ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Θεωρία: 04

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Στατιστικές ιδιότητες εκτιμητών

Έστω $\widehat{\theta}$ ένας εκτιμητής της άγνωστης παραμέτρου θ, π.χ.

- $\widehat{\theta} = \widehat{\beta}$ και $\theta = \beta$
- $\widehat{\theta} = s^2$ και $\theta = \sigma^2$

Επιθυμητές στατιστικές ιδιότητες του εκτιμητή $\widehat{\theta}$:

- Αμεροληψία
- Συνέπεια
- Αποτελεσματικότητα ή Αριστεία

Αμεροληψία

Ο εκτιμητής $\widehat{\theta}$ είναι αμερόληπτος εκτιμητής του θ αν

$$E(\widehat{\theta}) = \theta$$

Ο εκτιμητής $\widehat{\theta}$ είναι μεροληπτικός εκτιμητής του θ αν

$$E(\widehat{\theta}) \neq \theta$$

Ο εκτιμητής $\widehat{\theta}$ είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής του θ αν

$$\underset{T\to\infty}{lim}\ E(\widehat{\theta}) = \theta$$

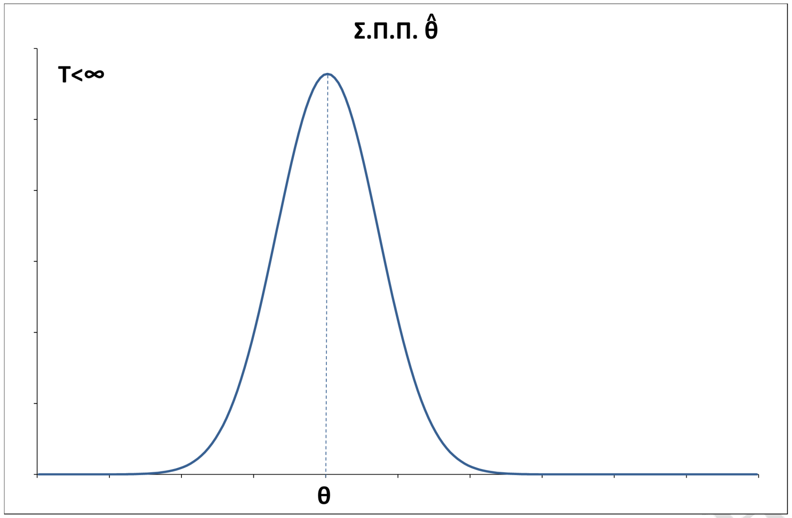
Ο εκτιμητής $\widehat{\theta}$ είναι ασυμπτωτικά μεροληπτικός εκτιμητής του θ αν

$$\underset{T\to\infty}{lim}\ E(\widehat{\theta}) \neq \theta$$

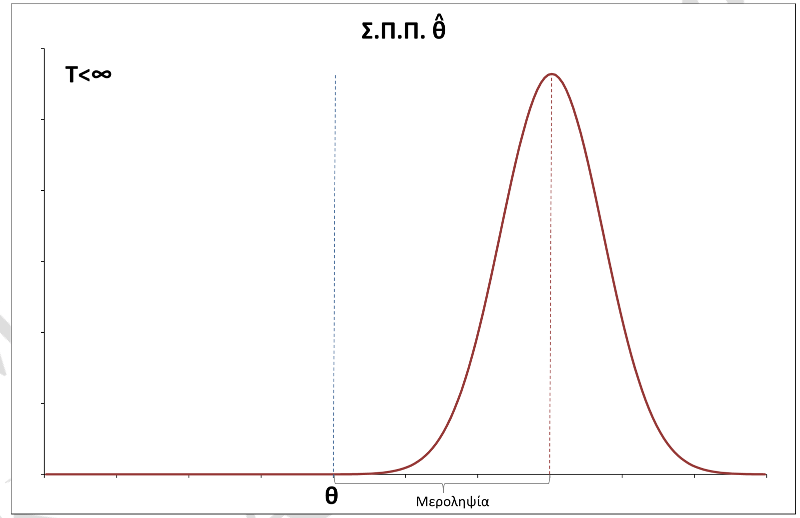
Σημείωση:

- Η ιδιότητα της αμεροληψίας αφορά πεπερασμένα δείγματα, δηλαδή είναι για σταθερό μέγεθος δείγματος $T < \infty$.
- Η ιδιότητα της ασυμπτωτικής αμεροληψίας είναι ασυμπτωτική, δηλαδή είναι για μέγεθος δείγματος $T \to \infty$.

