Βασικές έννοιες της Θεωρίας παιγνίων.

(μετά την μελέτη του αντιστοίχου κεφαλαίου να είστε σίγουροι ότι καταλάβατε τις ακόλουθες έννοιες.)

1. Τα στοιχεία που αποτελούν ένα παίγνιο είναι :

1) Το **σύνολο των παικτών** (φορέων αποφάσεων), i= 1.......N.

2) Το **σύνολο των δυνητικών στρατηγικών** (ενεργειών) S. Το σύνολο αυτό υποδιαιρείται σε υποσύνολα, το καθένα των οποίων περικλείει τις δυνητικές στρατηγικές κάθε παίκτη, $S = \{S_i ; i = 1.....N\}$.

   - Τα υποσύνολα S_i δεν έχουν αναγκαστικά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Κάθε ένα από αυτά αποτελείται από K_i δυνητικές στρατηγικές. Ένα συγκεκριμένο στοιχείο συμβολίζεται με το s_{ij}, $\mathrm{j} = 1,.....,\mathrm{K}_\mathrm{i}$.

   - Ένα διάνυσμα που αποτελείται από μία στρατηγική για κάθε παίκτη, συμβολίζεται από $s = \{s_{ij} ; i = 1....N)$, όπου το j δεν είναι αναγκαστικά το ίδιο για όλα τα i .

   - Το διάνυσμα s μπορεί να γραφτεί $s = \{s_i ; s_{-i})$. Το υποδιάνυσμα $s_{-i} = \{s_{1k} ,....s_{i-1h} , s_{i+1x} ,....s_{Nz})$ περιέχει όλα τα στοιχεία του s, πλην του s_{ij} και, καλείται το συμπλήρωμα της στρατηγικής s_{ij} . Το υποδιάνυσμα s_i αποτελείται από το στοιχείο s_{ij} .

3) Την **συνάρτηση αποδόσεων** $U_i (s_i ; s_{-i}) = q_i (q_{-i})$. Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί κάποια απόδοση σε κάθε στρατηγική του παίκτη i, δεδομένης της στρατηγικής που θα επιλεγεί από τους υπολοίπους παίκτες. Έτσι, η απόδοση κάθε αποφάσεως (ενέργειας) ενός ατόμου γίνεται συνάρτηση των αποδόσεων

των υπολοίπων παικτών. Οπότε η ίδια στρατηγική μπορεί να έχει διαφορετική απόδοση, καθώς μεταβάλλεται η σύνθεση του συμπληρώματος της.

4) Τα (1),(2) και (3) αποτελούν την κανονική μορφή ενός παιγνίου. Στην περίπτωση όπου υπάρχουν δύο παίκτες, το παίγνιο στην κανονική μορφή του μπορεί να παρουσιαστεί με την βοήθεια ενός πίνακα αποδόσεων.

Ορισμοί.

1) **Καλύτερη** αντίδραση του i δεδομένων των αποφάσεων των υπολοίπων παικτών, είναι η επιλογή εκείνης της ενέργειας που μεγιστοποιεί την απόδοση του. $U_i(s_i^*;\bar{s}_{-i}) \geq U_i(s_i;\bar{s}_{-i})$

2) Για να υπάρχει **Κυρίαρχη** αντίδραση του i, πρέπει για οποιοδήποτε συνδυασμό ενεργειών του συμπληρώματος – i, κάποια ενέργεια i να δίνει πάντα την μεγαλύτερη δυνατή απόδοση. $U_i(s_i^*;s_{-i}) > U_i(s_i;s_{-i}) \quad \forall\text{ -i;i}$

3) Μία στρατηγική h του παίκτη i αποτελεί **κυριαρχούμενη** αντίδραση, αν υπάρχει κάποια άλλη δυνατή στρατηγική του i π.χ. η f, που να δίνει μεγαλύτερες αποδόσεις ότι και να αποφασίσουν οι υπόλοιποι παίκτες (όποια και να είναι η σύνθεση του συμπληρώματος – i.). $U_i(s_{if};s_{-i}) > U_i(s_{ih};s_{-i}) \quad \forall\text{ -i}$

4) Αν η ανισότητες στην (2) και (3) αντικατασταθούν με ανισότητα ή ισότητα, δηλαδή αν το σύμβολο > αντικατασταθεί από το $\geq$, τότε οι ενέργειες αποκαλούνται αδύναμα κυρίαρχες και αδύναμα κυριαρχούμενες αντίστοιχα.

