

Λογικομαθηματικές σχέσεις και αριθμητικές έννοιες στην προσχολική εκπαίδευση (504)

Μάθημα 11^ο

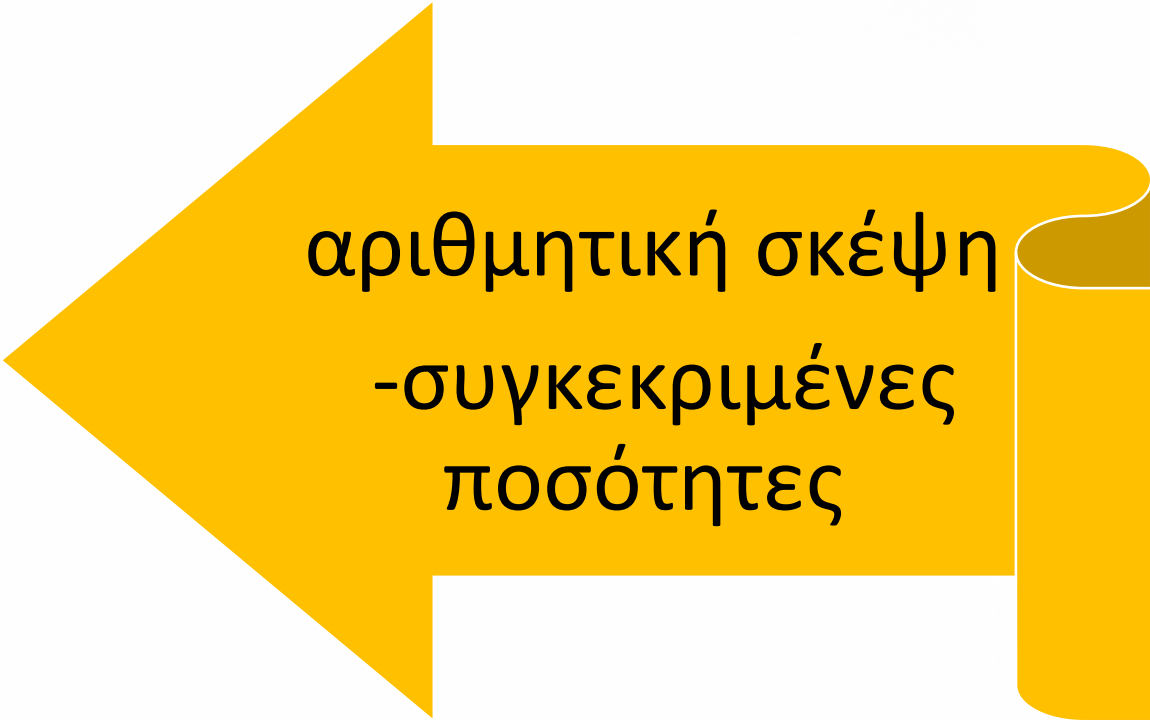
Τμήμα Επιστημών Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία, ΕΚΠΑ

Εξάμηνο: γ'

Διδάσκουσα: Χριστίνα Γκρέκα

Αθήνα, 2025

Τι είναι η Άλγεβρα και σε τι διαφέρει από την Αριθμητική;



αριθμητική σκέψη
-συγκεκριμένες
ποσότητες



αλγεβρική σκέψη
-απροσδιόριστες
ποσότητες

Ο δάσκαλος γυμναστικής αγόρασε για το σχολείο μπάλες ποδοσφαίρου που κόστισαν 120 ευρώ και κάποιες μπάλες μπάσκετ προς 20 ευρώ την κάθε μία. Το ποσό που έδωσε για αυτήν την αγορά του επέτρεπε να αγοράσει 11 μπάλες του μπάσκετ. Πόσες μπάλες μπάσκετ αγόρασε;

$$(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$$

Όλα τα χρήματα

$$11 - (120 \div 20) = 5$$

Πόσες μπάλες μπάσκετ
αντιστοιχούν σε 120 ευρώ.

