf{loop}) = g(\mathsf{loop}).$$

Θεωρούμε τήν οικογένεια $(x : \mathrm{S}^1)\, C(x)$ με $C(x) :\equiv f(x) = g(x)$. Τό λήμμα 7.1.4 μάς λέει ότι

$$\mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})} =^C_{\mathsf{loop}} f(\mathsf{loop})^{-1} \cdot \mathsf{refl}_{\mathsf{base}} \cdot g(\mathsf{loop}) =^C_{\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}} \mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})},$$

δηλαδή $\mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})} =^C_{\mathsf{loop}} \mathsf{refl}_{f(\mathsf{base})}$, οπότε ορίζεται, με (απλουστευμένη) επαγωγή, μετασχηματισμός $(x : \mathrm{S}^1)\, t(x) : C(x)$. Έπεται ότι $f(x) = g(x)$ για οποιοδήποτε $x : \mathrm{S}^1$, και επομένως $f = g$.

Για $(a, p) : \sum(x : A)\, x = x$, έστω $(b, q) :\equiv F(G((a, p)))$. Από τούς ορισμούς έχουμε

$$a \equiv b,$$
$$p = q,$$

και επομένως, από τό θεώρημα 5.4.5, $(a, p) = (b, q)$. $\square$

Όπως και στήν περίπτωση τού διαστήματος, η απλουστευμένη αρχή επαγωγής επιδέχεται μία περαιτέρω απλούστευση, τήν *προτασιακή αρχή επαγωγής*: Δοθείσης οικογένειας $(x : \mathrm{S}^1)\, P(x)$ *απλών προτάσεων*, εάν $P(\mathsf{base})$, τότε $P(x)$ για κάθε $x : \mathrm{S}^1$.

7.3 Univalence

Θα ανέμενε κανείς, με βάση τή γεωμετρική αντίληψη τού S^1 ως κύκλου (με διακεκριμένο σημείο), ότι τό loop είναι μη τετριμμένο μονοπάτι. Μία προφανής ιδέα για να αποδείξουμε ότι $\mathsf{loop} \neq \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$ είναι να ακολουθήσουμε τό μοτίβο τής απόδειξης τού $\mathsf{true} \neq \mathsf{false}$ και να ορίσουμε μία (αναδρομική) οικογένεια $(x : \mathrm{S}^1)\, C(x)$ ούτως ώστε να υπάρχει $x : C(\mathsf{base})$ με $\mathsf{transport}^C(\mathsf{loop}, x) \neq \mathsf{transport}(\mathsf{refl}_{\mathsf{base}}, x)$. Ωστόσο, οι ορισμοί αναδρομικών οικογενειών επί ανώτερων επαγωγικών τύπων δεν είναι άμεσα διατυπώσιμοι.

7.3.1 Αναδρομικές οικογένειες

Τό σχήμα τού αναδρομικού ορισμού οικογενειών επί τού S^1 θα πρέπει να πηγαίνει κάπως έτσι: Δοθέντων

- ενός τύπου C_{base}, και
- ενός $p_{\mathsf{loop}} : C_{\mathsf{base}} = C_{\mathsf{base}}$

ορίζεται οικογένεια $(x : \mathrm{S}^1)\, C(x)$ η οποία ικανοποιεί τίς σχέσεις

$$C(\mathsf{base}) \equiv C_{\mathsf{base}},$$
$$C(\mathsf{loop}) = p_{\mathsf{loop}}.$$

Τό πρόβλημα με αυτή τή διατύπωση είναι, φυσικά, τό $C_{\mathsf{base}} = C_{\mathsf{base}}$· με άλλα λόγια, τί σημαίνει ένας τύπος να είναι ίσος με έναν τύπο. Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ένας τύπος $A = B$ για οποιουσδήποτε τύπους A και B, ο οποίος να ικανοποιεί τίς στοιχειώδεις ιδιότητες τής ισότητας, ήτοι

- για κάθε τύπο A, έχουμε ένα $\mathsf{refl}_A : A = A$, και
- αν $C(A, A, \mathsf{refl}_A)$ για κάθε τύπο A, τότε $C(A, B, p)$ για οποιοδήποτε $p : A = B$.

