ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Θεωρία: 07

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Βασικές υποθέσεις Α.1-Α.4

Α.1 $Y = X\beta + u$ είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u) = 0$ ή

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t$, $t = 1, ..., T$, είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u_t) = 0$, $t = 1, ..., T$.

Α.2 X είναι πλήρους βαθμού με πιθανότητα 1 και $T > K + 1$ ή

δεν υπάρχουν ακριβής γραμμικές σχέσεις μεταξύ των $X_1, ..., X_K$ με πιθανότητα 1 και $T > K + 1$.

Α.3 X και u είναι ανεξάρτητα ή

X_{tj} και u_s είναι ανεξάρτητα, $t, s = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

Α.3' X και u είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστα ή

X_{tj} και u_t είναι ασυσχέτιστα $t = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

Α.4 Ισχύει ότι $V(u|X) = \sigma^2 I$ ή

ισχύει ότι $V(u_t|X) = \sigma^2$, $t = 1, ..., T$ και $Cov(u_t, u_s|X) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$.

Ενδογένεια

Υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$Y = X\beta + u \quad ή \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t, t = 1, ..., T$$

Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης γίνεται η υπόθεση A.3 ή η υπόθεση A.3':

<u>Αυστηρή Εξωγένεια</u>

A.3 X και u είναι ανεξάρτητα ή

X_{tj} και u_s είναι ανεξάρτητα, $t, s = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

<u>Ασθενή Εξωγένεια</u>

A.3' X και u είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστα ή

X_{tj} και u_t είναι ασυσχέτιστα $t = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

Σημείωση: Η υπόθεση A.3 θα μπορούσε να αντικατασταθεί από

A.3 Ισχύει ότι $E(u|X) = 0$ ή

Ισχύει ότι $E(u_s|X_{tj}) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $j = 1, ..., K$.

- Αν η ερμηνευτική μεταβλητή X_j και το σφάλμα είναι ανεξάρτητα για όλες τις παρατηρήσεις, X_{tj} και u_s ανεξάρτητα για κάθε $t, s = 1, ..., T$, τότε η ερμηνευτική μεταβλητή X_j είναι αυστηρώς εξωγενής (strictly exogenous).

- Αν η ερμηνευτική μεταβλητή X_j και το σφάλμα είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστα για όλες τις παρατηρήσεις, $Corr(X_{tj}, u_t) = 0$ για κάθε $t = 1, ..., T$, τότε η ερμηνευτική μεταβλητή X_j είναι ασθενώς εξωγενής (weakly exogenous).

- Αν η ερμηνευτική μεταβλητή X_j και το σφάλμα συσχετίζονται ταυτόχρονα για κάποιες παρατηρήσεις, $Corr(X_{tj}, u_t) \neq 0$ για κάποια $t = 1, ..., T$, τότε η ερμηνευτική μεταβλητή X_j είναι ενδογενής (endogenous).

- Η μοναδιαία μεταβλητή του σταθερού όρου $\mathbb{1}_t = 1$ είναι αυστηρώς εξωγενής.

- Αν όλες οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι αυστηρώς εξωγενείς, τότε υπάρχει αυστηρή εξωγένεια (strict exogeneity).

- Αν κάποιες ερμηνευτικές μεταβλητές είναι αυστηρώς εξωγενείς και οι υπόλοιπες ερμηνευτικές μεταβλητές είναι ασθενώς εξωγενείς ή αν όλες οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι ασθενώς εξωγενείς, τότε υπάρχει ασθενή εξωγένεια (weak exogeneity).

- Αν τουλάχιστον μία ερμηνευτική μεταβλητή είναι ενδογενής, τότε υπάρχει ενδογένεια (endogeneity).

- π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + u_t$$

(i) Αν X_{t1}, X_{t2} και u_s είναι ανεξάρτητα, $t, s = 1, ..., T \Rightarrow X_1, X_2$ αυστηρώς εξωγενείς $\Rightarrow$ αυστηρή εξωγένεια

(ii) Αν X_{t1} και u_t είναι ασυσχέτιστα, $t = 1, ..., T$, και X_{t2} και u_s είναι ανεξάρτητα $t, s = 1, ..., T \Rightarrow X_1$ ασθενώς εξωγενής και X_2 αυστηρώς εξωγενής $\Rightarrow$ ασθενή εξωγένεια

(iii) Αν X_{t1}, X_{t2} και u_t είναι ασυσχέτιστα, $t = 1, ..., T \Rightarrow X_1, X_2$ ασθενώς εξωγενείς $\Rightarrow$ ασθενή εξωγένεια

(iv) Αν X_{t1} ή/και X_{t2} και u_t δεν είναι ασυσχέτιστα, για κάποια $t = 1, ..., T \Rightarrow X_1$ ή/και X_2 ενδογενείς $\Rightarrow$ ενδογένεια

- Αν υπάρχει αυστηρή εξωγένεια, η υπόθεση Α.3 ισχύει.

- Αν υπάρχει ασθενή εξωγένεια, η υπόθεση Α.3' ισχύει και η υπόθεση Α.3 δεν ισχύει.

- Αν υπάρχει ενδογένεια, η υπόθεση Α.3/Α.3' δεν ισχύει.

- Λόγοι ύπαρξης ενδογένειας:

  – Σφάλμα μέτρησης (measurement error).

  – Σφάλμα εξειδίκευσης (specification error).

  – Σφάλμα αλληλεξάρτησης (simultaneity problem).

  – Αν s^{η}-υστέρηση της εξαρτημένης μεταβλητής, Y_{t-s}, είναι ερμηνευτική μεταβλητή στο υπόδειγμα παλινδρόμησης και υπάρχει αυτοσυσχέτιση $s^{\eta\varsigma}$-τάξης.

π.χ. Σφάλμα μέτρησης

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^* + u_t \quad (1)$$

όπου X^* είναι αυστηρώς εξωγενής (2).

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t \quad (3) \quad \text{με } X_t = X_t^* + \varepsilon_t \quad (4)$$

όπου ε_t είναι το σφάλμα μέτρησης (αν $E(\varepsilon_t) \neq$ σταθερή $= 0 \Rightarrow$ A.1 δεν ισχύει).

