5.4 Επιλογή Χαρτοφυλακίου ΙΙ

Μία ιδιαίτερη περίπτωση επιλογής χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιείται ευρέως είναι όταν η συνάρτηση χρησιμότητας εξαρτάται από την μέση απόδοση και την τυπική απόκλιση του χαρτοφυλακίου. Αν ο πλούτος κρατείται σε τραπεζικό λογαριασμό έχει βέβαιη μοναδιαία απόδοση 1 + i. Αν κρατείται υπό μορφή ομολόγων τότε η απόδοση αυτή είναι (1 + i + y), όπου το y είναι η διαφορά στην αξία του ομολόγου στο τέλος της περιόδου και είναι αβέβαιο. Έστω r η συνολική προσδοκώμενη απόδοση ενός χαρτοφυλακίου όταν το μερίδιο του πλούτου που κρατείται υπό μορφή ομολόγων είναι b. Το μερίδιο του πλούτου σε χρήμα είναι m. Οπότε

$$\begin{aligned} r &= (1+i)m + (1+i+y)b \\ &= (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{b}) + (1+\mathrm{i}+\mathrm{y})\mathrm{b} \\ &== (1+\mathrm{i}) + \mathrm{by} \end{aligned}$$

η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι

$$\mu = E[r] = (1+i) + bE(y)$$

ενώ η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= VAR(r) = E(r-\mu)^2 \\ &= \mathrm{E}[(1+\mathrm{i}) + \mathrm{by} - (1+\mathrm{i}) - \mathrm{bE(y)}]^2 \\ &= \mathrm{b}^2 E[y - E(y)]^2 \end{aligned}$$

Ο φορέας αποφάσεων μεγιστοποιεί την συνάρτηση χρησιμότητας

$$U(r) = E[u((1+i) + by)]$$

αν η συνάρτηση χρησιμότητας έχει την ιδιαίτερη μορφή

$$u(r) = \alpha r + br^2 \qquad \mathrm{b} < 0$$

τότε

$$U(r) = E[\alpha r + br^2] \qquad \mathrm{r} \le -\frac{\alpha}{2\mathrm{b}}$$

$$= \alpha E(r) + bE(r^2)$$

Το $E(r)$ δεν είναι άλλο από τη μέση απόδοση μ. Από τον τύπο της διακύμανσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} VAR(r) &= E[r-\mu]^2 \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{r} - \mathrm{E}(\mathrm{r})]^2 \\ &= \mathrm{E}[(\mathrm{r} - \mathrm{E}(\mathrm{r}))(\mathrm{r} - \mathrm{E}(\mathrm{r}))] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{r}^2 - 2rE(r) + E(r)^2] \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} VAR(r) &= E(r^2) - 2E(r)^2 + E(r)^2 \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{r}^2) - E(r)^2 \end{aligned}$$

ή

$$\sigma^2 = E(r^2) - E(r)^2$$

οπότε

$$E(r^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

ανατροφοδοτώντας την συνάρτηση χρησιμότητας με τα αποτελέσματα αυτά έχουμε μία συνάρτηση χρησιμότητας που είναι συνάρτηση της μέσης απόδοσης και της διακύμανσης.

$$U(r) = \alpha\mu + b\mu^2 + b\sigma^2$$

εξετάζοντας τις ιδιότητες της συνάρτησης αυτής βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταβάλλεται ανάλογα με την μέση απόδοση και αντίστροφα με την διακύμανση του χαρτοφυλακίου.

$$\frac{dU(r)}{d\mu} = \alpha + 2b\mu > 0 \qquad \mu \leq -\frac{\alpha}{2\mathrm{b}}$$

$$\frac{du(r)}{d\sigma^2} = b < 0$$

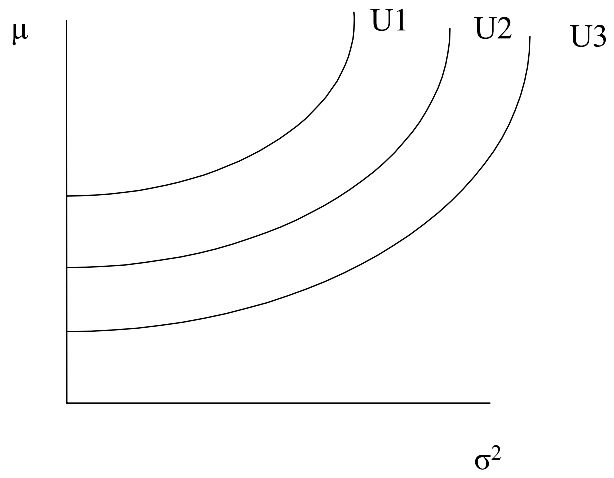
Από τις σχέσεις αυτές, βλέπουμε ότι η χρησιμότητα αυξάνεται όσο αυξάνεται η μέση απόδοση, ενώ μειώνεται όσο αυξάνεται ο κίνδυνος, δηλαδή, η συνάρτηση χρησιμότητας ενέχει αποστροφή στον κίνδυνο.
Η κλίση μίας καμπύλης αδιαφορίας στην περίπτωση αυτή είναι, (προκύπτει από το διαφορικό της συνάρτησης χρησιμότητας όταν η συνολική χρησιμότητα κρατείται σταθερά).