7.3.2 Ισότητα τύπων

Παραδοσιακά, λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to B$ είναι ισομορφισμός αν υπάρχει συνάρτηση $g : B \to A$ ούτως ώστε εκάτερη τών συνθέσεων $g \circ f$ και $f \circ g$ να είναι κατά σημείο ίση με τήν αντίστοιχη ταυτοτική, δηλαδή $g \circ f \sim \mathsf{id}_A$ και $f \circ g \sim \mathsf{id}_B$. Από ομοτοπική σκοπιά, αυτό θα πρέπει να ονομάζεται ομοτοπική ισοδυναμία, και από κατηγορική, θα πρέπει να ονομάζεται ισοδυναμία (ανώτερων) ομαδοειδών. Η έννοια αυτή εκφράζεται από τόν τύπο

$$\mathrm{QInv}(f) :\equiv \sum(g : B \to A)\ (g \circ f \sim \mathsf{id}_A \times f \circ g \sim \mathsf{id}_B).$$

Για παράδειγμα, η ταυτοτική ενός τύπου A είναι ισομορφισμός, με αντίστροφη τόν εαυτό της: Ορίζεται

$$h :\equiv \lambda(x : A)\ \mathsf{refl}_x : \mathsf{id}_A \circ \mathsf{id}_A \sim \mathsf{id}_A,$$

και επομένως

$$(\mathsf{id}_A, h, h) : \mathrm{QInv}(\mathsf{id}_A).$$

Μία προφανής ιδέα είναι να ορίσουμε τήν ισότητα ως τήν ισομορφία, δηλαδή ως τήν ύπαρξη ισομορφισμού. Ωστόσο, ο τύπος

$$A = B \quad :\equiv \quad \sum(f : A \to B)\ \mathrm{QInv}(f).$$

δεν συμπεριφέρεται καλά· εν συνεχεία, θα περιγράψουμε τόν λόγο.

Γενικότερα, δοθείσης οικογένειας $Q(f)$ για $f : A \to B$ για τυχόντες τύπους A και B, μπορούμε να ορίσουμε τή σχέση

$$A \stackrel{Q}{=} B \quad :\equiv \quad \sum(f : A \to B)\ Q(f).$$

Μία τέτοια Q, μαζί με στοιχεία $f_A : A \to A$ και $e_A : Q(f_A)$ για οποιονδήποτε τύπο A, είναι «κατάλληλη» αν τό ζεύγος

$$\mathsf{refl}^Q_A :\equiv (f_A, e_A) : A \stackrel{Q}{=} A$$

ικανοποιεί τήν αρχή επαγωγής τής ισότητας: Αν $C(A, A, \mathsf{refl}^Q_A)$ για κάθε τύπο A, τότε $C(A, B, p)$ για οποιοδήποτε $p : A \stackrel{Q}{=} B$.

Λήμμα 7.3.1. *Ας υποθέσουμε ότι για κάθε συνάρτηση f έχουμε λογική ισοδυναμία*

$$Q(f) \underset{\pi}{\overset{\iota}{\leftrightarrows}} P(f).$$

Αν η Q είναι κατάλληλη και $\iota(\pi(e_A)) = e_A$ για κάθε τύπο A, τότε $\iota \circ \pi \sim \mathsf{id}_{Q(f)}$ για κάθε f.