Έστω ότι ε_t και X_s^*, u_s είναι ανεξάρτητα, $t, s = 1, ..., T$ (5). Ισχύει ότι

$$(1) \overset{(4)}{\Rightarrow} Y_t = \beta_0 + \beta_1(X_t - \varepsilon_t) + u_t \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + (u_t - \beta_1 \varepsilon_t) \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t \ \ (3)$$

όπου $w_t = u_t - \beta_1 \varepsilon_t$ (6). Άρα,

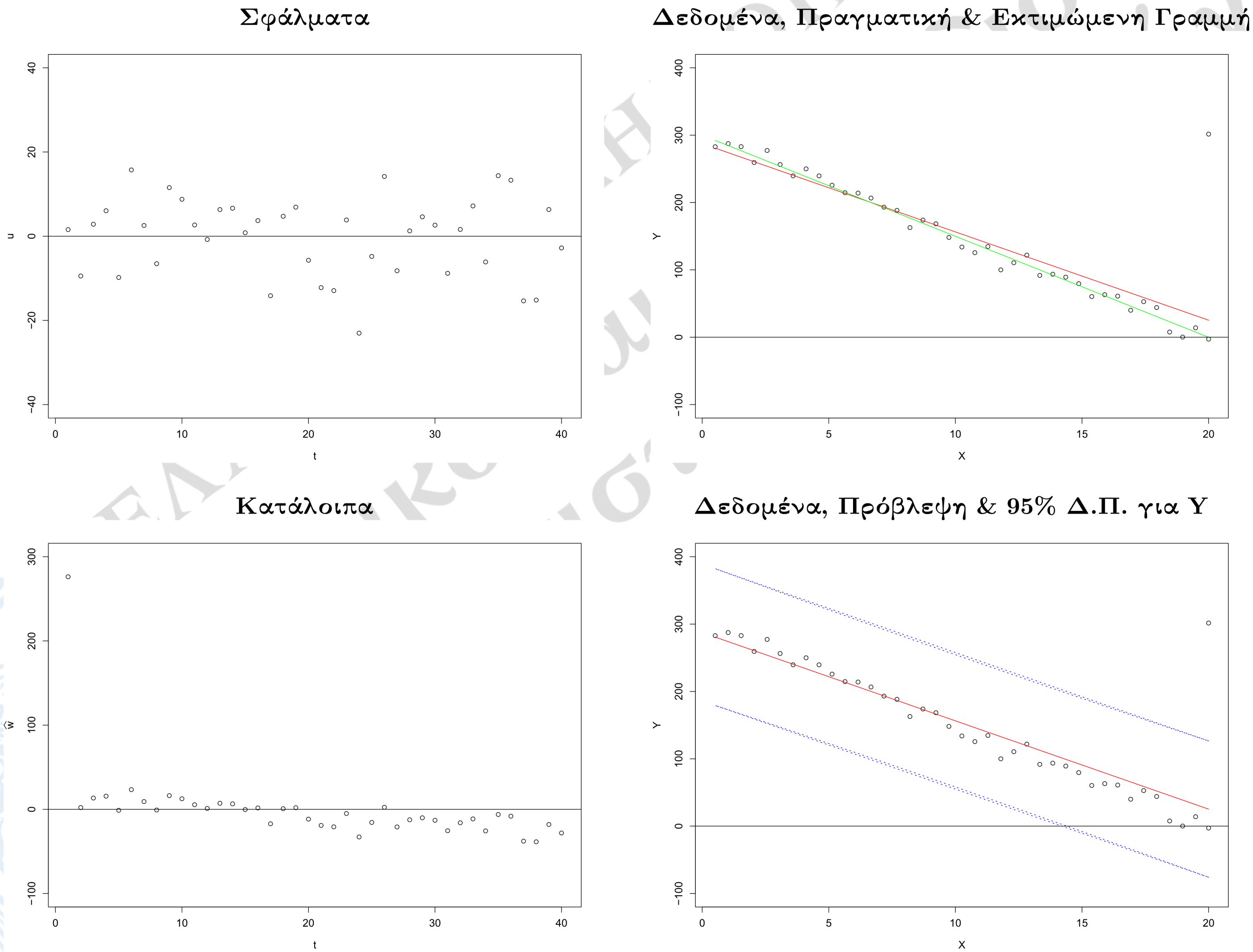
$$\begin{aligned} Cov(X_t, w_t) &\overset{(4),(6)}{=} Cov(X_t^* + \varepsilon_t, u_t - \beta_1 \varepsilon_t) \\ &= Cov(X_t^*, u_t) - \beta_1 Cov(X_t^*, \varepsilon_t) + Cov(\varepsilon_t, u_t) - \beta_1 Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) \\ &\overset{(2),(5)}{=} -\beta_1 V(\varepsilon_t) \neq 0 \Rightarrow \text{A.3/A.3' δεν ισχύει} \end{aligned}$$

π.χ. Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 300 - 15X_t^* + u_t$, $t = 1, ..., 40$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t$

με $X_1 = 20 + X_1^*$ και $X_t = X_t^*$, $t = 2, ..., 40$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS



π.χ. Σφάλμα μέτρησης

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad (1)$$

όπου X είναι αυστηρώς εξωγενής (2).

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t \quad (3) \quad \text{με } Y_t = Y_t^* + \varepsilon_t \quad (4)$$

όπου ε_t είναι το σφάλμα μέτρησης (αν $E(\varepsilon_t) \neq$ σταθερή $= 0 \Rightarrow$ Α.1 δεν ισχύει).

Ισχύει ότι

$$(1) \overset{(4)}{\Rightarrow} Y_t - \varepsilon_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + (u_t + \varepsilon_t) \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t \;\; (3)$$

όπου $w_t = u_t + \varepsilon_t$ (5). Άρα,

$$\begin{aligned} Cov(X_t, w_t) &\overset{(5)}{=} Cov(X_t, u_t + \varepsilon_t) = Cov(X_t, u_t) + Cov(X_t, \varepsilon_t) \\ &\overset{(2)}{=} Cov(X_t, \varepsilon_t) \neq 0 \Rightarrow \text{Α.3/Α.3' δεν ισχύει} \end{aligned}$$