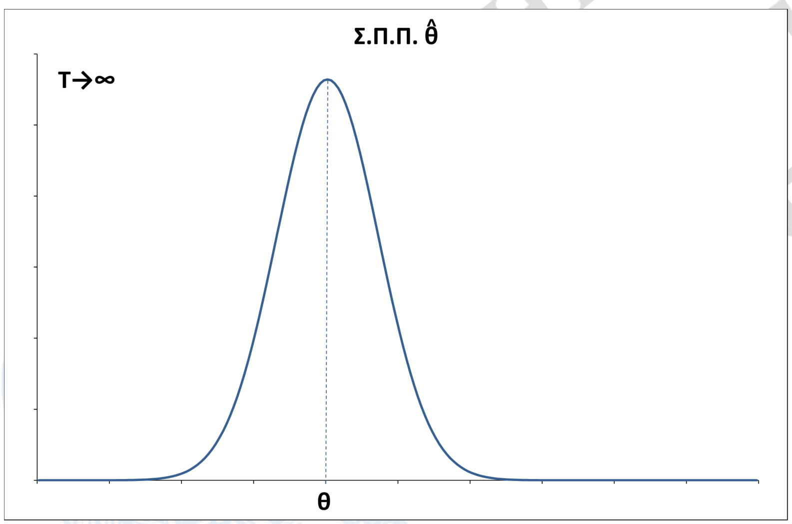
Αμερόληπτος



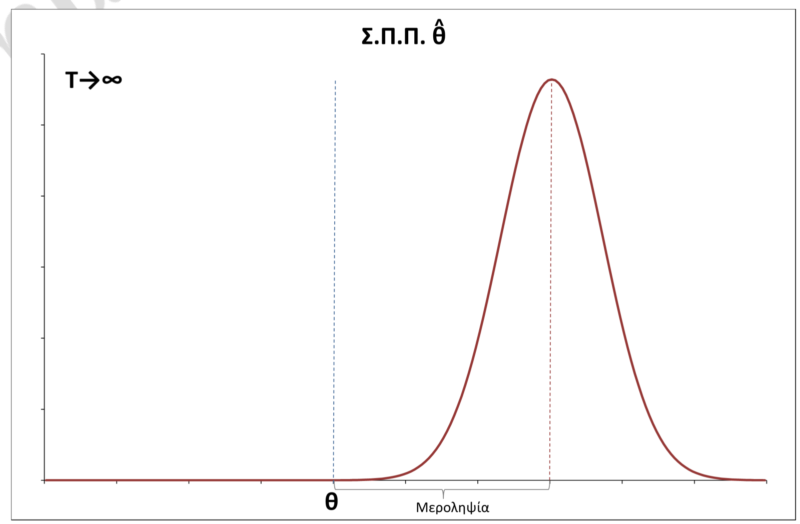
Μεροληπτικός



Ασυμπτωτικά Αμερόληπτος



Ασυμπτωτικά Μεροληπτικός



Συνέπεια

Ο εκτιμητής $\widehat{\theta}$ είναι συνεπής εκτιμητής του θ αν

$$\underset{T\to\infty}{plim}\,\widehat{\theta} = \theta$$

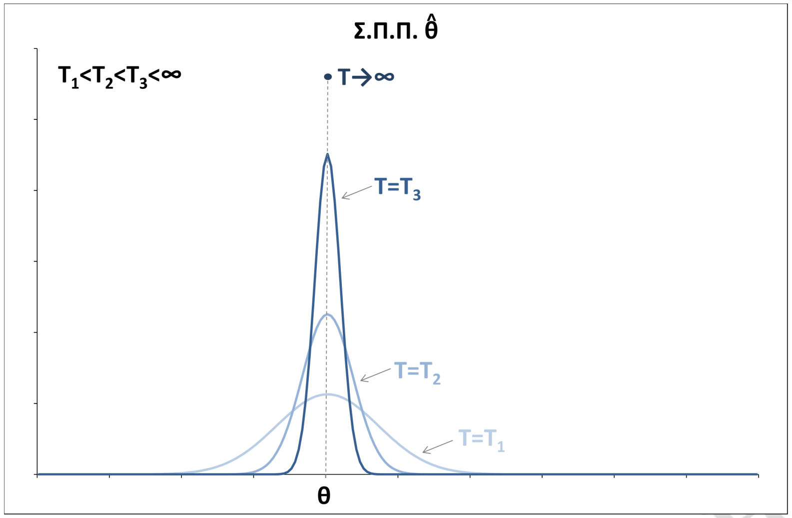
Ο εκτιμητής $\widehat{\theta}$ είναι ασυνεπής εκτιμητής του θ αν