Άλγεβρα

$$(11 \times 20 - 120) \div 20 = 5$$

$$11 - (120 \div 20) = 5$$


$$(11 \times 20 - 120) \div 20 = 11 - (120 \div 20)$$

περιγράφουν **την ίδια σχέση** με **διαφορετικό τρόπο**

Ανασκευή της σημασίας απλών συμβόλων και παραστάσεων από την αριθμητική
Πχ. το σύμβολο (=), εκτελώ μια πράξη (αριθμητική) → δήλωση σχέσης (άλγεβρα)

Αλγεβρική σκέψη:

- βλέπω **σχέσεις**
- αλλάζω **αναπαραστάσεις**
- καταλαβαίνω ότι διαφορετικές εκφράσεις μπορούν να λένε **το ίδιο πράγμα**

Άλγεβρα και Αλγεβρικός Συμβολισμός

Άλγεβρα

μελέτη των **μεταβολών**, των **σχέσεων**, των **κανονικοτήτων** και **δομών**, σε ένα περιβάλλον αναλυτικού συμβολικού συλλογισμού με χρήση **πολλαπλών αναπαραστάσεων**

Αλγεβρικός Συλλογισμός

συλλογισμός βασισμένος σε μορφές **δομημένων συντακτικά γενικεύσεων** και σε ενέργειες που καθοδηγούνται συντακτικά και σημασιολογικά (Karut, 1998)

Πλαίσιο ανάπτυξης αλγεβρικής σκέψης

Γενίκευση και
αφαίρεση μοτίβων και
κανονικοτήτων

Διαχείριση συμβόλων
που καθοδηγείται
συντακτικά

Μελέτη δομής και συστημάτων
που αποτελούν αφαιρέσεις
σχέσεων

Μελέτη συναρτήσεων
σχέσεων και μεταβολών

Μοντελοποίηση

Κατανόηση προτύπων, σχέσεων
και μεταβολών

Αναπαράσταση και ανάλυση
μαθηματικών καταστάσεων και
δομών χρησιμοποιώντας αλγεβρικά
σύμβολα

Χρήση μαθηματικών μοντέλων για
αναπαράσταση και κατανόηση
ποσοτικών σχέσεων
Ανάλυση μεταβολών σε διάφορα
πλαίσια

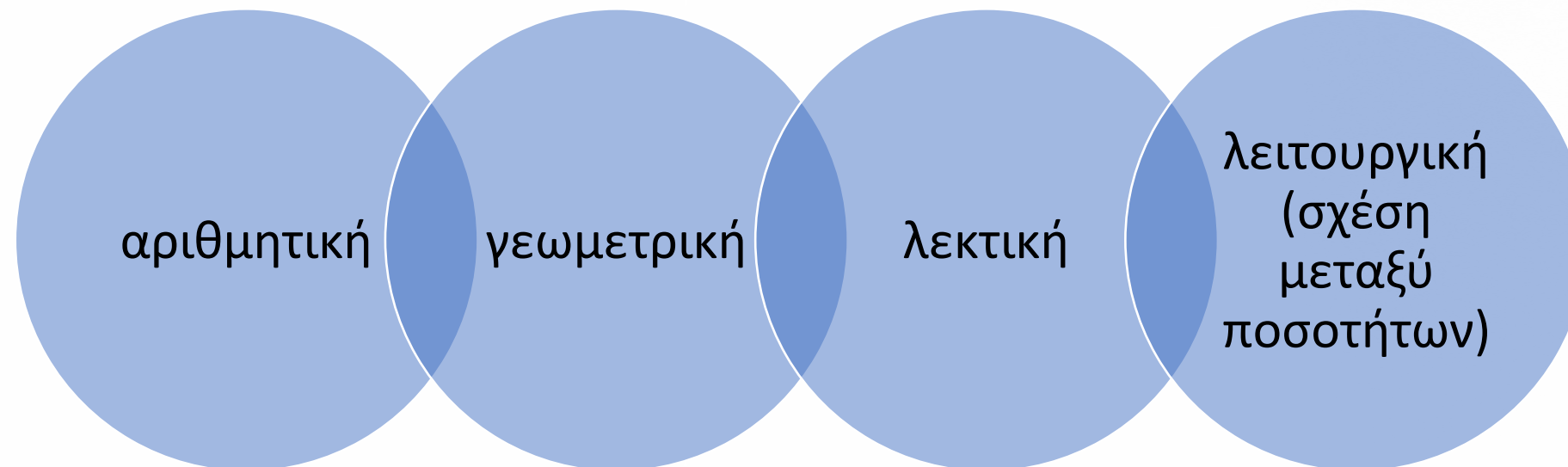
Κανονικότητες

(μοτίβα, πρότυπα, patterns)

Μια κανονικότητα περιλαμβάνει ένα σύνολο από χαρακτηριστικά ή σχέσεις που παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών καταστάσεων (Τζεκάκη, 2010)

→ Μια επαναλαμβανόμενη ή προβλέψιμη σχέση που μπορούμε να περιγράψουμε και να γενικεύσουμε.