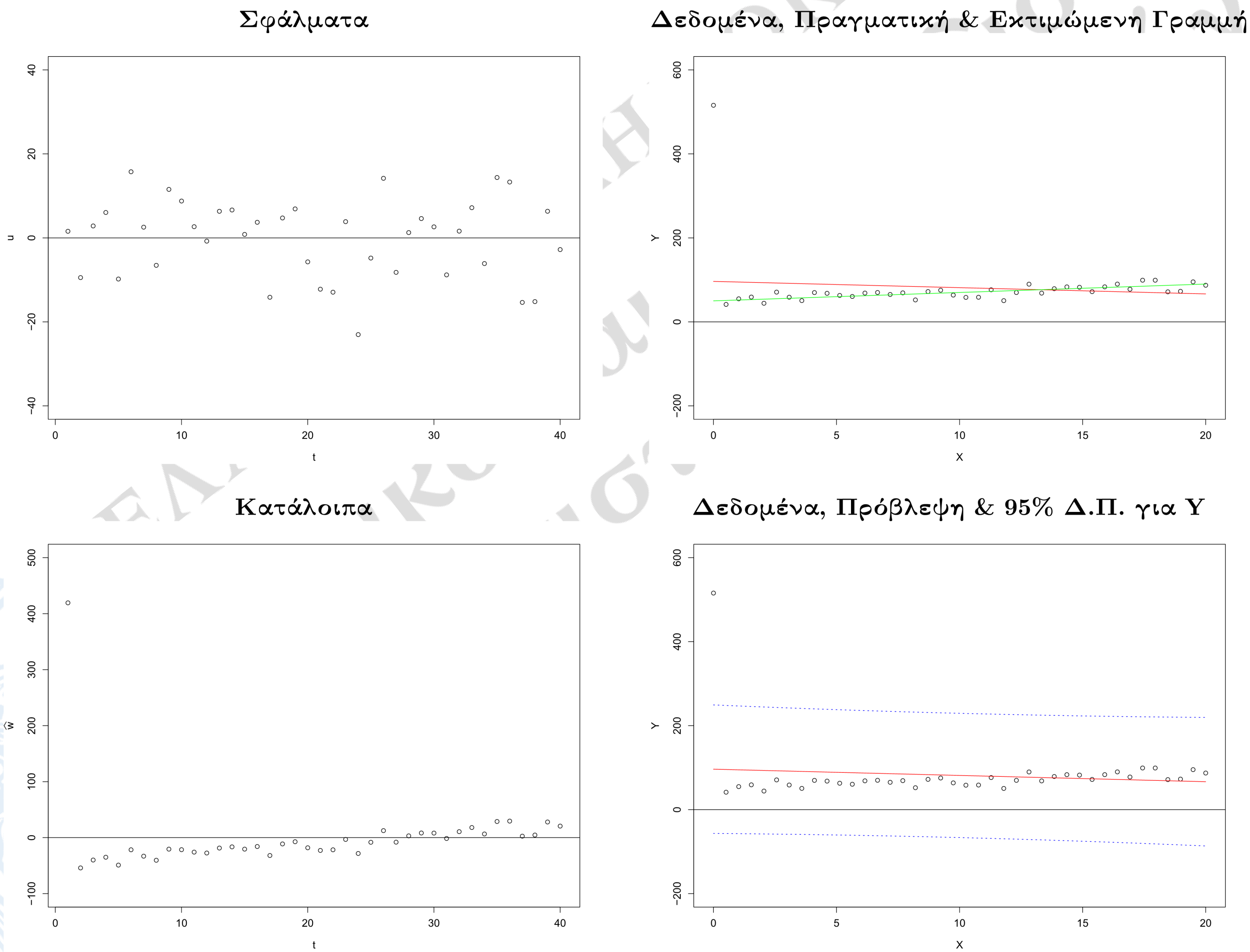
όταν $Cov(X_t, \varepsilon_t) \neq 0$.

π.χ. Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t^* = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, ..., 40$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t$

με $Y_1 = 10Y_1^*$ και $Y_t = Y_t^*$, $t = 2, ..., 40$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS



π.χ. Σφάλμα εξειδίκευσης

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + u_t \quad (1)$$

όπου X_1, X_2 είναι αυστηρώς εξωγενείς (2).

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + w_t \quad (3)$$

Ισχύει ότι

$$(1) \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + (u_t + \beta_2 X_{t2}) \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + w_t \;\; (3)$$

όπου $w_t = u_t + \beta_2 X_{t2}$ (4). Άρα,

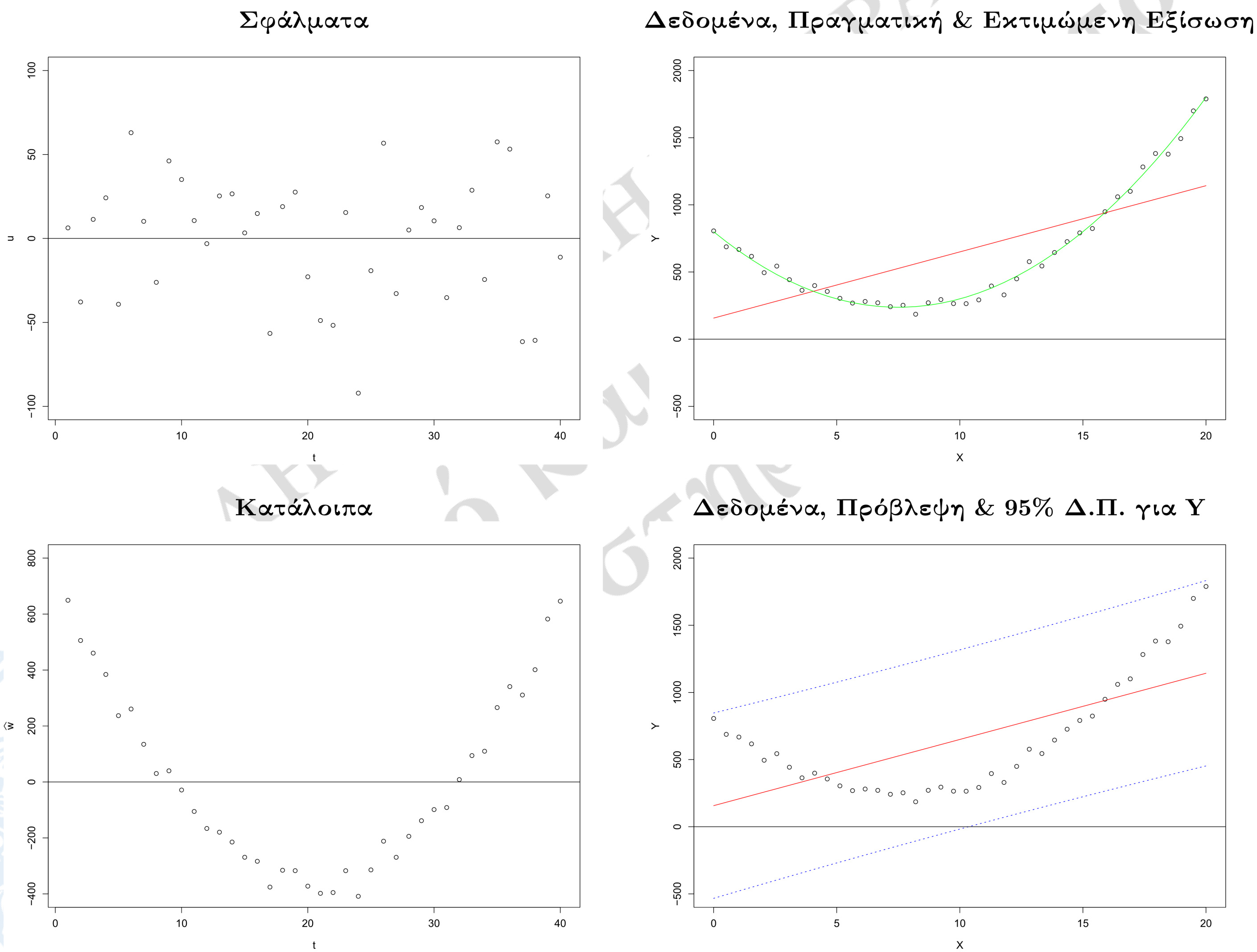
$$\begin{aligned} Cov(X_{t1}, w_t) &\overset{(4)}{=} Cov(X_{t1}, u_t + \beta_2 X_{t2}) = Cov(X_{t1}, u_t) + \beta_2 Cov(X_{t1}, X_{t2}) \\ &\overset{(2)}{=} \beta_2 Cov(X_{t1}, X_{t2}) \neq 0 \Rightarrow \text{A.3/A.3' δεν ισχύει} \end{aligned}$$

όταν $Cov(X_{t1}, X_{t2}) \neq 0$.

