

Ασκήσεις

Νίκος Ρήγας

5 Ιανουαρίου 2024

Ορισμός 1 (επί). Έστω $f : A \rightarrow B$.

1. Η f είναι *επί* αν για κάθε $y : B$ απλώς υπάρχει $x : A$ ούτως ώστε $f(x) = y$.
συμβολικά,

$$\prod (y : B) \parallel \sum (x : A) f(x) = y \parallel,$$

ή, σε λογικό συμβολισμό,

$$\forall (y : B) \exists (x : A) f(x) = y.$$

2. Η f είναι *πυκνή* (ή *κατηγορικά επί*) αν είναι απλοποιήσιμη από δεξιά, δηλ., $g_1 \circ f \sim g_2 \circ f$ συνεπάγεται $g_1 \sim g_2$ για οποιεσδήποτε $g_1, g_2 : B \rightarrow B'$.
3. Η f είναι *διασπώμενα επί* αν για κάθε $y : B$ υπάρχει $x : A$ ούτως ώστε $f(x) = y$.
συμβολικά,

$$\prod (y : B) \sum (x : A) f(x) = y.$$

4. Η f είναι *κατηγορικά διασπώμενα επί* αν έχει δεξιά αντίστροφη, δηλ., αν υπάρχει $g : B \rightarrow A$ ούτως ώστε $f \circ g \sim \text{id}_B$.

Άσκηση 1. Προσδιορίστε ποιες συνεπαγωγές ισχύουν ανάμεσα στις παραπάνω έννοιες «επί». [Υπόδειξη: Αν η f είναι πυκνή, τότε είναι επί.]

Ορισμός 2 (1-1). Έστω $f : A \rightarrow B$.

1. Η f είναι *1-1* αν $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται $x_1 = x_2$ για οποιαδήποτε $x_1, x_2 : A$.
2. Η f είναι *κατηγορικά 1-1* αν είναι απλοποιήσιμη από αριστερά, δηλ., $f \circ g_1 \sim f \circ g_2$ συνεπάγεται $g_1 \sim g_2$ για οποιεσδήποτε $g_1, g_2 : A' \rightarrow A$.
3. Η f είναι *εμφύτευση* αν η επαγόμενη συνάρτηση

$$f : (x_1 = x_2) \rightarrow (f(x_1) = f(x_2))$$

είναι ισοδυναμία για οποιαδήποτε $x_1, x_2 : A$.

4. Η f είναι *διασπώμενα 1-1* αν έχει αριστερή αντίστροφη, δηλ., αν υπάρχει $g : B \rightarrow A$ ούτως ώστε $g \circ f \sim \text{id}_A$.
5. Η f είναι *ισχυρά 1-1* αν η επαγόμενη συνάρτηση

$$f : (x_1 = x_2) \rightarrow (f(x_1) = f(x_2))$$

έχει αριστερή αντίστροφη για οποιαδήποτε $x_1, x_2 : A$.

Άσκηση 2. Προσδιορίστε ποιες συνεπαγωγές ισχύουν ανάμεσα στις παραπάνω έννοιες «1-1». [Υπόδειξη: Αν η f είναι 1-1, τότε είναι ισχυρά 1-1.]

Άσκηση 3. 1. Έστω $f : A \rightarrow B$ διασπώμενα επί. Αν ο A είναι n -τύπος, τότε ο B είναι n -τύπος.

2. Έστω $f : A \rightarrow B$ 1-1. Αν ο B είναι n -τύπος, τότε ο A είναι n -τύπος, για $n \geq -1$.
[Υπόδειξη: Θα χρειαστείτε κάποιες από τις συνεπαγωγές των προηγούμενων ασκήσεων.]

Άσκηση 4. Δείξτε ότι για μία συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ τά ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. Η f είναι ισοδυναμία.
2. Η f είναι εμφύτευση και επί.
3. Η f είναι 1-1 και διασπώμενα επί.