- «Κάθε μπάλα κοστίζει 20 €»
- «Για κάθε 1 μπάλα, το κόστος αυξάνεται κατά 20 €»



Ακολουθίες

Ακολουθία είναι μια συγκεκριμένη λίστα όρων που ακολουθούν μια κανονικότητα.

→ η **σύνδεση** κάθε στοιχείου με τη **θέση** που κατέχει στην κανονικότητα δημιουργεί μια **μονότιμη αντιστοιχία**, που αποτελεί μια ακολουθία

μονότιμη αντιστοιχία → σε κάθε θέση αντιστοιχεί ένας αριθμός

Οι ακολουθίες είναι εργαλείο για να ανακαλύψουμε κανονικότητες.

Πρόβλημα

Η Άννα κάνει ένα πάρτι.

- Την πρώτη φορά που χτυπάει το κουδούνι, μπαίνει 1 καλεσμένος.
- Τη δεύτερη φορά, μπαίνουν 3 καλεσμένοι.
- Την τρίτη φορά, μπαίνουν 5 καλεσμένοι.
- Την τέταρτη φορά, μπαίνουν 7 καλεσμένοι.

Ερωτήσεις:

Α. Πόσοι καλεσμένοι θα μπουν στο 10ο χτύπημα;

Β. Γράψε έναν κανόνα ή περιέγραψε με λόγια πώς βρίσκουμε τον αριθμό των καλεσμένων που μπαίνουν σε κάθε χτύπημα.

Γ. 99 καλεσμένοι μπήκαν σε κάποιο χτύπημα. **Σε ποιο χτύπημα έγινε αυτό;** Εξήγησε ή δείξε πώς βρήκες την απάντηση.

Ακολουθίες και συναρτήσεις

Ακολουθία

- Παίρνει ως είσοδο **μόνο φυσικούς αριθμούς** (θέσεις: 1, 2, 3, ...)
- Σε κάθε θέση αντιστοιχίζει έναν αριθμό
- Η ακολουθία παίρνει τη θέση ενός όρου (1ος, 2ος, 3ος...) και λέει ποιος είναι ο αριθμός σε αυτή τη θέση.

Συνάρτηση

- Παίρνει ως είσοδο **όλους τους πραγματικούς αριθμούς**
- Σε κάθε αριθμό αντιστοιχίζει έναν αριθμό
- Η συνάρτηση παίρνει οποιονδήποτε αριθμό (φυσικό, δεκαδικό, αρνητικό) και λέει ποιο είναι το αποτέλεσμα (τι συμβαίνει εάν το x είναι...)

$$a_n = 2n + 1 \Leftrightarrow f(x) = 2x + 1$$



- Ποιο στοιχείο υπάρχει στη 12^η θέση
- Ποιες θέσεις έχουν το ίδιο στοιχείο με αυτό της 12^{ης} θέσης;

Κανόνας

Αν η θέση είναι πολλαπλάσιο του 3 τότε το στοιχείο είναι μοβ τρίγωνο.

Αλγεβρική Σκέψη στο σχολείο

Σχολική άλγεβρα → γενικευμένη αριθμητική

- με αποτέλεσμα να διδάσκεται μετά από αυτήν ο αλγεβρικός συλλογισμός μέσα από τις γενικεύσεις και αφαιρέσεις
 - Η μαθηματική δραστηριότητα συνδεδεμένη με τις περιστάσεις (αριθμητική) καθιστά δύσκολο το πέρασμα στη γενίκευση και αφαίρεση ανάπτυξη ικανότητας συμβολικής διαχείρισης (αλγεβρική σκέψη)
 - Έμφαση στο συντακτικό της άλγεβρας και όχι στη σημασία των αντικειμένων (συμβόλων) των παραστάσεων
 - Περιορισμένη κατανόηση του τρόπου που χρησιμοποιούνται τα γράμματα στην άλγεβρα από τους μαθητές. Συχνά οι μαθητές ερμηνεύουν ένα γράμμα ως ένα όνομα ενός συγκεκριμένου αριθμού, δηλαδή ως συγκεκριμένο άγνωστο. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι οι εξισώσεις $5n+14=89$ και $5\mu+14=89$ έχουν διαφορετικές λύσεις ή πχ. δεν αναγνωρίζεται ότι $2\chi+3=4\psi-5$ και $2\rho+3=4\phi-5$ εκφράζουν την ίδια δομή μεταξύ των μεταβλητών
- η αντικατάσταση των συγκεκριμένων αριθμών με απροσδιόριστους ή γενικούς αριθμούς (επαγωγική γενίκευση) δεν αρκεί για το πέρασμα στον αλγεβρικό συλλογισμό