5) **Ισορροπία κατά Nash** αποκαλείται ένα σύνολο αμοιβαία καλυτέρων αντιδράσεων. Εναλλακτικά, αν οι αποφάσεις των μελών του συμπληρώματος αποτελούν καλύτερες αντιδράσεις, τότε για να έχουμε ισορροπία κατά Nash πρέπει και η απόφαση του i να είναι καλύτερη αντίδραση. $U_i(s_i^*;s_{-i}^*) > U_i(s_i;s_{-i}^*) \quad \forall\text{i}$

6) Στο σημείο ισορροπίας κατά Nash δεν υπάρχει κίνητρο ώστε ένας παίκτης να αλλάξει μονομερώς την απόφαση του. (δηλαδή, να κερδίσει περισσότερο επιλέγοντας μία άλλη στρατηγική ενώ όλοι οι άλλοι επιμένουν στην αρχική τους απόφαση.)

Ισορροπία κυριάρχων στρατηγικών αποκαλείται ένα σημείο ισορροπίας κατά Nash όπου όλες οι στρατηγικές των εμπλεκομένων παικτών είναι κυρίαρχες στρατηγικές. $U_i(s_i^*; s_{-i}^*) > U_i(s_i; s_{-i}) \qquad \forall -i; \mathrm{i}$

Α) Στον πίνακα 1.1 οι καλύτερες αντιδράσεις του Α είναι οι υπογραμμισμένες αποδόσεις, ενώ του Β αυτές με βαρύ μαύρο. Προσδιορίστε τις καλύτερες αποδόσεις των δύο παικτών στον πίνακα 1.2

Β) Βρείτε τις Κυρίαρχες στρατηγικές στους πίνακες 1.3 και 1.4

Γ) βρείτε τα σημεία ισορροπίας στους υπόλοιπους πίνακες.

<u>Πίνακας 1.1</u>

		B		
		a	b	c
	I	0 ; ***4***	$\underline{4}$; 0	5 ; 3
A	II	$\underline{4}$; 0	0 ; ***4***	5 ; 3
	III	3 ; 5	3 ; 5	$\underline{6}$; ***6***

<u>Πίνακας 1.2</u>

		B		
		a	b	c
	I	11 ; 7	12 ; 10	7 ; 11
A	II	7 ; 11	12 ; 10	11 ; 7
	III	10 ; 12	13 ; 17	10 ; 12

<u>Πίνακας 1.3</u>

		B		
		a	b	c
	I	4 ; 8	9 ; 7	8 ; 4
A	II	8 ; 4	9 ; 7	4 ; 8
	III	7 ; 9	10 ; 11	7 ; 9

<u>Πίνακας 1.4</u>

		B		
		a	b	c
	I	53 ; 5	37 ; 22	46 ; 12
A	II	60 ; 6	15 ; -8	12 ; 34
	III	8 ; 7	43 ; 11	34 ; 9

Πίνακας 2.1

		B	
		a	b
	I	$\underline{1}$; 0	$\underline{1}$; 2
A	II	0 ; 3	0 ; 1

Πίνακας 2.2

		B	
		a	b
	I	5 ; 2	10 ; 7
A	II	3 ; 6	1 ; 4

Πίνακας 2.3

			B	
		a	b	c
	I	4 ; 8	9 ; 7	8 ; 4
A	II	8 ; 4	12 ; 7	9 ; 8
	III	7 ; 9	10 ; 11	7 ; 9

Πίνακας 2,4

			B	
		a	b	c
	I	60 ; 12	44 ; 29	53 ; 19
A	II	67 ; 13	22 ; 32	19 ; 41
	III	15 ; 14	50 ; 18	41 ; 16