$$\underset{T\to\infty}{plim}\,\widehat{\theta} \neq \theta$$

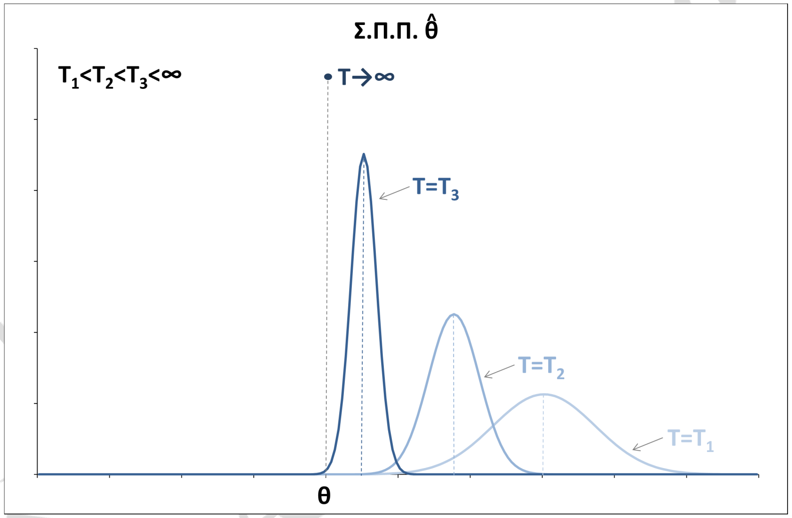
Σημείωση:

- Η ιδιότητα της συνέπειας είναι ασυμπτωτική, δηλαδή είναι για μέγεθος δείγματος $T \to \infty$.
- Αν ο εκτιμητής είναι συνεπής, τότε είναι και ασυμπτωτικά αμερόληπτος.
- Αν ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος και $\underset{T\to\infty}{lim}\, V(\widehat{\theta}) = 0$, τότε είναι και συνεπής.