Η άλγεβρα στο ΠΣ

→ Τώρα πια η εισαγωγή στον αλγεβρικό συλλογισμό ξεκινά πολύ νωρίτερα → Υιοθέτηση της εισαγωγής της άλγεβρας από την αρχή της εκπαίδευσης και όχι ως συνέχεια της αριθμητικής

- ✓ Μελέτη (αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή, γενίκευση) κανονικοτήτων
- ✓ Αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων αναπαραστάσεων (γλωσσικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και μετάβαση από τη μία στην άλλη
- ✓ Επίλυση προβλημάτων του τύπου «βρες τον αριθμό που λείπει»
- ✓ Κατανόηση ιδιοτήτων αριθμών, όπως η αντιμεταθετικότητα
- ✓ Κατανόηση του συμβόλου σχέσης της ισότητας
- ✓ Επινόηση αλγορίθμων για την πραγματοποίηση μιας εργασίας
- ✓ Θέματα θεωρίας αριθμών, όπως πρώτοι αριθμοί, διαιρετότητα,
- ✓ Κατανόηση των λόγων, όπως στις κλίμακες και στους ρυθμούς μεταβολής Ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων και τη χρήση τους για προβλέψεις
- ✓ Επινόηση τύπων για τον σύντομο υπολογισμό εμβαδών και όγκων

Δραστηριότητες για την ανάπτυξη της αλγεβρικής σκέψης (Kieran)

παραγωγικές δραστηριότητες (generational activities)

- περιλαμβάνουν το **σηματισμό των εκφράσεων** και των εξισώσεων
- Εξισώσεις που περιέχουν έναν άγνωστο που αντιπροσωπεύουν καταστάσεις προβλημάτων.
 - Γενικές εκφράσεις που προκύπτουν από γεωμετρικά πρότυπα ή αριθμητικές ακολουθίες.
 - Εκφράσεις κανόνων που διέπουν τις αριθμητικές σχέσεις.

Μετασχηματιστικές δραστηριότητες (transformational activities)

- ασχολούνται με την **αλλαγή-μετασχηματισμό** μιας έκφρασης, με διατήρηση της ισοδυναμίας
- επέκταση, αντικατάσταση
 - επίλυση εξισώσεων
 - απλοποίηση εκφράσεων

Δραστηριότητες συνολικού μεταεπιπέδου

- επίλυση προβλημάτων
- μοντελοποίηση
- παρατήρηση της δομής
- μελέτη της αλλαγής
- γενίκευση, ανάλυση των σχέσεων
- δικαιολόγηση
- απόδειξη και πρόβλεψη

Παραγωγικές Δραστηριότητες

Δημιουργούμε ακολουθίες, μοτίβα ή προβλήματα και τα παιδιά τα «γεννούν» με δική τους σκέψη

Αριθμητικές ακολουθίες με αντικείμενα:

Δείχνουμε στα παιδιά μια σειρά από κύβους:

1 κύβος, 3 κύβοι, 5 κύβοι... και ζητάμε: «Πόσοι κύβοι θα είναι στην επόμενη σειρά;»

Μοντελοποίηση προβλημάτων με αντικείμενα:

«Ο Μάνος έχει 2 μήλα και κάθε φίλος του του δίνει 1 ακόμη. Πόσα μήλα έχει αν οι φίλοι του είναι 3;»

→ Τα παιδιά χρησιμοποιούν αντικείμενα για να βρουν τον αριθμό των μήλων.

Γεωμετρικά μοτίβα:

Φτιάχνουμε λουλούδια με χρώματα που επαναλαμβάνονται (κόκκινο, κίτρινο, κόκκινο, κίτρινο...) και ζητάμε: «Ποιο χρώμα θα είναι στο 7ο λουλούδι;»

Μετασχηματιστικές Δραστηριότητες

Αλλάζουμε ή απλοποιούμε μοτίβα/προβλήματα διατηρώντας την ισοδυναμία.