π.χ. Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 800 - 150X_t + 10X_t^2 + u_t,\ t = 1, ..., 40$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS



π.χ. Σφάλμα εξειδίκευσης

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^2 + u_t \quad (1)$$

όπου X είναι αυστηρώς εξωγενής (2).

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t \quad (3)$$

Ισχύει ότι

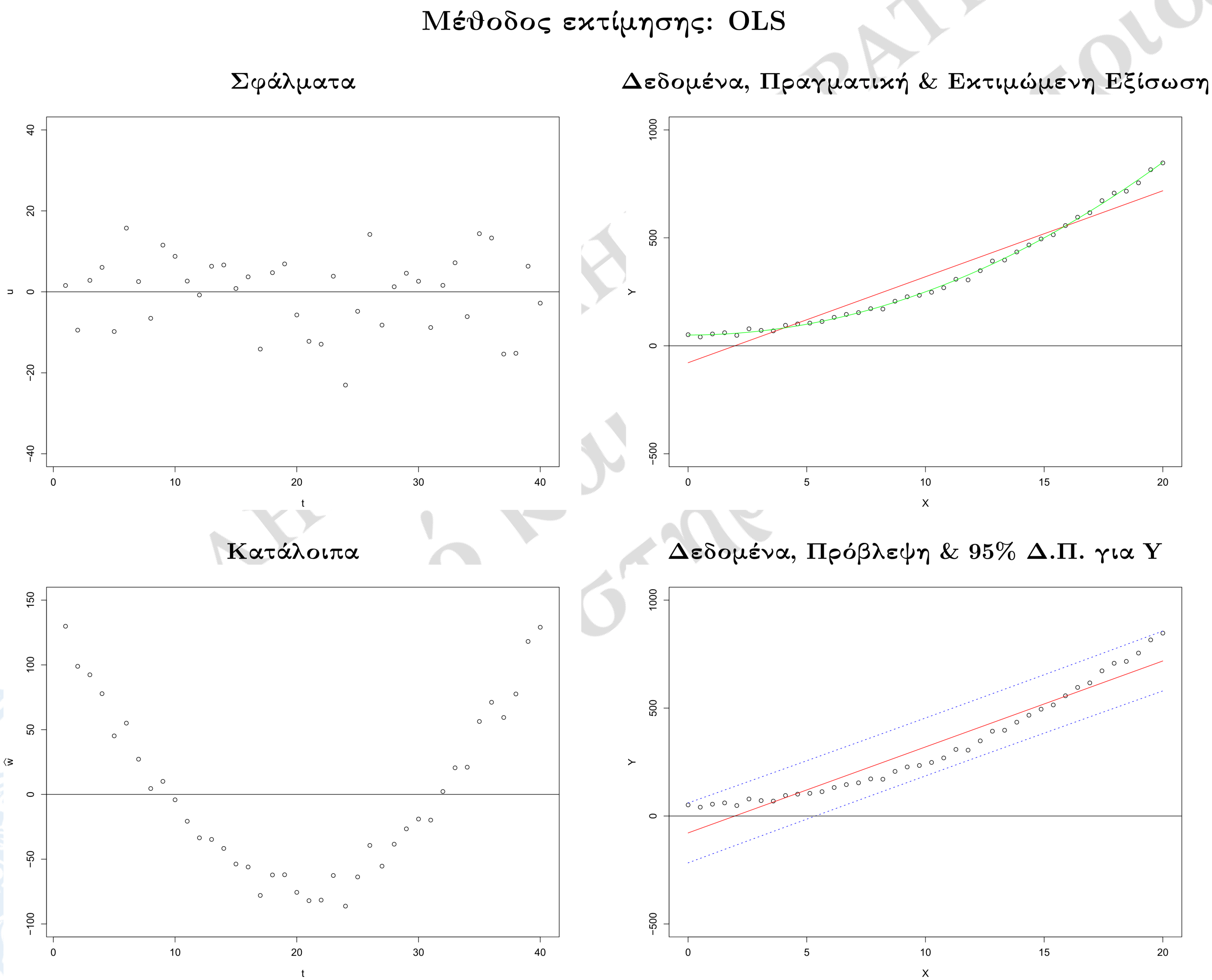
$$(1) \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + (u_t - \beta_1 X_t + \beta_1 X_t^2) \Rightarrow Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t \;\; (3)$$

όπου $w_t = u_t - \beta_1 X_t + \beta_1 X_t^2$ (4). Άρα,

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, w_t) &\overset{(4)}{=} Cov(X_t, u_t - \beta_1 X_t + \beta_1 X_t^2) \\
&= Cov(X_t, u_t) - \beta_1 Cov(X_t, X_t) + \beta_1 Cov(X_t, X_t^2) \\
&\overset{(2)}{=} -\beta_1 V(X_t) + \beta_1 Cov(X_t, X_t^2) \neq 0 \Rightarrow \text{A.3/A.3' δεν ισχύει}
\end{aligned}$$

π.χ. Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t^2 + u_t,\ t = 1, \ldots, 40$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t$



π.χ. Σφάλμα αλληλεξάρτησης

Πραγματικά υποδείγματα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_t \quad (1)$$

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad (2)$$

όπου u και ε είναι ανεξάρτητα (3).

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \quad (2)$$

Ισχύει ότι

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} X_t = \alpha_0 + \alpha_1(\beta_0 + \beta_1 X_t + u_t) + \varepsilon_t \Rightarrow (1 - \alpha_1\beta_1)X_t = \alpha_0 + \alpha_1\beta_0 + \varepsilon_t + \alpha_1 u_t \Rightarrow$$

$$X_t = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\beta_0}{1 - \alpha_1\beta_1} + \frac{\varepsilon_t + \alpha_1 u_t}{1 - \alpha_1\beta_1} \Rightarrow X_t = \gamma\delta + \delta(\varepsilon_t + \alpha_1 u_t) \ \ (4)$$

όπου $\gamma = \alpha_0 + \alpha_1\beta_0$ και $\delta = 1/(1 - \alpha_1\beta_1)$. Άρα,

$$Cov(X_t, u_t) \overset{(4)}{=} Cov(\gamma\delta + \delta(\varepsilon_t + \alpha_1 u_t), u_t) = \delta Cov(\varepsilon_t + \alpha_1 u_t, u_t)$$