Μέρος Α' : Ισχύς στην Αγορά

Ισχύς στην αγορά σημαίνει ότι μια επιχείρηση μπορεί να επηρεάσει την τιμή στην οποία επιλέγει να προσφέρει κάποια ποσότητα προϊόντος. Η ακραία περίπτωση ισχύος στην αγορά είναι το μονοπώλιο. Στην περίπτωση αυτή η επιχείρηση αντιμετωπίζει την αγοραία καμπύλη ζήτησης και ως γνωστό μπορεί να επιτύχει υπερκανονικά κέρδη ανάλογα με την ελαστικότητα της ζήτησης αυτής. Ισχύ στην αγορά όμως μπορούμε να έχουμε ακόμη και όταν υπάρχει ένα μέτρο ανταγωνισμού στην αγορά. Έτσι, όταν δύο επιχειρήσεις ανταγωνίζονται σε μια αγορά υπάρχει περισσότερος ανταγωνισμός από όταν υπάρχει μόνο μια επιχείρηση, αλλά όχι τόσος ώστε οι επιλογές των επιχειρήσεων να μην επηρεάζουν την τιμή προσφοράς. Βέβαια, αν οι επιχειρήσεις συμπράξουν ώστε να αποφύγουν τον ανταγωνισμό τότε συμπεριφέρονται ως να ήταν μονοπωλητές. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των επιχειρήσεων ο βαθμός ανταγωνισμού αυξάνεται, τείνοντας στο όριο στις συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού. Επιπλέον η σύμπραξη γίνεται πιο δύσκολη όσες περισσότερες επιχειρήσεις μετέχουν στην παραγωγή.

2. Δυοπώλιο Cournot

Στα πλαίσια του ατελούς ανταγωνισμού η επιλογές κάθε επιχείρησης επηρεάζουν την κερδοφορία των υπολοίπων επιχειρήσεων που δραστηριοποιούνται στον κλάδο. Κατά συνέπεια η επιλογή κάθε επιχείρησης πρέπει να γίνει με γνώμονα τις δυνητικές αποφάσεις των υπολοίπων, δηλαδή, οι επιχειρήσεις υπεισέρχονται σε ένα παίγνιο.

Στο υπόδειγμα του Cournot οι επιχειρήσεις επιλέγουν το ύψος του προϊόντος που θα προσφέρουν στην αγορά. Ο ανταγωνισμός γίνεται μέσα από την προσφερόμενη ποσότητα. Έτσι, η επιλογή του επιπέδου παραγωγής αποτελεί μία στρατηγική κάθε επιχείρησης, ενώ το πεδίο της δυνητικής παραγωγής αποτελεί το σύνολο των δυνητικών στρατηγικών κάθε επιχείρησης.
Έστω η αντίστροφη συνάρτηση ζήτησης

$$P(Q) = \alpha - Q$$

$$P(Q) = 0 \text{ for } \mathrm{Q} > \alpha$$

το κόστος κάθε επιχείρησης είναι

$$C(q_i) = cq_i$$

Η συνάρτηση αποδόσεων κάθε επιχείρησης είναι ίση με την συνάρτηση κέρδους της, αφού έχουμε υποθέσει ότι οι επιχειρήσεις μεγιστοποιούν τα κέρδη τους. Οπότε

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(q_i + q_j) - c] = q_i[\alpha - (q_i + q_j) - c]$$

<u>1. Άμεσος υπολογισμός του σημείου ισορροπίας κατά Nash</u>

Η ισορροπία κατά Nash δίδεται από

$$\max_{o \le q_i < \infty} \pi_i(q_i, q_j^*) = \max_{o \le q_i < \infty} q_i[\alpha - (q_i + q_j^*) - c]$$

λύνοντας τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε

$$q_i = \frac{1}{2}(\alpha - q_j^* - c)$$

ή

$$q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - q_2^* - c)$$

$$q_2^* = \frac{1}{2}(\alpha - q_1^* - c)$$

έχουμε

$$q_1^* = q_2^* = \frac{\alpha - c}{3}$$

2. Λύση χρησιμοποιώντας τις καμπύλες αντίδρασης.

