

# Ασκήσεις

Νίκος Ρήγας

16 Δεκεμβρίου 2023

**Άσκηση 1.** Αν  $A$  τύπος και  $P$  απλή πρόταση, δείξτε ότι ο τύπος  $A \simeq P$  είναι απλή πρόταση. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της ισοδυναμίας.]

**Άσκηση 2.** Δείξτε ότι  $\text{IsProp}(A) \simeq (A \simeq \|A\|)$  για οποιονδήποτε τύπο  $A$ .

**Άσκηση 3.** Δείξτε ότι ο  $\text{Is-}n\text{-type}(A) \rightarrow A$  είναι  $n$ -τύπος για οποιονδήποτε τύπο  $A$ . [Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για  $n > -2$ . Θα χρειαστείτε τον χαρακτηρισμό της ισότητας σε τύπους συναρτήσεων,  $(f = g) \simeq (f \sim g)$ .]

**Άσκηση 4.** Για  $n > -2$  δείξτε ότι ο  $A \times \text{Is-}n\text{-type}(A)$  είναι  $n$ -τύπος για οποιονδήποτε τύπο  $A$ .

**Άσκηση 5.** Δείξτε ότι  $\text{IsContr}(A) \simeq (A \times \text{IsProp}(A))$  για οποιονδήποτε τύπο  $A$ ,

**Άσκηση 6.** Δείξτε ότι οι ακόλουθοι τύποι είναι κατοικημένοι.

1.  $\|A\| \rightarrow (\text{IsProp}(A) \rightarrow A)$ ,
2.  $(\text{IsProp}(A) \rightarrow A) \rightarrow \neg\neg A$ .

**Άσκηση 7.** Δείξτε ότι  $(A \rightarrow \text{IsProp}(A)) \simeq \text{IsProp}(A)$  για οποιονδήποτε τύπο  $A$ . (Αυτό μάς λέει πως όταν επιδιώκουμε να δείξουμε ότι ένας τύπος είναι απλή πρόταση μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι είναι κατοικημένος.)

**Άσκηση 8.** Δείξτε ότι  $\text{IsContr}(A) \simeq (A \simeq \text{IsProp}(A))$  για οποιονδήποτε τύπο  $A$ .

**Άσκηση 9.** Δείξτε ότι ένας τύπος  $A$  είναι απλή πρόταση τότε και μόνο, αν ο  $A \rightarrow A$  είναι συσταλτός.

**Άσκηση 10.** Δείξτε ότι  $\text{IsProp}(A) \simeq (A \simeq \text{IsContr}(A))$  για οποιονδήποτε τύπο  $A$ .

**Άσκηση 11.** Δείξτε ότι παρουσία LEM κάθε απλή πρόταση είναι ισοδύναμη με μία εκ τών **0** και **1**.