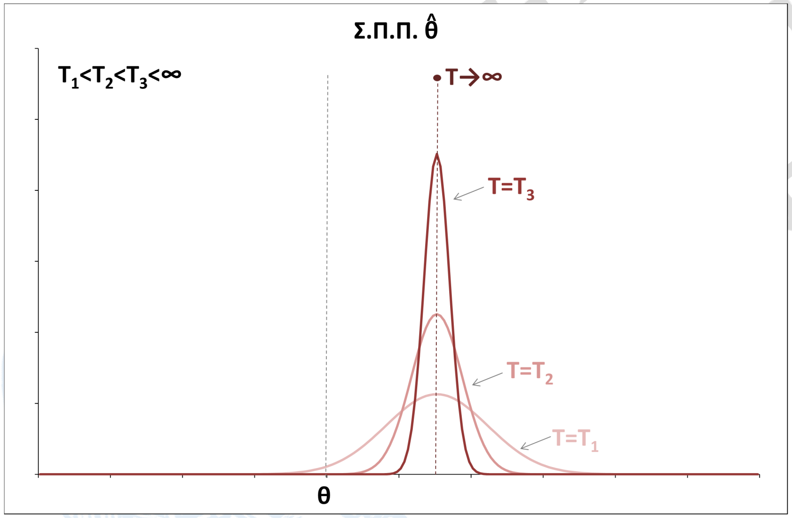
Αμερόληπτος και Συνεπής



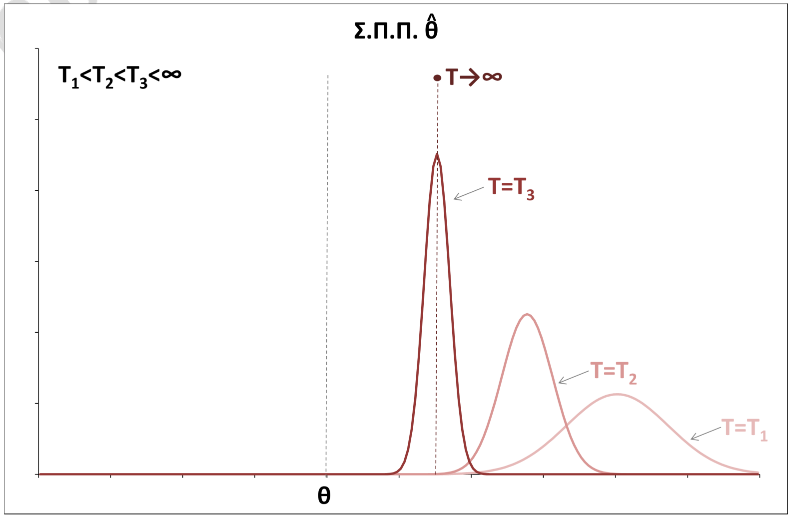
Μεροληπτικός και Συνεπής



Μεροληπτικός και Ασυνεπής



Μεροληπτικός και Ασυνεπής



Αποτελεσματικότητα ή Αριστεία

Ένας αμερόληπτος εκτιμητής $\widehat{\theta}$ είναι αποτελεσματικός ή άριστος εκτιμητής του θ αν

$$V(\widehat{\theta}) \leq V(\widetilde{\theta})$$

για κάθε άλλο αμερόληπτο εκτιμητή $\widetilde{\theta}$ του θ.

Ένας ασυμπτωτικά αμερόληπτος εκτιμητής $\widehat{\theta}$ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματικός ή άριστος εκτιμητής του θ αν

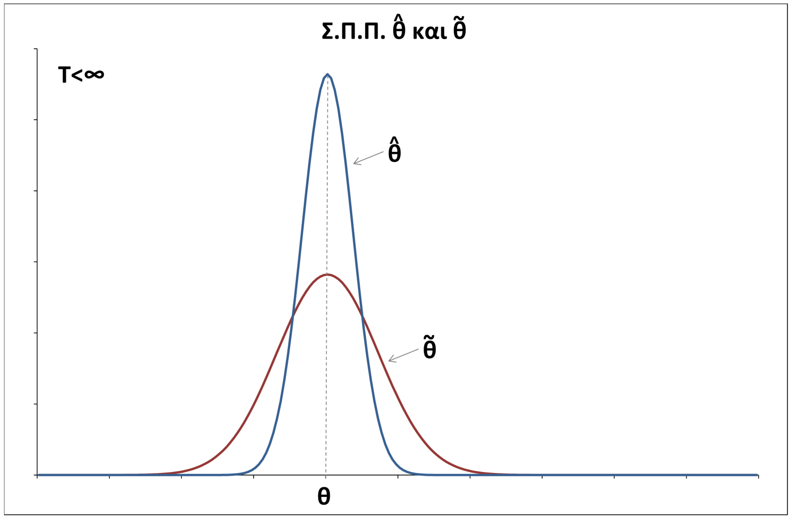
$$\lim_{T\to\infty} V(\widehat{\theta}) \leq \lim_{T\to\infty} V(\widetilde{\theta})$$

για κάθε άλλο ασυμπτωτικά αμερόληπτο εκτιμητή $\widetilde{\theta}$ του θ.

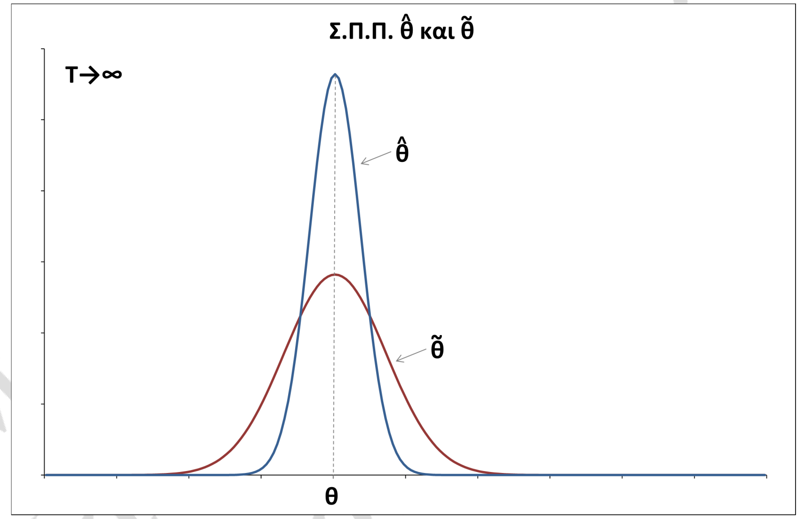
Σημείωση:

- Η ιδιότητα της αποτελεσματικότητας ή αριστείας αφορά πεπερασμένα δείγματα, δηλαδή είναι για σταθερό μέγεθος δείγματος $T < \infty$.
- Η ιδιότητα της ασυμπτωτικής αποτελεσματικότητας ή αριστείας είναι ασυμπτωτική, δηλαδή είναι για μέγεθος δείγματος $T \to \infty$.
- Η ιδιότητα της (ασυμπτωτικής) αποτελεσματικότητας ή αριστείας είναι δευτερεύουσα. Εξετάζεται όταν ο εκτιμητής είναι (ασυμπτωτικά) αμερόληπτος.

Άριστος



Ασυμπτωτικά Άριστος



Σημείωση:

- Σε όλα τα ανωτέρω γραφήματα, Σ.Π.Π. είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του εκτιμητή.

Στοχαστικές ερμηνευτικές μεταβλητές

- Υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$Y = X\beta + u \quad \acute{\eta} \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t, t = 1, ..., T$$

- Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης έγινε η υπόθεση ότι οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι μη στοχαστικές:

  A.3 X είναι μη στοχαστικός ή

  $X_1, ..., X_K$ είναι μη στοχαστικές.

- Στην Οικονομική επιστήμη, είναι σπάνιο οι ερμηνευτικές μεταβλητές να είναι μη στοχαστικές.

- Όταν οι $X_1, ..., X_K$ είναι στοχαστικές μεταβλητές οι βασικές υποθέσεις A.1-A.5 αλλάζουν εν μέρει, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι στοχαστικές και εξειδικεύοντας τη σχέση μεταξύ των ερμηνευτικών μεταβλητών $X_1, ..., X_K$ και του σφάλματος u.

Βασικές υποθέσεις με μη στοχαστικές ερμηνευτικές μεταβλητές

A.1 $Y = X\beta + u$ είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u) = 0$ ή

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t$, $t = 1, ..., T$, είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u_t) = 0$, $t = 1, ..., T$.

A.2 X είναι πλήρους βαθμού και $T > K + 1$ ή

δεν υπάρχουν ακριβής γραμμικές σχέσεις μεταξύ των $X_1, ..., X_K$ και $T > K + 1$.

A.3 X είναι μη στοχαστικός ή

$X_1, ..., X_K$ είναι μη στοχαστικές.

A.4 Ισχύει ότι $V(u) = \sigma^2 I$ ή

ισχύει ότι $V(u_t) = \sigma^2$, $t = 1, ..., T$ και $Cov(u_t, u_s) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$.

A.5 u ακολουθεί την κανονική κατανομή ή

u_t, $t = 1, ..., T$ ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Βασικές υποθέσεις με στοχαστικές ερμηνευτικές μεταβλητές

A.1 $Y = X\beta + u$ είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u) = 0$ ή

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t$, $t = 1, ..., T$, είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u_t) = 0$, $t = 1, ..., T$.

A.2 X είναι πλήρους βαθμού με πιθανότητα 1 και $T > K + 1$ ή

δεν υπάρχουν ακριβής γραμμικές σχέσεις μεταξύ των $X_1, ..., X_K$ με πιθανότητα 1 και $T > K + 1$.

A.3 X και u είναι ανεξάρτητα ή

X_{tj} και u_s είναι ανεξάρτητα, $t, s = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

A.4 Ισχύει ότι $V(u|X) = \sigma^2 I$ ή

ισχύει ότι $V(u_t|X) = \sigma^2$, $t = 1, ..., T$ και $Cov(u_t, u_s|X) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$.

A.5 $u|X$ ακολουθεί την κανονική κατανομή ή

$u_t|X$, $t = 1, ..., T$ ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Στατιστικές ιδιότητες των OLS εκτιμητών $\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{s^2}$ και $\widehat{\boldsymbol{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{X})$ (ΣΙπα)

1. Αν οι Α.1-Α.3 ισχύουν, ο $\widehat{\beta}$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του β.