Συνδυασμός ή ομαδοποίηση αντικειμένων

Δύο ομάδες μήλων: $3 + 2 = 5$

Ζητάμε από τα παιδιά να αλλάξουν την ομάδα (ανταλλαγή ή αναδιάταξη) χωρίς να αλλάξει το συνολικό πλήθος.

→ $2 + 3 = 5$

Απλοποίηση αριθμητικών μοτίβων

Δίνουμε μοτίβο κύβων: $2 + 2 + 2 + 2$

Ζητάμε να το γράψουν πιο σύντομα (με πολλαπλασιασμό): $2 \times 4 = 8$

Επίλυση μικρών προβλημάτων με αντικείμενα ή εικόνες (μοντελοποίηση)

«Έχουμε 5 μπαλόνια και χάνουμε 2. Πόσα μένουν;» → Τα παιδιά αλλάζουν την κατάσταση και βρίσκουν την ισοδυναμία.

Δραστηριότητες μεταεπιπέδου

Παρατηρούμε σχέσεις, εξάγουμε κανόνες, γενικεύουμε, προβλέπουμε.

Παρατήρηση και σύγκριση μοτίβων

- Δείχνουμε στα παιδιά δύο σειρές χρωματιστών κύβων:
 - 1, 2, 3, 4...
 - 2, 4, 6, 8...
- «Τι παρατηρείτε; Τι αλλάζει;»

Γενίκευση κανόνων σε απλά μοτίβα

- «Κάθε φορά που προσθέτουμε ένα κύβο, χρωματίζουμε ένα νέο κύβο κόκκινο. Αν έχουμε 4 βήματα, πόσοι κύβοι θα είναι κόκκινοι;»
- Η ιδέα της ανακάλυψης κανόνων από δεδομένα.

Πρόβλεψη και επίλυση προβλημάτων:

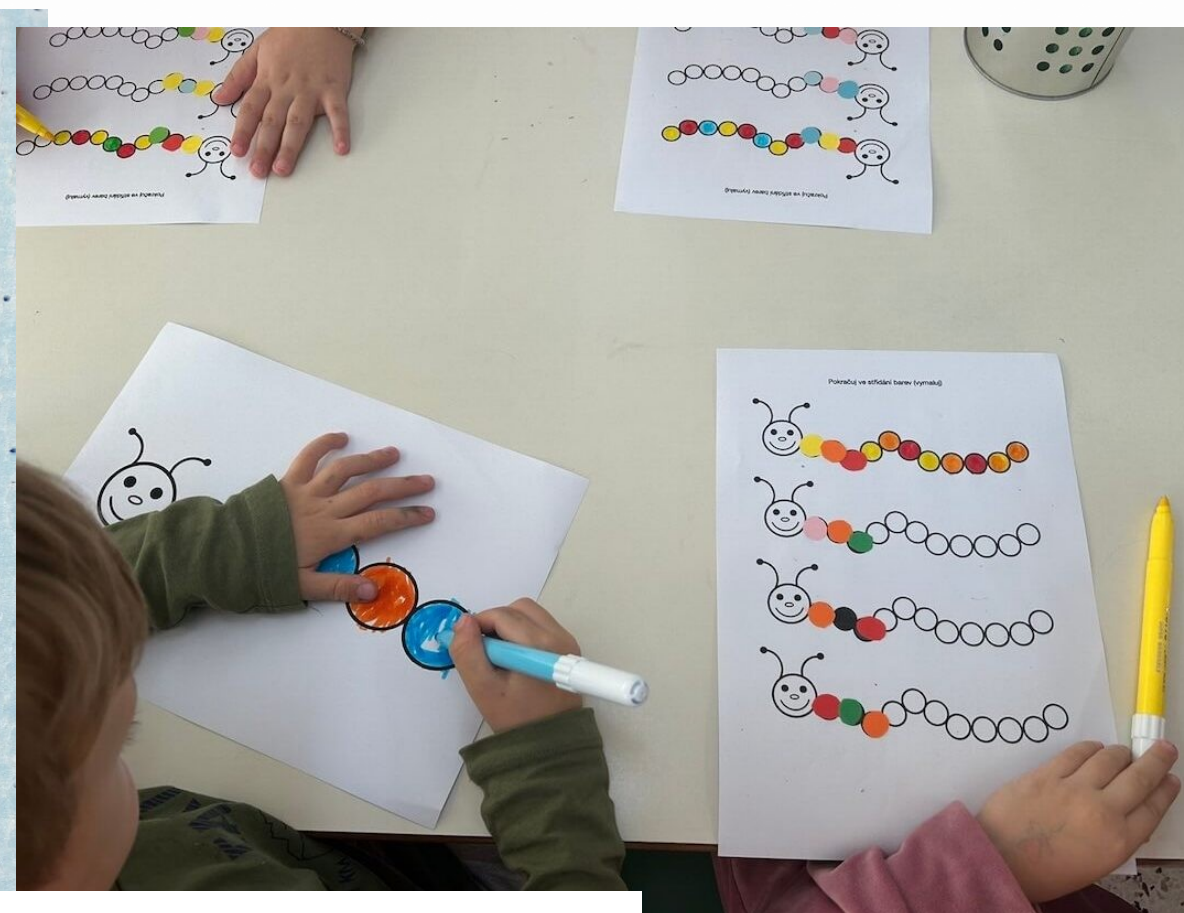
- Δίνουμε μοτίβο σκαλιών: 1, 3, 5, ...
- «Τι νούμερο θα έρθει μετά;»