Ένας εναλλακτικός τρόπος λύσης του προβλήματος είναι να υπολογιστούν όλες οι καλύτερες αντιδράσεις των δύο επιχειρήσεων και να επιλεγεί το σημείο εκείνο όπου συμπίπτουν οι καλύτερες αντιδράσεις. Έτσι, για κάθε ύψος παραγωγής (κάθε δυνατή στρατηγική) του 1, η καλύτερη αντίδραση του 2 δίνεται από

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}(\alpha - q_1 - c)$$

και αντίστοιχα για τον 1

$$R_1(q_2) = \frac{1}{2}(\alpha - q_2 - c)$$

Σχεδιάστε τις δύο καμπύλες (καλύτερης) αντίδρασης στον χώρο q_1, q_2 . Η τομή των δύο καμπυλών δίνει την ισορροπία κατά Nash (Cournot).

3. Λύση με την απαλοιφή κυριαρχούμενων στρατηγικών.

Ένας τρίτος τρόπος προσέγγισης του προβλήματος είναι μέσα από την απαλοιφή των κυριαρχούμενων στρατηγικών.
Γνωρίζουμε ότι το μέγιστο κέρδος που μπορεί να επιτευχθεί σε μία αγορά είναι αυτό της μονοπωλιακής επιχείρησης. Το ύψος παραγωγής στην περίπτωση αυτή είναι

$$q_m = \frac{\alpha - c}{2}$$

Θα αποδείξουμε ότι όλες οι στρατηγικές που περιγράφονται από q_m+χ , κυριαρχούνται από την q_m . Δηλαδή ότι

$\pi_i(q_m, q_j) > \pi_i(q_m + x, q_j)$ για όλα τα x και q_j

Έτσι,

$$\pi_i(q_m, q_j) = \frac{\alpha - c}{2}\left[\frac{\alpha - c}{2} - q_j\right]$$

ενώ

$$\pi_i(q_m + x, q_j) = \left[\frac{\alpha - c}{2} + x\right]\left[\frac{\alpha - c}{2} - x - q_j\right] = \pi_i(q_m, q_j) - x(x + q_j)$$ ο.ε.δ.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η στρατηγική που ορίζεται από το μισό της μονοπωλιακής παραγωγής, $\hat{q}$, κυριαρχεί όλες τις στρατηγικές που οδηγούν σε ακόμη μικρότερο επίπεδο παραγωγής, $\hat{q} - x$.

$$0 < q_i < \hat{q}_i = \frac{\alpha - c}{4}$$

οπότε πρέπει

$$\pi_i(\hat{q}_i, q_j) > \pi_i(\hat{q}_i - x, q_j)$$

Το κέρδος στο μισό της μονοπωλιακής παραγωγής είναι

$$\pi_i(\hat{q}_i, q_j) = \frac{\alpha - c}{4}\left[\frac{3(\alpha - c)}{4} - q_j\right]$$

ενώ το κέρδος για όλα τα μικρότερα επίπεδα παραγωγής δίδεται από

$$\pi_i(\hat{q}_i - x, q_j) = \left[\frac{\alpha - c}{4} - x\right]\left[\frac{3(\alpha - c)}{4} + x - q_j\right]$$
$$= \pi_i(\hat{q}_i, q_j) - x\left[\frac{\alpha - c}{2} + x - q_j\right]$$

ο.ε.δ.