Απόδειξη. Έστω $e : Q(f)$, όπου $f : A \to B$. Τότε, $(f, e) : A \stackrel{Q}{=} B$. Αρκεί, επομένως, να δείξουμε τή γενικότερη σχέση

$$\iota(\pi(\mathsf{pr}_2(p))) = \mathsf{pr}_2(p)$$

για $p : A \stackrel{Q}{=} B$. Με επαγωγή στό p, αρκεί

$$\iota(\pi(\mathsf{pr}_2(\mathsf{refl}_A))) = \mathsf{pr}_2(\mathsf{refl}_A),$$

δηλαδή

$$\iota(\pi(e_A)) = e_A. \qquad \square$$

Πόρισμα 7.3.2. *Με τά δεδομένα τού προηγούμενου λήμματος, αν η P είναι οικογένεια απλών προτάσεων, τότε η Q είναι οικογένεια απλών προτάσεων.*

Απόδειξη. Για $x, y : Q(f)$, $x = \iota(\pi(x)) = \iota(\pi(y)) = y$. $\square$

Τό $\mathrm{QInv}(f)$ δεν είναι, γενικά, απλή πρόταση· για παράδειγμα, τό λήμμα 7.2.1 μαρτυρεί ότι ο $\mathrm{QInv}(\mathrm{id}_{S^1})$ έχει διάφορα στοιχεία. Ωστόσο, υπάρχουν άλλοι τρόποι να εκφράσουμε τό γεγονός ότι μία συνάρτηση $f : A \to B$ είναι αντιστρέψιμη, κάποιοι από τούς οποίους είναι απλές προτάσεις. Μία αναγκαία και ικανή συνθήκη, λ.χ., είναι ότι η f είναι 1-1 και επί· ισοδύναμα, ότι η αντίστροφη εικόνα καθενός στοιχείου τού B είναι μονοσύνολο. Τυποθεωρητικά, αυτό σημαίνει ότι η f έχει *συσταλτές ίνες*,

$$\mathrm{Fib}_f(y) :\equiv \sum(x : A)\, f(x) = b,$$
$$\mathrm{IsContr}(f) :\equiv \prod(y : B)\, \mathrm{IsContr}(\mathrm{Fib}_f(y)).$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο $\mathrm{IsContr}(f)$ είναι απλή πρόταση ισοδύναμη με τήν αντιστρεψιμότητα τής f. Στήν πράξη, η επιλογή τρόπου διατύπωσης δεν έχει σημασία· αρκεί να θεωρήσουμε ότι για κάθε συνάρτηση f έχουμε μία απλή πρόταση $\mathrm{IsEquiv}(f)$ που είναι λογικά ισοδύναμη με τήν αντιστρεψιμότητα τής f.

Έχοντας τήν έννοια τής ισοδυναμίας, μπορούμε να θέσουμε

$$A = B \quad :\equiv \quad \sum(f : A \to B)\, \mathrm{IsEquiv}(f).$$

Τά στοιχεία τού $A = B$, δηλαδή τά ζεύγη (f, e) με $f : A \to B$ και $e : \mathrm{IsEquiv}(f)$, θα τά καλούμε επίσης μονοπάτια από τόν A στόν B. Όταν τό e εννοείται, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι αν υπάρχει είναι μοναδικό, θα παραλείπεται και θα γράφουμε απ' ευθείας $f : A = B$· κατ' επέκτασιν, θα αναφερόμαστε στις ισοδυναμίες ως μονοπάτια. Ιδιαίτερα, για οποιονδήποτε τύπο A, έχουμε ένα μονοπάτι

$$\mathsf{refl}_A :\equiv (\mathsf{id}_A, e_A) : A = A.$$

Για να είναι καλά διατυπωμένη η αρχή τού ορισμού αναδρομικών οικογενειών επί τού S^1, πρέπει ακόμη να πούμε ποιο μονοπάτι είναι τό

$$C(\mathsf{loop}) : C(\mathsf{base}) = C(\mathsf{base}).$$

Γενικότερα, για μία οικογένεια $(x : A)\, B(x)$ και ένα μονοπάτι $p : x =_A y$, ορίζεται

$$B(p) : B(x) = B(y)$$

μέσω τής αναδρομής

$$B(\mathsf{refl}_x) :\equiv \mathsf{refl}_{B(x)}.$$

Η αρχή τού αναδρομικού ορισμού οικογενειών για τόν κύκλο είναι πλέον καλά διατυπωμένη. Με τόν ίδιο τρόπο διατυπώνονται οι αντίστοιχες αρχές και τών άλλων ανώτερων τύπων.