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 16-10-2024 ΟΝΟΜΑ: ΤΖΟΥ

Ζωγραφιά-έκπληξη!!! Ακολούθησε τις οδηγίες για να αποκαλύψεις το σχέδιο. Εισαγωγή στο coding-pixel art.

1 ΓΑΛΑΖΙΟ 2 ΠΡΑΣΙΝΟ 3 ΜΑΥΡΟ 4 ΑΣΠΡΟ 5 ΚΟΚΚΙΝΟ

EINAI:

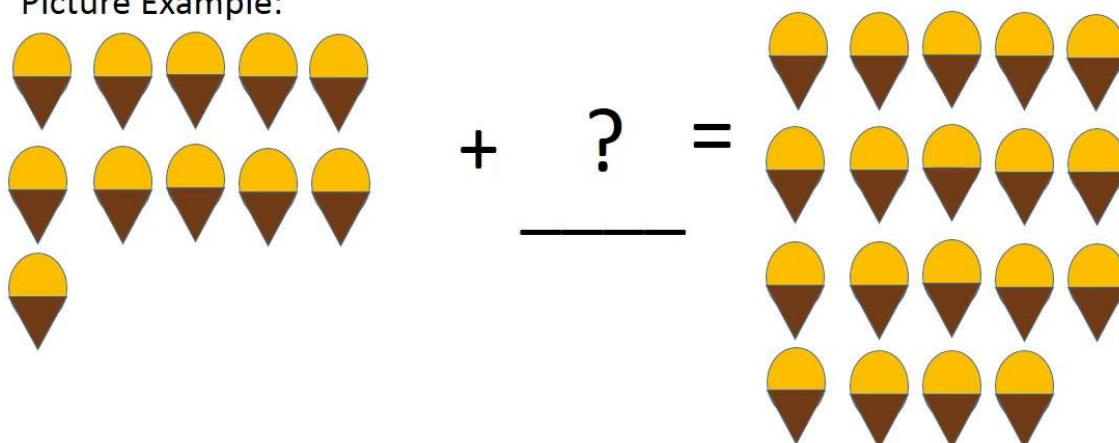


What is the value of the thermometer? 14

$\text{umbrella} - 2 = 13 - 4$
 $10 - \text{tornado} = \text{umbrella} - 8$
 $\text{thermometer} - \text{tornado} = \text{umbrella} - 1$

James' class has an ice cream party. He watches his teacher serve 11 ice cream cones. There are 19 students in James' class. How many more ice cream cones does his teacher need to serve?

Picture Example:



Σύνοψη

- ✓ Άλγεβρα vs Αριθμητική
- ✓ Άλγεβρα και αλγεβρικός συλλογισμός
- ✓ Πλαίσιο ανάπτυξης αλγεβρικού συλλογισμού
- ✓ Αλγεβρική σκέψη – δυσκολίες
- ✓ Κανονικότητες- ακολουθίες και συναρτήσεις
- ✓ Η αλγεβρική σκέψη στο ΠΣ
- ✓ Δραστηριότητες Αλγεβρικής σκέψης