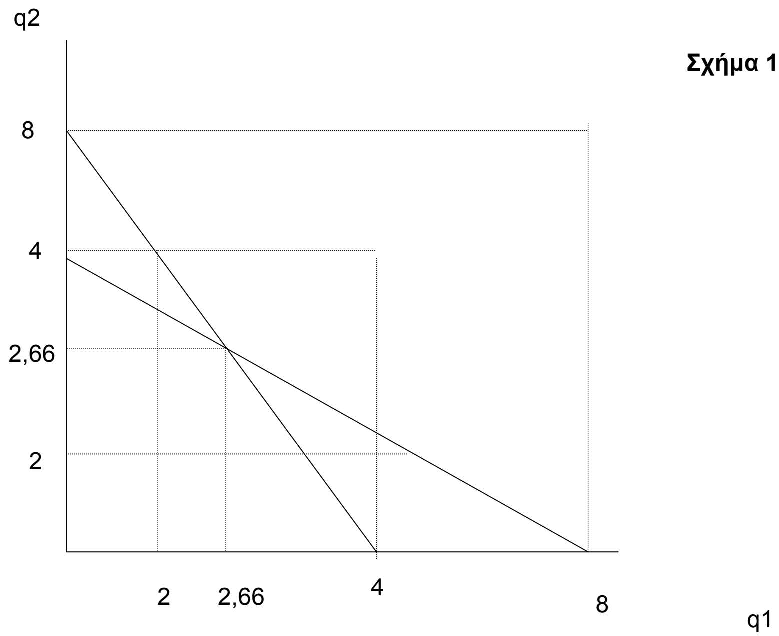
Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία συγκλίνουμε στο σημείο ισορροπίας κατά Nash

$$q_j^* = \frac{\alpha - c}{3}$$ g

4. Αριθμητική παρουσίαση του (3)

Κάθε σημείο του χώρου (q_1;q_2) αντιστοιχεί σε κάποιο ζεύγος στρατηγικών των δύο επιχειρήσεων, κατά συνέπεια και σε ένα ζεύγος αποδόσεων. Ο πίνακας 1, δίνει τα κέρδη των δύο επιχειρήσεων όταν α=10, c=2.

Μερικά από τα σημεία του πίνακα αυτού αναπαράγονται στο σχήμα 1. Με την διαδοχική εξαίρεση των κυριαρχούμενων στρατηγικών του πίνακα δείξτε ότι θα καταλήξουμε στο σημείο ισορροπίας κατά Nash.



Σχήμα 1

Πίν 1

Επιχ. 2

		0		**1**		**2**		**2,66**		**3**		**4**		**8**	
Επιχ. 1	**0**	0,0	0,0	0,0	7,0	0,0	12,0	0,0	14,2	0,0	15,0	0,0	*16,0*	0,0	*0,0*
	1	7,0	0,0	6,0	6,0	5,0	10,0	4,3	11,5	4,0	*12,0*	3,0	*12,0*	-1,0	-8,0
	2	12,0	0,0	10,0	5,0	8,0	8,0	6,7	8,9	6,0	*9,0*	4,0	8,0	-4,0	-16,0
	2,66	14,2	0,0	11,5	4,3	8,9	6,7	*7,1*	*7,1*	6,2	7,0	3,6	5,4	-7,1	-21,3
	3	15,0	0,0	12,0	4,0	9,0	6,0	7,0	*6,2*	6,0	6,0	3,0	4,0	-9,0	-24,0
	4	16,0	0,0	12,0	3,0	8,0	*4,0*	5,4	3,6	4,0	3,0	0,0	0,0	-16,0	-32,0
	8	0,0	*0,0*	-8,0	-1,0	-16,0	-4,0	-21,3	-7,1	-24,0	-9,0	-32,0	-16,0	-64,0	-64,0

5. Διαγραμματική παρουσίαση του (3)

Η συνάρτηση ίσου κέρδους της επιχείρησης 1 υπολογίζεται κρατώντας το διαφορικό των κερδών ίσο με μηδέν. Οπότε

$$\overline{\pi}_1(q_1, q_2) = q_1[\alpha - (q_1 + q_2) - c]$$

$$d\overline{\pi}_1 = (\alpha - q_1 - q_2 - c)dq_1 - q_1 dq_1 - q_1 dq_2 = 0$$

και

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\alpha - 2q_1 - q_2 - c}{q_1}$$