7.3.3 Univalence

Με τή βοήθεια τής αρχής αναδρομής τού διαστήματος μπορούμε να δείξουμε ότι η ισότητα τύπων ικανοποιεί τούς επιθυμητούς κανόνες εισαγωγής και απαλοιφής. Αφ' ενός, η ταυτοτική id_A ενός οποιουδήποτε τύπου A είναι ισομορφισμός, με αντίστροφη τήν ίδια. Επομένως, αντιστοιχεί σε ένα $\mathsf{refl}_A : A = A$, τό οποίο παίζει τόν ρόλο τού σταθερού μονοπατιού. Αφ' ετέρου, αν μάς έχουν δοθεί ένας τύπος $C(X)$ για οποιονδήποτε τύπο X και ένα μονοπάτι $p : A = B$, τότε ορίζεται με αναδρομή μία οικογένεια $(x : \mathrm{I})\ D(x)$ ούτως ώστε

$$\begin{aligned} D(0_{\mathrm{I}}) &\equiv A, \\ D(1_{\mathrm{I}}) &\equiv B, \\ D(\mathsf{seg}) &= p. \end{aligned}$$

Θέτοντας, για $x : \mathrm{I}$,

$$E(x) :\equiv C(D(x))$$

θα είναι

$$E(0_{\mathrm{I}}) \equiv C(D(0_{\mathrm{I}})) \equiv C(A),$$
$$E(1_{\mathrm{I}}) \equiv C(D(1_{\mathrm{I}})) \equiv C(B),$$

οπότε

$$E(\mathsf{seg}) : C(A) = C(B).$$

Εν κατακλείδει, η ισότητα τύπων ικανοποιεί τό indiscernibility of identicals.

Άσκηση 7.2. Γενικεύοντας τό ανωτέρω επιχείρημα, δείξτε ότι η ισότητα τύπων ικανοποιεί τόν κανόνα επαγωγής τής ισότητας. [Υπόδειξη: Θεωρήστε έναν τύπο $C(B, p)$ για $p : A = B$, και θέστε $E(x) :\equiv C(D(x), D(\mathsf{contr}_x))$ όπου $\mathsf{contr}_x : 0_{\mathrm{I}} = x$ (λήμμα 7.1.2).]

Τίποτα δεν μάς βεβαιώνει, ωστόσο, ότι ένας ανώτερος τύπος ικανοποιεί τήν έτσι διατυπωμένη αρχή αναδρομικού ορισμού οικογενειών· η εγκυρότητα τών εν λόγω αρχών είναι τό αντικείμενο τού επόμενου αξιώματος.

Αξίωμα 7.3.3 (Univalance I)**.** *Οι αναδρομικοί και οι επαγωγικοαναδρομικοί ορισμοί οικογενειών επί ανώτερων επαγωγικών τύπων που διατυπώνονται με τή βοήθεια τής ως άνω ορισμένης ισότητας τύπων είναι* καλοί*, με τήν έννοια ότι τά definienda υπάρχουν.*

Αυτό τό αξίωμα παίζει καίριο ρόλο στήν ομοτοπική θεωρία τύπων. Χωρίς αυτό, η θεωρία τών ανώτερων τύπων θα ήταν πολύ φτωχή (όχι, πάντως, τελείως τετριμμένη· π.χ., τό θεώρημα 7.1.3 δεν εξαρτάται από τό univalence). Είναι απαραίτητο, ιδιαίτερα, για τή θεωρία τών κατηγοριών και τή θεωρία τής ομοτοπίας· για παράδειγμα, απαιτείται ήδη από τό εξής αποτέλεσμα, που λέει ότι ο S^1 δεν είναι απλά συνεκτικός:

Λήμμα 7.3.4 (univalence)**.** $\mathsf{loop} \neq \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $\mathrm{not} : \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}$ με

$$\begin{aligned} \mathsf{not}(\mathsf{false}) &:\equiv \mathsf{true}, \\ \mathsf{not}(\mathsf{true}) &:\equiv \mathsf{false} \end{aligned}$$

είναι ισοδυναμία (είναι αντίστροφη τού εαυτού της). Επομένως, ορίζεται οικογένεια $(x : \mathrm{S}^1)\ C(x)$ μέσω τής αναδρομής

$$\begin{aligned} C(\mathsf{base}) &:\equiv \mathrm{Bool}, \\ C(\mathsf{loop}) &:= \mathrm{not}. \end{aligned}$$

Αν $\mathsf{loop} = \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$, τότε $\mathsf{not} = \mathsf{id}_{\mathsf{Bool}}$, και επομένως

$$\mathsf{true} = \mathsf{not}(\mathsf{false}) = \mathsf{id}_{\mathsf{Bool}}(\mathsf{false}) = \mathsf{false},$$

άτοπο. □

Πόρισμα 7.3.5 (univalence). *Ο τύπος* $\mathsf{base} = \mathsf{base}$ *δεν είναι απλή πρόταση.* □

Άσκηση 7.3. Γενικότερα, δείξτε ότι $\mathsf{loop}^n \neq \mathsf{refl}_{\mathsf{base}}$ για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n. [Υπόδειξη: Θεωρήστε έναν τύπο με $n+1$ τό πλήθος στοιχεία $s_0, \dots, s_n$, και τή συνάρτηση f η οποία μεταθέτει κυκλικά τά στοιχεία αυτά,

$$\begin{array}{rcl} f(s_0) & \equiv & s_1, \\ & \vdots & \\ f(s_{n-1}) & \equiv & s_n, \\ f(s_n) & \equiv & s_0. \end{array}$$

Μετά ακολουθήστε τό επιχείρημα τού προηγούμενου λήμματος.]

Μακράν συνηθέστερη είναι μία πιο «κλειστή» διατύπωση τού univalence για σύμπαντα. Ας θεωρήσουμε ένα σύμπαν (U, T). Για ένα μονοπάτι $p : x = y$ στό U, ορίσαμε πιο πάνω τό $T(p) : T(x) = T(y)$. Έχουμε, επομένως, μία συνάρτηση (για τήν οποία θα χρησιμοποιούμε τό ίδιο σύμβολο)

$$T : (x = y) \to (T(x) = T(y)).$$

Ορισμός 7.3.6. Το σύμπαν (U, T) είναι *univalent* αν η $T : (x = y) \to (T(x) = T(y))$ είναι ισοδυναμία για όλα τά $x, y : U$. Για τήν αντίστροφη τής T γράφουμε

$$\mathsf{ua} : (T(x) = T(y)) \to (x = y)$$

(από τά αρχικά τού «univalence axiom»).

Ξεκινώντας με ένα σύμπαν (U, T), μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό univalent σύμπαν (U^u, T^u) που να ανακλά (τουλάχιστον) τούς τύπους που ανακλά τό (U, T). Η κατασκευή τού (U^u, T^u) περιγράφεται από τόν εξής ανώτερο επαγωγικοαναδρομικό ορισμό.

0. Για $x : U$, ένα σημείο $u(x) : U^u$. Θέτουμε $T^u(u(x)) :\equiv T(x)$.
1. Για $x, y : U^u$ και $p : T^u(x) = T^u(y)$, ένα μονοπάτι $\mathsf{ua}(p) : x = y$. Θέτουμε $T^u(\mathsf{ua}(p)) := p$.
2. Για $x : U^u$, ένα (διδιάστατο) μονοπάτι $\mathsf{idtorefl}(x) : \mathsf{ua}(\mathsf{refl}_{T^u(x)}) = \mathsf{refl}_x$.