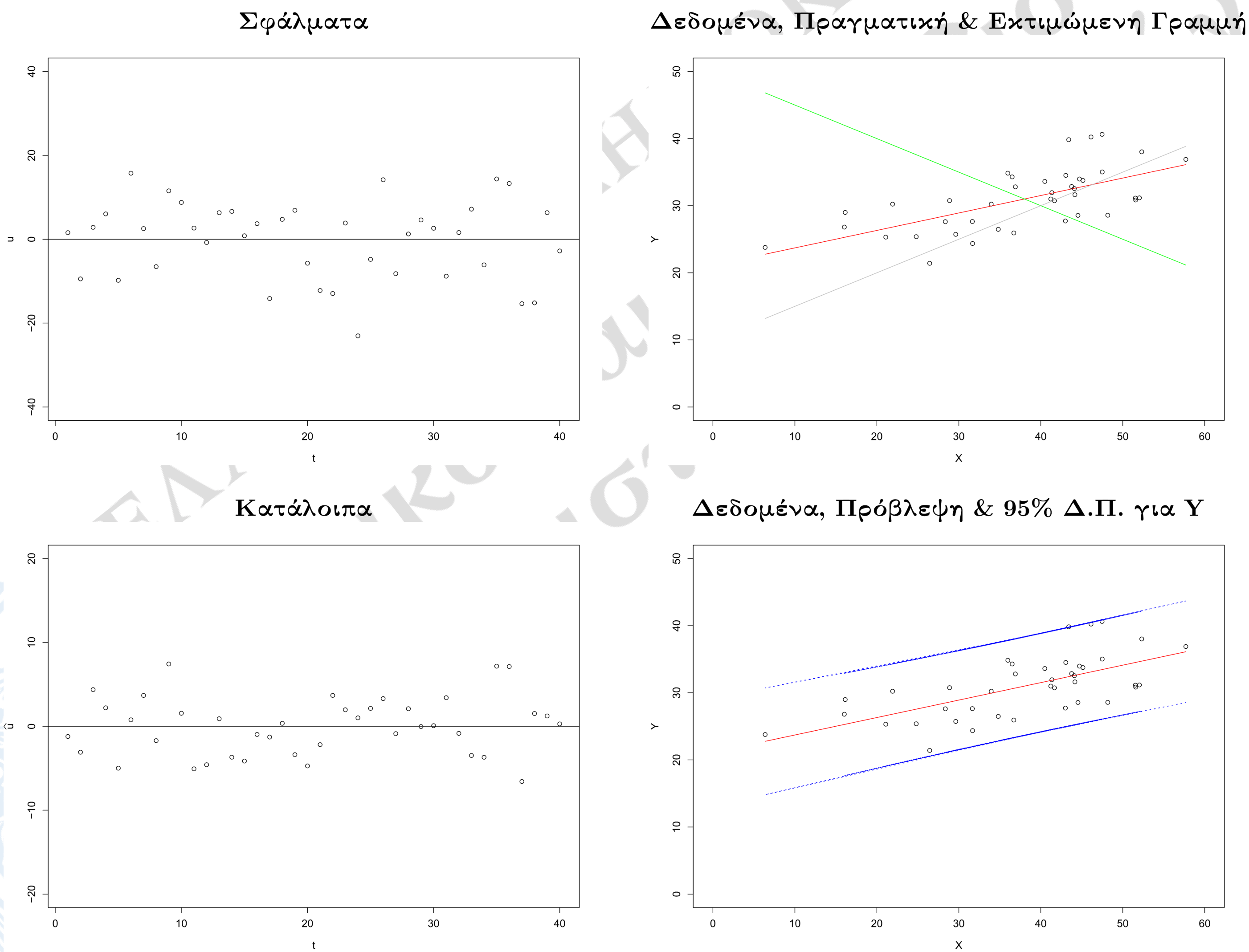
$$= \delta(Cov(\varepsilon_t, u_t) + \alpha_1 Cov(u_t, u_t)) \overset{(3)}{=} \delta\alpha_1 V(u_t) \neq 0 \Rightarrow \text{A.3/A.3' δεν ισχύει}$$

π.χ. Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $X_t = -20 + 2Y_t + \varepsilon_t$

$$Y_t = 50 - 0,5X_t + u_t,\ t = 1, ..., 40$$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS



π.χ. Υστερήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής και αυτοσυσχέτιση

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t \quad (1) \qquad \text{με } u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

όπου X είναι αυστηρώς εξωγενής και $Cov(Y_{t-1}, \varepsilon_t) = 0$ (3).

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t \quad (1)$$

Ισχύει ότι

$$(1) \Rightarrow Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-2} + \beta_2 X_{t-1} + u_{t-1} \Rightarrow Cov(Y_{t-1}, u_{t-1}) \neq 0 \;\; (4)$$

Άρα,

$$(4) \Rightarrow Cov(Y_{t-1}, u_s) \neq 0 \text{ με } s = t-1 \Rightarrow \text{A.3 δεν ισχύει}$$