2. Αν οι Α.1-Α.4 ισχύουν, ο πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων του $\widehat{\beta}$ είναι ο $V(\widehat{\beta}|X) = \sigma^2(X^{'}X)^{-1}$.

3. Θεώρημα Gauss-Markov: Αν οι Α.1-Α.4 ισχύουν, ο $\widehat{\beta}$ είναι άριστος γραμμικός, αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του β, δοθέντος X.

4. Αν οι Α.1-Α.4 ισχύουν, ο s^2 είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του σ^2.

5. Αν οι Α.1-Α.4 ισχύουν, ο $\widehat{V}(\widehat{\beta}|X)$ είναι αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του $V(\widehat{\beta}|X)$.

6. Αν οι Α.1-Α.5 ισχύουν, $\widehat{\beta}|X \sim N(\beta, \sigma^2(X^{'}X)^{-1})$, $(T-K-1)\frac{s^2}{\sigma^2}|X \sim \chi^2_{T-K-1}$ και οι $\widehat{\beta}, s^2$ είναι ανεξάρτητοι, δοθέντος X.

7. Αν οι Α.1-Α.5 ισχύουν ο $\widehat{\beta}$ είναι άριστος, αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του β, δοθέντος X.

Σημείωση:

- Οι στατιστικές ιδιότητες των OLS εκτιμητών είναι ίδιες με αυτές όταν οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι μη στοχαστικές. Η μόνη διαφορά είναι ότι κάποιες από τις στατιστικές ιδιότητες είναι δοθέντος X.

- Η στατιστική ανάλυση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης με στοχαστικές ερμηνευτικές μεταβλητές γίνεται όπως όταν οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι μη στοχαστικές.

- Για λόγους απλότητας, ο συμβολισμός $|X$ στις βασικές υποθέσεις και τις στατιστικές ιδιότητες των εκτιμητών δεν θα γράφεται αλλά θα εννοείται.

- Όταν οι Α.1-Α.5 ισχύουν, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ είναι άριστος, αμερόληπτος και συνεπής εκτιμητής του β. Άρα, η μέθοδος OLS είναι η καλύτερη μέθοδος εκτίμησης εφόσον οι Α.1-Α.5 ισχύουν. Αποδεικνύεται ότι ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ συμπίπτει με τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας όταν Α.1-Α.5 ισχύουν.

- Υπάρχουν υποδείγματα παλινδρόμησης που η υπόθεση Α.3 δεν ισχύει, π.χ. όταν υπάρχει εξαρτημένη μεταβλητή με υστέρηση ως ερμηνευτική μεταβλητή

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t$$

Ισχύει ότι $Cov(Y_t, u_t) \neq 0 \Rightarrow Cov(Y_{t-1}, u_{t-1}) \neq 0 \Rightarrow Cov(Y_{t-1}, u_s) \neq 0$ με $s = t-1 \Rightarrow$ Α.3 δεν ισχύει.

- Όταν η υπόθεση Α.3. δεν ισχύει, οι στατιστικές ιδιότητες πεπερασμένων δειγμάτων των OLS εκτιμητών δεν ισχύουν. Οι $\widehat{\beta}$, s^2 και $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ είναι μεροληπτικοί εκτιμητές των β, σ^2 και $V(\widehat{\beta})$, αντίστοιχα. Οι κατανομές των $\widehat{\beta}$ και s^2 στο 6. (ΣΙαπ) παύουν να ισχύουν σε πεπερασμένα δείγματα.

- Στην περίπτωση που η υπόθεση Α.3 δεν ισχύει, χρησιμοποιείται η πιο ασθενής μορφής της

Α.3' X και u είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστα ή

X_{tj} και u_t είναι ασυσχέτιστα $t = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

Στατιστικές ιδιότητες των OLS εκτιμητών $\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{s^2}$ και $\widehat{\boldsymbol{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{X})$ (ΣΙα)

1. Αν οι A.1-A.3' ισχύουν, ο $\widehat{\beta}$ είναι συνεπής εκτιμητής του β.

2. Αν οι A.1-A.3',A.4 ισχύουν, ο ασυμπτωτικός πίνακας διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων του $\widehat{\beta}$ είναι ο $V(\widehat{\beta}|X) = \sigma^2(X'X)^{-1}$.