Ο ορισμός είναι καλός, αφού η τελευταία ισότητα διατηρείται από τόν T^u:

$$T^u(\mathsf{ua}(\mathsf{refl}_{T^u(x)})) = \mathsf{refl}_{T^u(x)} \equiv T^u(\mathsf{refl}_x).$$

Τό point τού ορισμού είναι ότι, για οποιαδήποτε $x, y : U^u$, οι συναρτήσεις

$$T^u : (x = y) \to (T^u(x) = T^u(y))$$

και

$$\mathsf{ua} : (T^u(x) = T^u(y)) \to (x = y)$$

είναι αντίστροφες μεταξύ τους: Αφ' ενός, για $p : T^u(x) = T^u(y)$ έχουμε $T^u(\mathsf{ua}(p)) = p$ εξ ορισμού (ρήτρα 1)· αφ' ετέρου, για $p : x = y$ η σχέση $\mathsf{ua}(T^u(p)) = p$ προκύπτει με επαγωγή στό p, αφού $\mathsf{ua}(T^u(\mathsf{refl}_x)) = \mathsf{refl}_x$ (ρήτρα 2). Έπεται ότι τό (U^u, T^u) είναι univalent.

Η παραπάνω κατασκευή μάς οδηγεί στήν ακόλουθη διατύπωση τού univalence:

Αξίωμα 7.3.7 (Univalence II). *Υπάρχουν univalent σύμπαντα που είναι κλειστά ως προς οσουσδήποτε και οποιουσδήποτε τρόπους σχηματισμού τύπων.*

Αντιστρόφως, αυτή η μορφή τού univalence μάς επιτρέπει να ορίζουμε (επαγωγικο)αναδρομικές οικογένειες επί ανώτερων επαγωγικών τύπων επικαλούμεοι τίς συνήθεις αρχές (επαγωγικο)αναδρομής τών τύπων αυτών. Για παράδειγμα, δοθέντος $p_{\mathsf{seg}} : C_0 = C_1$, θα υπάρχει univalent σύμπαν (U, T) και $c_0, c_1 : U$ ούτως ώστε $T(c_0) \equiv C_0$ και $T(c_1) \equiv C_1$. Επομένως, ορίζεται (χρησιμοποιώντας τή *συνήθη* αρχή αναδρομής τού διαστήματος!) συνάρτηση $f : \mathrm{I} \to U$ με

$$
\begin{aligned}
f(0_{\mathrm{I}}) &\equiv c_0, \\
f(1_{\mathrm{I}}) &\equiv c_1, \\
f(\mathsf{seg}) &= \mathsf{ua}(p_{\mathsf{seg}}).
\end{aligned}
$$

Η οικογένεια $(x : \mathrm{I})\, C(x)$ με $C(x) :\equiv T(f(x))$ έχει τίς προβλεπόμενες ιδιότητες:

$$
\begin{aligned}
C(0_{\mathrm{I}}) &\equiv C_0, \\
C(1_{\mathrm{I}}) &\equiv C_1, \\
C(\mathsf{seg}) &= p_{\mathsf{seg}}.
\end{aligned}
$$

7.3.4 Σύμπαντα κατά Russell

Αν τό σύμπαν (U, T) είναι univalent, τότε μπορούμε να δούμε τό T σάν εμφύτευση τού U στό «υπερσύμπαν» τών τύπων. Στήν περίπτωση αυτή, είναι βολικό να ταυτίζουμε τά στοιχεία τού U με τίς εικόνες τους και, παρακάμπτοντας τό T, να γράφουμε απ' ευθείας

$$A : U$$

αντί για

$$a : U, \text{ με } T(a) \equiv A.$$

Αυτός ο συμβολισμός είναι γνωστός ως *φορμαλισμός τών συμπάντων κατά Russell.* Όπως στή θεωρία συνόλων, δεν μπορούμε να έχουμε ένα σύμπαν U_∞ που να περιέχει όλους τούς τύπους, συμπεριλαμβανομένου τού εαυτού του $(U_\infty : U_\infty)$· κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε παράδοξα (και, αισίως, δεν υπάρχει τρόπος να οριστεί ένα τέτοιο σύμπαν). Αντ' αυτού μπορούμε να έχουμε μία ιεραρχία