αλλά η κλίση της καμπύλης ίσου κέρδους ισούται με μηδέν όταν

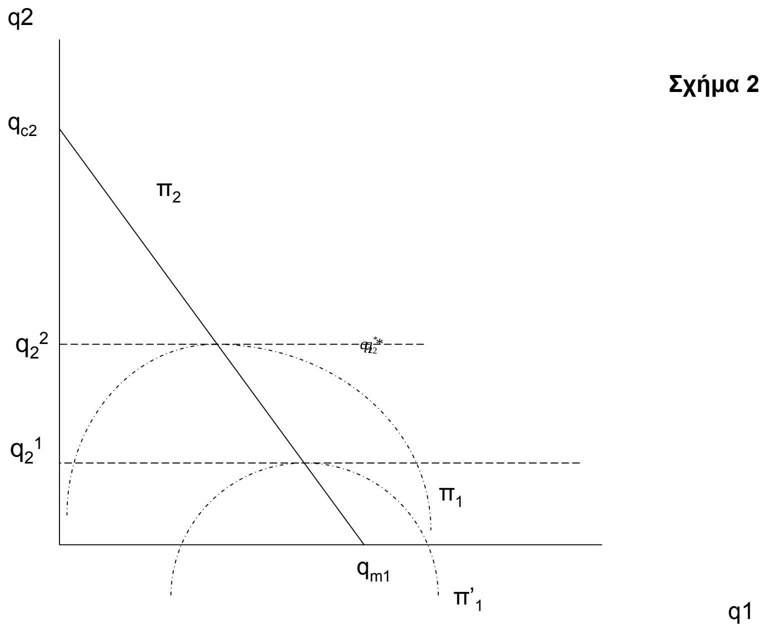
$$\alpha - 2q_1 - q_2 - c = 0$$

Η συνθήκη αυτή είναι η ίδια με την συνθήκης $1^{ης}$ τάξης για την μεγιστοποίηση των κερδών της επιχείρησης 1.

Αναδιατάσσοντας έχουμε

$$q_1 = \frac{1}{2}(\alpha - q_2 - c)$$

δηλαδή, σε όλα τα σημεία της καμπύλης αντίδρασης (καλύτερης αντίδρασης) του 1, η καμπύλη ίσου κέρδος έχει μηδενική κλίση. Δείξτε ότι η καμπύλη ίσου κέρδους είναι κοίλη προς τον άξονα q_1.(υπολογίστε την δεύτερη παράγωγο της $\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\alpha - 2q_1 - q_2 - c}{q_1}$ ως προς q_1.)