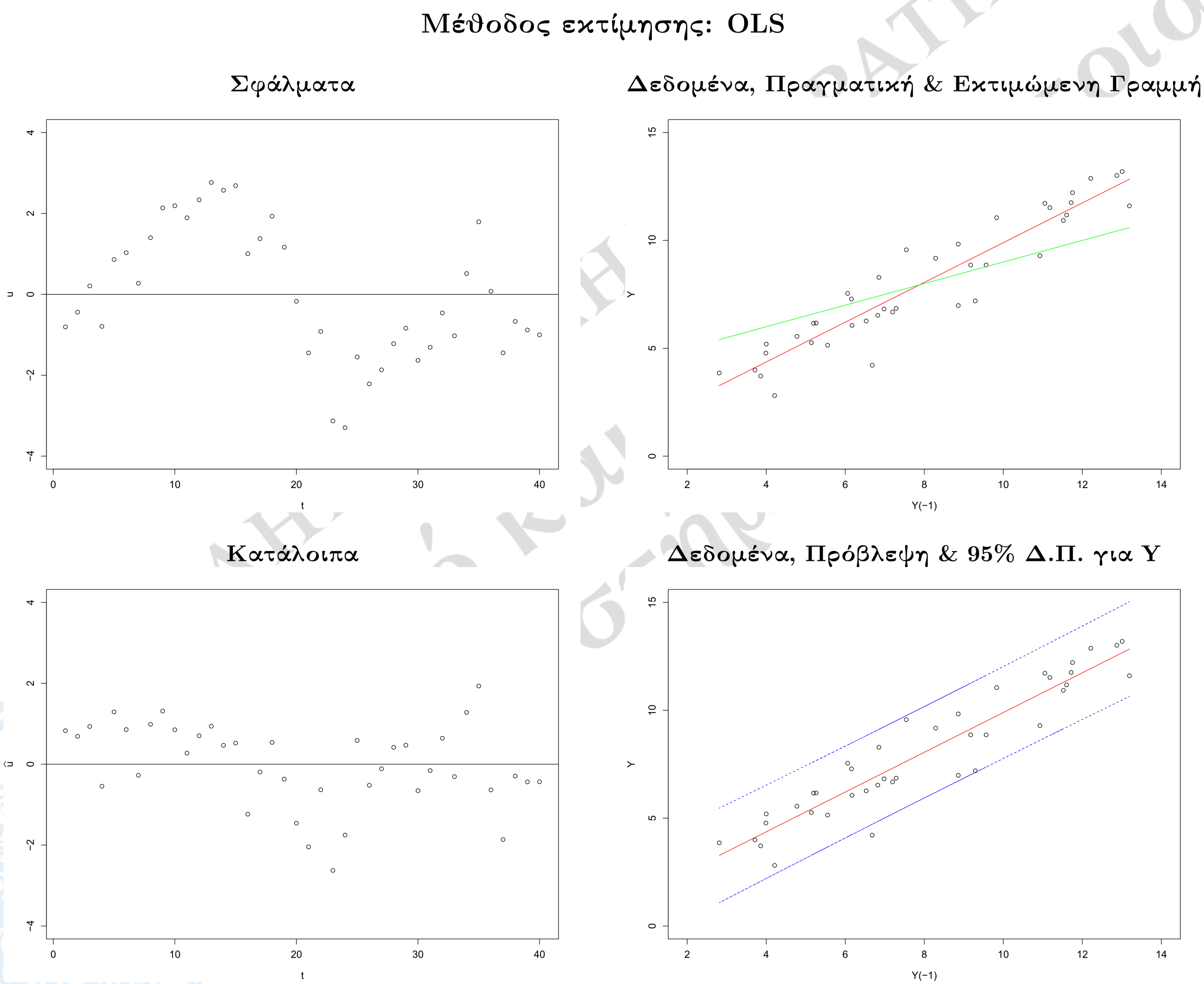
και

$$Cov(Y_{t-1}, u_t) \overset{(2)}{=} Cov(Y_{t-1}, \rho u_{t-1} + \varepsilon_t) = \rho Cov(Y_{t-1}, u_{t-1}) + Cov(Y_{t-1}, \varepsilon_t)$$

$$\overset{(3)}{=} \rho Cov(Y_{t-1}, u_{t-1}) \overset{(4)}{\neq} 0 \Rightarrow \text{A.3' δεν ισχύει}$$

π.χ. Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 4 + 0.5 Y_{t-1} + u_t$ με $u_t = 0.9 u_{t-1} + \varepsilon_t$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + u_t$



- Αν υπάρχει ενδογένεια και ακόμα και αν οι υπόλοιπες υποθέσεις A.1-A.2 και A.4-A.5/A.5' ισχύουν:
  - Ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής του β.
  - Ο OLS εκτιμητής s^2 είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής του σ^2.
  - Ο OLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής του $V(\widehat{\beta})$.
  - Οι προβλέψεις $\widehat{Y}_f$ και $\widehat{E(Y_f)}$ είναι μεροληπτικές και ασυνεπείς προβλέψεις των Y_f και $E(Y_f)$.
  - Οι στατιστικοί έλεγχοι t και F, τα διαστήματα εμπιστοσύνης και προβλέψεων είναι αναξιόπιστα.

Μέθοδος βοηθητικών μεταβλητών (IV) και γενικευμένη μέθοδος βοηθητικών μεταβλητών (GIVE)

Έστω ότι η ερμηνευτική μεταβλητή X_j είναι ενδογενής. Η μεταβλητή Z_j^* είναι βοηθητική μεταβλητή (instrumental variable) για την ενδογενή ερμηνευτική μεταβλητή X_j όταν έχει τις εξής ιδιότητες:

1) Η μεταβλητή Z_j^* δεν περιλαμβάνεται στο υπόδειγμα παλινδρόμησης.

2) Η μεταβλητή Z_j^* είναι (υψηλά) ταυτόχρονα συσχετισμένη με την ενδογενή ερμηνευτική μεταβλητή X_j, $Corr(Z_{tj}^*, X_{tj}) \neq 0$ (όσο πιο κοντά στο ± 1), $t = 1, ..., T$.

3) Η μεταβλητή Z_j^* είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστη με το σφάλμα, $Corr(Z_{tj}^*, u_t) = 0$, $t = 1, ..., T$.

Για κάθε ενδογενή ερμηνευτική μεταβλητή στο υπόδειγμα παλινδρόμησης θα πρέπει να βρεθεί τουλάχιστον μία βοηθητική μεταβλητή.

- Αν για κάθε ενδογενή ερμηνευτική μεταβλητή υπάρχει μία βοηθητική μεταβλητή, τότε ορίζεται ο πίνακας Z με αριθμό στηλών $M = K + 1$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & Z_{11} & \dots & Z_{1K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & Z_{T1} & \dots & Z_{TK} \end{pmatrix}$$

όπου $Z_j = X_j$ αν η ερμηνευτική μεταβλητή X_j είναι (αυστηρώς ή ασθενώς) εξωγενής και $Z_j = Z_j^*$ αν η ερμηνευτική μεταβλητή X_j είναι ενδογενής.

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + u_t$$

όπου X_1 είναι ενδογενής και X_2 είναι (αυστηρώς ή ασθενώς) εξωγενής. Έστω ότι υπάρχει βοηθητική μεταβλητή Z_1^* για την ενδογενή ερμηνευτική μεταβλητή X_1. Ο πίνακας Z είναι

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & Z_{11} & Z_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{T1} & Z_{T2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_{11}^* & X_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{T1}^* & X_{T2} \end{pmatrix}$$

- Αν υπάρχει παραπάνω από μία βοηθητική μεταβλητή για κάποιες ενδογενείς ερμηνευτικές μεταβλητές, τότε ορίζεται ο πίνακας Z με αριθμό στηλών $M > K + 1$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & Z_{11} & \dots & Z_{1,M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & Z_{T1} & \dots & Z_{T,M-1} \end{pmatrix}$$

π.χ. Υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + u_t$$

όπου X_1 είναι ενδογενής και X_2 είναι (αυστηρώς ή ασθενώς) εξωγενής. Έστω ότι υπάρχουν βοηθητικές μεταβλητές Z_1^*, Z_2^* για την ενδογενή ερμηνευτική μεταβλητή X_1. Ο πίνακας Z είναι

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{T1} & Z_{T2} & Z_{T3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_{11}^* & Z_{12}^* & X_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{T1}^* & Z_{T2}^* & X_{T2} \end{pmatrix}$$

Αν $M > K + 1$:

- Ο εκτιμητής γενικευμένων βοηθητικών μεταβλητών GIVE (generalized instrumental variables estimator) του β είναι

$$\widehat{\beta}^{GIVE} = (X'P_Z X)^{-1} X' P_Z Y$$

όπου $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$, με πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων

$$V(\widehat{\beta}^{GIVE}) = \sigma^2 (X'P_Z X)^{-1}$$

Ο GIVE εκτιμητής του σ^2 είναι

$$s^2_{GIVE} = \frac{1}{T-K-1}(Y - X\widehat{\beta}^{GIVE})'(Y - X\widehat{\beta}^{GIVE})$$

Ο GIVE εκτιμητής του $V(\widehat{\beta}^{GIVE})$ είναι

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}^{GIVE}) = s^2_{GIVE}(X'P_Z X)^{-1}$$

- Αν οι A.1, A.2, A.4 και A.5/A.5' ισχύουν και οι βοηθητικές μεταβλητές είναι κατάλληλες, τότε οι GIVE εκτιμητές έχουν τις στατιστικές ιδιότητες (ΣΙα).