$$U_0 : U_1 : U_2 : \cdots,$$

όπου κάθε σύμπαν U_n είναι στοιχείο τού επόμενου σύμπαντος U_{n+1}. Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ιεραρχία αυτή είναι *συσσωρευτική*, δηλαδή κάθε στοιχείο τού U_n είναι επίσης στοιχείο τού U_{n+1}. Φαινομενικά, αυτό έρχεται σε σύγκρουση με τή βασική αρχή τής θεωρίας τύπων ότι κάθε τύπος έχει τά δικά του στοιχεία και δεν τίθεται θέμα ένα στοιχείο ενός τύπου να είναι επίσης στοιχείο κάποιου άλλου τύπου, αλλά δεν είναι παρά ανώδυνη κατάχρηση συμβολισμού. Επίσης, θα μπορούσαμε να προεκτείνουμε τήν ιεραρχία στό υπερπεπερασμένο, θεωρώντας ένα σύμπαν U_ω που να περιέχει όλα τά U_n κ.ο.κ., αλλά αυτό είναι πια εσωτερικό θέμα τής θεωρίας τύπων χωρίς πρακτική χρησιμότητα.

Ο φορμαλισμός τών συμπάντων κατά Russell μάς επιτρέπει να χειριζόμαστε τούς τύπους όπως τά στοιχεία ενός οποιουδήποτε τύπου. Για παράδειγμα, μία οικογένεια C επί τού A είναι μία συνάρτηση

$$C : A \to U$$

προς κάποιο σύμπαν. Αυτό ισχύει, ειδικότερα, για οικογένειες επί ενός σύμπαντος· τό διμελές άθροισμα τύπων τού U, λ.χ., αντιπροσωπεύεται από μία συνάρτηση

$$+ : U \times U \to U.$$

Επίσης, έχουμε «πολυμορφικές» ταυτοτικές συναρτήσεις

$$\lambda(A : U)\ \lambda(x : A)\ x : \prod(A : U)\ A \to A.$$

Η οικογένεια F_n τών πεπερασμένων τύπων ενός σύμπαντος U μπορεί τώρα να οριστεί με τή βοήθεια τού αναδρομέα τού Nat:

$$F_n :\equiv \mathsf{rec}^U_{\mathrm{Nat}}(\mathbf{0}, (x : \mathrm{Nat}, y : U)\ y + \mathbf{1}, n).$$

Μπορούμε επίσης να σχηματίζουμε γινόμενα και αθροίσματα τέτοιων οικογενειών· τό άθροισμα όλων τών τύπων ενός σύμπαντος U, λ.χ., γράφεται

$$\sum(A : U)\ A$$

(και, για τήν περίπτωση που υπάρχει αμφιβολία, *δεν* είναι, γενικά, στοιχείο τού U).

Βιβλιογραφία

[1] Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, Academic Press, New York, 1967.

[2] Per Martin-Löf, *Intuitionistic Type Theory*, Studies in proof theory, vol. 1, Bibliopolis, Napoli, 1984.

[3] ______, *On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws*, Nordic journal of philosophical logic **1** (1996), no. 1, 11–60.

[4] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Aurora: Dover Modern Math Originals, Courier Dover Publications, 2017.

[5] Egbert Rijke, *Introduction to Homotopy Type Theory* (2022), https://arxiv.org/abs/2212.11082.

[6] Alfred Tarski, *The Concept of Truth in Formalized Languages*, Logic, Semantics, Metamathematics, 2nd ed. (J. Corcoran, ed.), Hackett, Indianapolis, 1983, pp. 152–278.

[7] The Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*, https://homotopytypetheory.org/book/. Institute for Advanced Study, 2013.