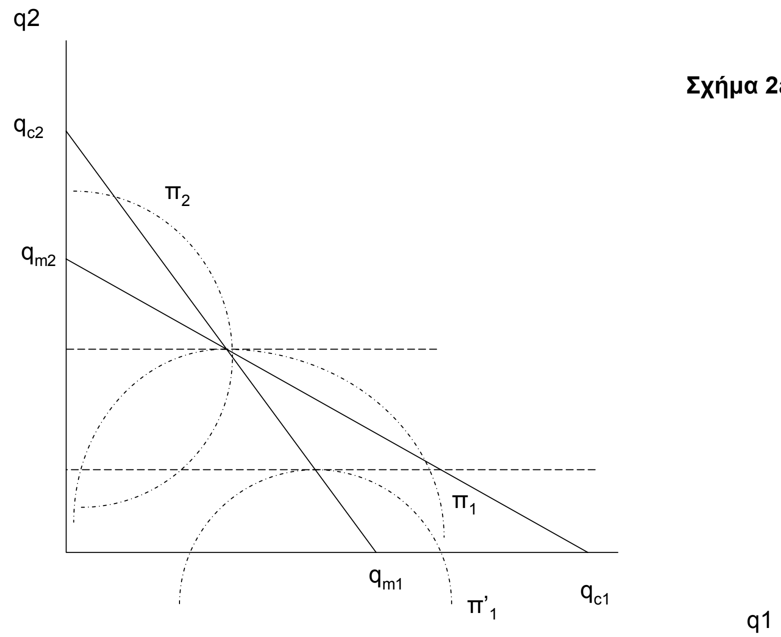


Σχήμα 2

Στο σχήμα 2 παρουσιάζεται η καμπύλη αντίδρασης του 1. (η ανεξάρτητη μεταβλητή που είναι το επίπεδο παραγωγής του 2 είναι στον κάθετο άξονα, αντίθετα με την μαθηματική ορθότητα, αλλά σύμφωνα με συνήθη πρακτική των οικονομολόγων). Οι στρατηγικές του 2 θεωρούνται ως εξωγενείς στον λογισμό του 1, δηλαδή, για κάθε επίπεδο προσφοράς του 2, η καμπύλη αντίδρασης του 1 δίνει την άριστη απάντηση του 1. Αν ο 2 προσφέρει 0, τότε ο 1 είναι μονοπωλητής και προσφέρει το επίπεδο εκείνο του προϊόντος που μεγιστοποιεί τα κέρδη του, q_{m1}. Αν ο 2 προσφέρει τόσο προϊόν ώστε να μηδενιστούν τα κέρδη του (δηλαδή, το επίπεδο προσφοράς που αντιστοιχεί στην ανταγωνιστική ισορροπία) τότε ο 1 προσφέρει 0. (Αν προσφέρει θετική ποσότητα στην περίπτωση αυτή θα κάνει αρνητικά κέρδη.) Ως γνωστό το μονοπώλιο προσφέρει λιγότερο από το ανταγωνιστικό επίπεδο προϊόντος. Το μέγιστο δυνατό κέρδος για τον 1, είναι το μονοπωλιακό κέρδος. Άρα οι καμπύλες ίσου κέρδους αντιστοιχούν σε ψηλότερο επίπεδο κέρδους όσο πλησιάζουνε τον οριζόντιο άξονα. ($\pi_1^{'}> \pi_1$). Για προσφορά του 2, q_2^2 το μέγιστο κέρδος του 1 επιτυγχάνεται στο σημείο επαφής της καθέτου στο σημείο q_2^2 και της ψηλότερης δυνατής καμπύλης ίσου κέρδους.

Σχεδιάστε την αντίστοιχη καμπύλη αντίδρασης του 2.

Αν στρέψουμε τους άξονες του σχήματος που σχεδιάσατε και το εναποθέσουμε στο προηγούμενο σχήμα έχουμε το σχήμα 2^{α}.



Σχήμα 2a

Από το σημείο ισορροπίας περνούν οι καμπύλες ίσου κέρδους που αντιστοιχούν στο αριστοποιητικό επίπεδο κέρδους της κάθε επιχείρησης. Υπάρχει δυνατότητα κατά Pareto βελτίωσης;

Άσκηση I

Έστω ότι υπάρχουν δύο μόνο μέθοδοι παραγωγής ενός νέου αγαθού, που θα διατεθούν μόνο σε ένα παραγωγό η καθεμία. Τα δικαιώματα στην πρώτη μέθοδο κοστίζουν 1300 ενώ στην δεύτερη 1400. Η διάρκεια της ευρεσιτεχνίας είναι δύο ετών, δηλαδή, μετά την πάροδο δύο ετών και οι δύο μέθοδοι θα διατίθενται ελεύθερα σε όποιον ενδιαφέρεται. Η ζήτηση στην αγορά κάθε χρονική περίοδο είναι $P = 100 - 0{,}5(q_1 + q_2)$. Τα κόστη ανά χρονική περίοδο για την επιχείρηση 1 (που χρησιμοποιεί την μέθοδο 1) είναι $c_1 = 10q_1 + 500$ ενώ για την δεύτερη είναι $c_2 = 10q_2 + 400$. Ο ανταγωνισμός στην αγορά γίνεται μέσα από τον καθορισμό των ποσοτήτων. Ποια θα είναι τα συνολικά κέρδη των δύο επιχειρήσεων; (ο προεξοφλητικός συντελεστής είναι ίσος με 1).

Άσκηση II

Εξηγείστε με λόγια και τη βοήθεια διαγράμματος (χωρίς μαθηματικά) γιατί οι καμπύλες αντίδρασης τέμνουν τις καμπύλες ίσου κέρδους στο ελάχιστο σημείο.

Άσκηση III

Ερμηνεύστε τα δύο άκρα της καμπύλης αντίδρασης μιας ολιγοπωλιακής επιχείρησης.