3. Θεώρημα Gauss-Markov: Αν οι A.1-A.3',A.4 ισχύουν, ο $\widehat{\beta}$ είναι ασυμπτωτικά άριστος γραμμικός και συνεπής εκτιμητής του β, δοθέντος X.

4. Αν οι A.1-A.3',A.4 ισχύουν, ο s^2 είναι συνεπής εκτιμητής του σ^2.

5. Αν οι A.1-A.3',A.4 ισχύουν, ο $\widehat{V}(\widehat{\beta}|X)$ είναι συνεπής εκτιμητής του $V(\widehat{\beta}|X)$.

6. Αν οι A.1-A.3',A.4,A.5 ισχύουν, ασυμπτωτικά $\widehat{\beta}|X \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$, $(T-K-1)\frac{s^2}{\sigma^2}|X \sim \chi^2_{T-K-1}$ και οι $\widehat{\beta}, s^2$ είναι ανεξάρτητοι, δοθέντος X.

7. Αν οι A.1-A.3',A.4,A.5 ισχύουν ο $\widehat{\beta}$ είναι ασυμπτωτικά άριστος και συνεπής εκτιμητής του β, δοθέντος X.

- Η υπόθεση Α.5 είναι περιοριστική και συχνά δεν ισχύει.

- Η υπόθεση Α.5 δεν είναι απαραίτητη στην απόδειξη των ασυμπτωτικών κατανομών των $\widehat{\beta}$ και s^2 στο 6. (ΣΙα) και μπορεί να αντικατασταθεί από την πιο ασθενή μορφή της

  Α.5' u είναι ανεξάρτητο και ισοκατανεμημένο ή

  u_t είναι ανεξάρτητα και ισοκατανεμημένα $t = 1, ..., T$.

- Στο 6. (ΣΙπα) αν γίνει η υπόθεση Α.5' αντί της Α.5, τότε οι κατανομές των $\widehat{\beta}$ και s^2 στο 6. ισχύουν ασυμπτωτικά.

- Οι βασικές υποθέσεις Α.1,Α.2,Α.3/Α.3',Α.4 και Α.5/Α.5' πρέπει να ισχύουν για να γίνει αξιόπιστη στατιστική ανάλυση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης.

- Αν κάποια ή κάποιες από τις βασικές υποθέσεις δεν ισχύουν, γενικά η στατιστική ανάλυση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν θα είναι αξιόπιστη.

Απόδειξη των 1.-2.

$$
\begin{aligned}
\widehat{\beta} &= (X^{'}X)^{-1}X^{'}Y \overset{\textbf{A.1}}{=} (X^{'}X)^{-1}X^{'}(X\beta + u) \\
&= (X^{'}X)^{-1}X^{'}X\beta + (X^{'}X)^{-1}X^{'}u = \beta + (X^{'}X)^{-1}X^{'}u \qquad (*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\widehat{\beta}) &\overset{(*)}{=} E(\beta + (X^{'}X)^{-1}X^{'}u) = \beta + E((X^{'}X)^{-1}X^{'}u) \\
&\overset{\textbf{A.3}}{=} \beta + E((X^{'}X)^{-1}X^{'})E(u) \overset{\textbf{A.1}}{=} \beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{T\to\infty}{plim}\,\widehat{\beta} &\overset{(*)}{=} \underset{T\to\infty}{plim}\,(\beta + (X^{'}X)^{-1}X^{'}u) = \beta + \underset{T\to\infty}{plim}\,((X^{'}X)^{-1}X^{'}u) \\
&= \beta + \underset{T\to\infty}{plim}\,(X^{'}X/T)^{-1}(X^{'}u/T) = \beta + \underset{T\to\infty}{plim}\,(X^{'}X/T)^{-1}\,\underset{T\to\infty}{plim}\,(X^{'}u/T) \\
&\overset{\textbf{A.1,A.3'}}{=} \beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(\widehat{\beta}|X) &\overset{(*)}{=} V((\beta + (X^{'}X)^{-1}X^{'}u)|X) = V((X^{'}X)^{-1}X^{'}u|X) \\
&= (X^{'}X)^{-1}X^{'}V(u|X)X(X^{'}X)^{-1} \overset{\textbf{A.4}}{=} (X^{'}X)^{-1}X^{'}\sigma^2 IX(X^{'}X)^{-1} \\
&= \sigma^2(X^{'}X)^{-1}
\end{aligned}
$$