$$\frac{d\sigma^2}{d\mu} = -\frac{\alpha + 2b\mu}{b} > 0$$

ενώ η κυρτότητα της καμπύλης αδιαφορίας δίνεται από την μεταβολή στην κλίση της

$$\frac{d\,\frac{d\sigma^2}{d\mu}}{d\mu} = -2 < 0$$

έτσι καταλήγουμε σε ένα χάρτη καμπυλών αδιαφορίας όπως στο σχήμα 5.1.

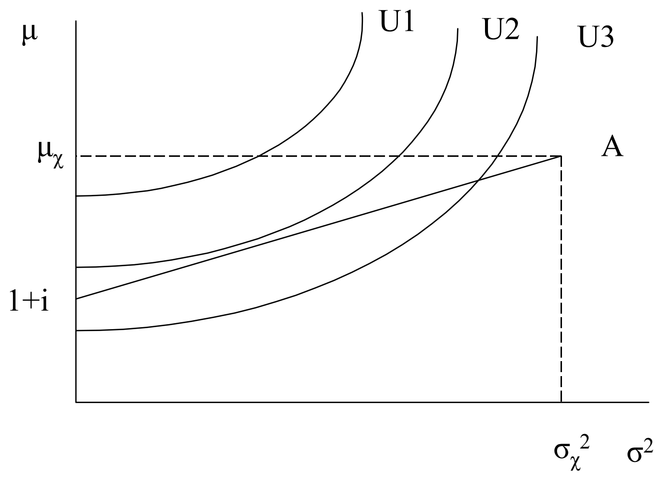


Σχήμα 5.1

Δύο παρατηρήσεις σχετικά με το σχήμα 5.1. Πρώτα, οι καμπύλες αδιαφορίας εκφράζουν το γεγονός ότι μία αύξηση του κινδύνου πρέπει να αντισταθμιστεί από μια μεγαλύτερη από αναλογική αύξηση της μέσης απόδοσης για να παραμείνει η χρησιμότητα σταθερή. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κοίλες προς τον κάθετο άξονα. Τούτο συνάδει με τον τρόπο που υπολογίστηκε η μεταβολή της κλίσης κάθε καμπύλης αδιαφορίας πιο πάνω, αφού η εφαπτομένη βαίνει φθίνουσα όσο αυξάνεται ο μέσος.

Επιλογή χαρτοφυλακίου.

Έστω ότι ένας επενδυτής επιθυμεί να τοποθετήσει τις αποταμιεύσεις του σε διαφορετικά χρηματοοικονομικά εργαλεία. Έστω επίσης ότι η επιλογή του είναι μεταξύ δύο εναλλακτικών τοποθετήσεων. Η πρώτη είναι να βάλει τα χρήματα σε τραπεζικό λογαριασμό, με σίγουρο επιτόκιο ι. Η δεύτερη είναι να αγοράσει χρεόγραφα που έχουν μεγαλύτερη απόδοση αλλά η απόδοση αυτή ενέχει κίνδυνο. Ο επενδυτής έχει την δυνατότητα να σχηματίσει ένα χαρτοφυλάκιο, δηλαδή, να τοποθετήσει ένα μέρος της αποταμίευσης στην τράπεζα και το υπόλοιπο σε χρεόγραφα. Έστω επίσης ότι το ύψος της αποταμίευσης είναι ίσο με μία χρηματική μονάδα. Το σύνολο των δυνατών χαρτοφυλακίων στην περίπτωση αυτή δίνεται από την γραμμή 1+ι, Α. Αν όλη η αποταμίευση τοποθετηθεί σε τραπεζικό λογαριασμό, τότε η απόδοση είναι 1+ι με μηδενική διακύμανση. Αν όλη επενδυθεί στο χρεόγραφο, τότε η προσδοκώμενη απόδοση είναι μ_X και ο κίνδυνος είναι ίσος με σ_X^2. Ο συνδυασμός των δύο δυνητικών τοποθετήσεων δίνεται από την γραμμή που ενώνει τα δύο αυτά σημεία. Το άριστο χαρτοφυλάκιο βρίσκεται εκεί όπου κάποια καμπύλη αδιαφορίας εφάπτεται του ορίου των δυνητικών χαρτοφυλακίων.



Σχήμα 5.1