Αν $M = K + 1$:

- Ο εκτιμητής βοηθητικών μεταβλητών IV (instrumental variables) του β είναι

$$\widehat{\beta}^{IV} = (Z'X)^{-1}Z'Y$$

με πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων

$$V(\widehat{\beta}^{IV}) = \sigma^2(Z'X)^{-1}Z'Z(X'Z)^{-1}$$

Ο IV εκτιμητής του σ^2 είναι

$$s^2_{IV} = \frac{1}{T-K-1}(Y - X\widehat{\beta}^{IV})'(Y - X\widehat{\beta}^{IV})$$

Ο IV εκτιμητής του $V(\widehat{\beta}^{IV})$ είναι

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}^{IV}) = s^2_{IV}(Z'X)^{-1}Z'Z(X'Z)^{-1}$$

- Αν οι Α.1, Α.2, Α.4 και Α.5/Α.5' ισχύουν και οι βοηθητικές μεταβλητές είναι κατάλληλες, τότε οι IV εκτιμητές έχουν τις στατιστικές ιδιότητες (ΣΙα).

Σημείωση:

- Η μέθοδος IV/GIVE βασίζεται στη μέθοδο OLS σε δύο στάδια 2SLS (two stages least squares).

  Στάδιο 1:

  Για κάθε ερμηνευτική μεταβλητή X_j, εκτιμάται με OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$X_{tj} = \gamma_0 + \gamma_1 Z_{t1} + ... + \gamma_{M-1} Z_{t,M-1} + \varepsilon_t, t = 1, ..., T$$

  και βρίσκονται οι υπολογισμένες τιμές $\widehat{X}_{tj}$, $j = 1, ..., K$, $t = 1, ..., T$.

  Στάδιο 2:

  Εκτιμάται με OLS το υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 \widehat{X}_{t1} + ... + \beta_K \widehat{X}_{tK} + u_t, t = 1, ..., T \qquad (*)$$

  Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (∗) η υπόθεση A.3' ισχύει.

  Η μέθοδος OLS στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (∗) είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο IV/GIVE.

- Η διακύμανση του IV ή GIVE εκτιμητή $\widehat{\beta}^{IV}$ ή $\widehat{\beta}^{GIVE}$ αυξάνεται όταν η συσχέτιση μεταξύ των ενδογενών ερμηνευτικών μεταβλητών και των αντίστοιχων βοηθητικών μεταβλητών μειώνεται.

- Αν η συσχέτιση μεταξύ της ενδογενής ερμηνευτικής μεταβλητής και της αντίστοιχης βοηθητικής μεταβλητής είναι χαμηλή, τότε υπάρχει ασθενής βοηθητική μεταβλητή.

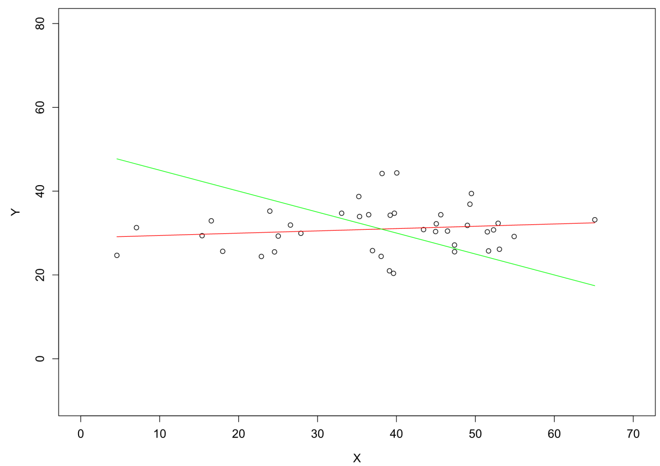
π.χ. Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $X_t = -20 + 2Y_t - 2Z_t^* + \varepsilon_t$

$$Y_t = 50 - 0,5X_t + u_t,\ t = 1, ..., 40$$

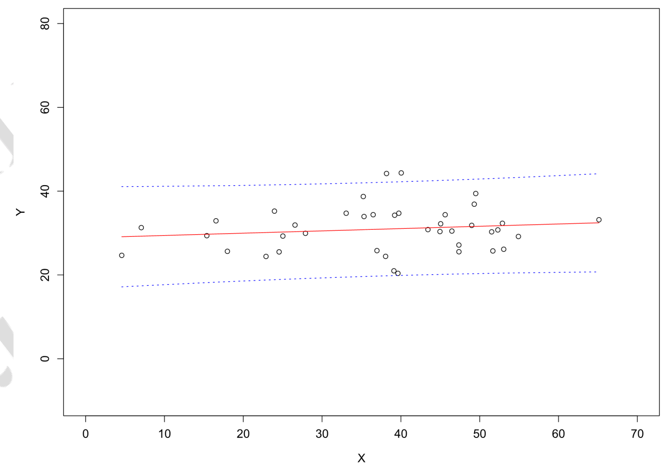
Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή

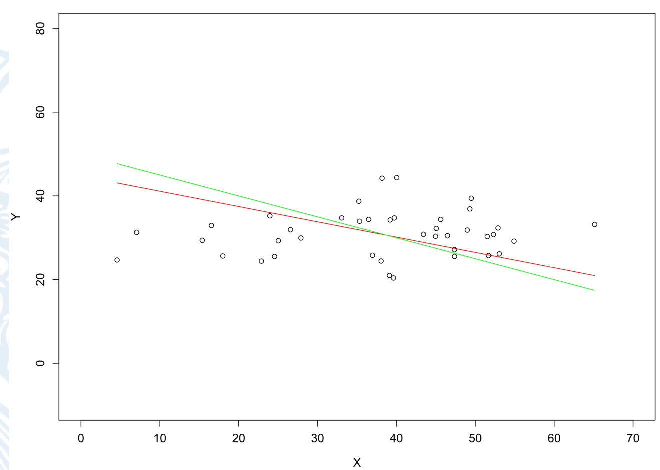


Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y

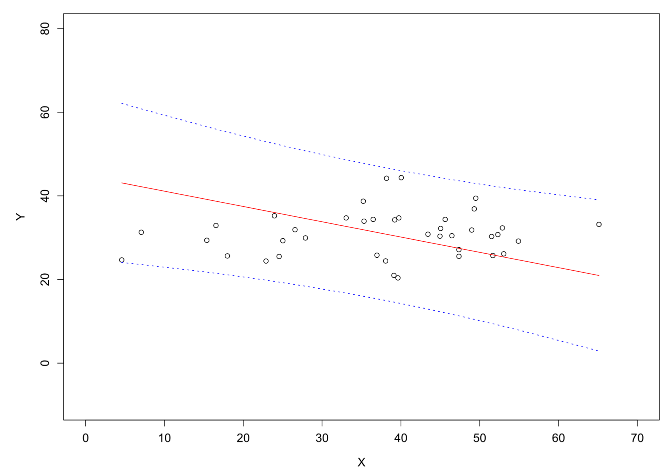


Μέθοδος εκτίμησης: IV

Δεδομένα, Πραγματική & Εκτιμώμενη Γραμμή



Δεδομένα, Πρόβλεψη & 95% Δ.Π. για Y



Στατιστικός έλεγχος: Hausman για ενδογένεια

Έστω ότι ελέγχεται αν όλες οι ερμηνευτικές μεταβλητές είναι εξωγενείς.

Υποθέσεις: $H_0 : Corr(X_{tj}, u_t) = 0,\ j = 1, ..., K,\ t = 1, ..., T$ έναντι H_1 : τουλάχιστον ένα $Corr(X_{tj}, u_t) \neq 0,\ j = 1, ..., K,\ t = 1, ..., T$

Στατιστική ελέγχου: $H = \left(\widehat{\beta}_{\text{nc}}^{GIVE} - \widehat{\beta}_{\text{nc}}\right)' \left(\widehat{V}\left(\widehat{\beta}_{\text{nc}}^{GIVE}\right) - \widehat{V}\left(\widehat{\beta}_{\text{nc}}\right)\right)^{-1} \left(\widehat{\beta}_{\text{nc}}^{GIVE} - \widehat{\beta}_{\text{nc}}\right)$

$$\text{ή } H = \left(\widehat{\beta}_{\text{nc}}^{IV} - \widehat{\beta}_{\text{nc}}\right)' \left(\widehat{V}\left(\widehat{\beta}_{\text{nc}}^{IV}\right) - \widehat{V}\left(\widehat{\beta}_{\text{nc}}\right)\right)^{-1} \left(\widehat{\beta}_{\text{nc}}^{IV} - \widehat{\beta}_{\text{nc}}\right)$$

όπου $\widehat{\beta}_{\text{nc}}$, $\widehat{\beta}_{\text{nc}}^{GIVE}$ και $\widehat{\beta}_{\text{nc}}^{IV}$ είναι οι εκτιμητές $\widehat{\beta}$, $\widehat{\beta}^{GIVE}$ και $\widehat{\beta}^{IV}$ εξαιρουμένου του σταθερού όρου.

Κρίσιμη περιοχή: $H > \chi^2_{K,\alpha}$

Στατιστικός έλεγχος: Sargan για καταλληλότητα βοηθητικών μεταβλητών

Χρησιμοποιείται όταν: $M > K + 1$

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = ... = \alpha_{M-1} = 0$ έναντι H_1 : τουλάχιστον ένα $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, ..., M-1$

Στατιστική ελέγχου: $S = TR^2$

όπου R^2 είναι ο συντελεστής προσδιορισμού του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης

$$\widehat{u}_t^{GIVE} = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t1} + ... + \alpha_{M-1} Z_{t,M-1} + \eta_t, t = 1, ..., T$$

με $\widehat{u}^{GIVE} = Y - X\widehat{\beta}^{GIVE}$.

Κρίσιμη περιοχή: $S > \chi^2_{M-K-1,\alpha}$

Σφάλμα εξειδίκευσης

Υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$Y = X\beta + u \quad ή \quad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t, t = 1, ..., T$$

Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης γίνεται η υπόθεση A.1:

<u>Σωστή Εξειδίκευση</u>

A.1 $Y = X\beta + u$ είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u) = 0$ ή
$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t$, $t = 1, ..., T$, είναι το σωστό υπόδειγμα και $E(u_t) = 0$, $t = 1, ..., T$.

Σημείωση: Η υπόθεση ότι $E(u) = 0$ ή $E(u_t) = 0$, $t = 1, ..., T$ θεωρεί ότι τα σφάλματα έχουν σταθερή μέση τιμή που είναι μηδενική.

- Αν το επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης είναι σωστό, τότε το υπόδειγμα παλινδρόμησης είναι σωστά εξειδικευμένο (correctly specified) και η υπόθεση Α.1 ισχύει.

- Αν το επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν είναι σωστό, τότε το υπόδειγμα παλινδρόμησης δεν είναι σωστά εξειδικευμένο (misspecified), υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης (specification error) και η υπόθεση Α.1 δεν ισχύει.

- Λόγοι ύπαρξης σφάλματος εξειδίκευσης:

  (i) Παράλειψη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών, π.χ.

  Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + u_t$

  Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + w_t$

  (ii) Χρήση λάθων περιορισμών, π.χ.

  Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + u_t$

  Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 (X_{t1} + X_{t2}) + w_t$

(iii) Χρήση λάθων συναρτησιακών σχέσεων, π.χ.

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t^2 + u_t$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t$

(iv) Περίληψη μη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών, π.χ.

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + u_t$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + w_t$

(v) Μη χρήση σωστών περιορισμών, π.χ.

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 1$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 (X_{t1} + X_{t2}) + u_t$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης με $K = 2$: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + w_t$

- Στις περιπτώσεις (i)-(iii), το σφάλμα εξειδίκευσης δημιουργεί ενδογένεια. Οι στατιστικές ιδιότητες των OLS εκτιμητών (ΣΙπα) ή (ΣΙα) παύουν να ισχύουν.

- Στην περίπτωση (i), αν οι παραλειπόμενες ερμηνευτικές μεταβλητές είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστες με τις υπόλοιπες ερμηνευτικές μεταβλητές, οι OLS εκτιμητές των κλίσεων των υπόλοιπων ερμηνευτικών μεταβλητών είναι αμερόληπτοι και συνεπείς. O OLS εκτιμητής του β_0 παραμένει μεροληπτικός και ασυνεπής (εκτός αν το παραλειπόμενο μέρος του υποδείγματος παλινδρόμησης έχει μηδενική μέση τιμή). Οι OLS εκτιμητές του σ^2 και του $V(\widehat{\beta})$ παραμένουν μεροληπτικοί και ασυνεπείς.

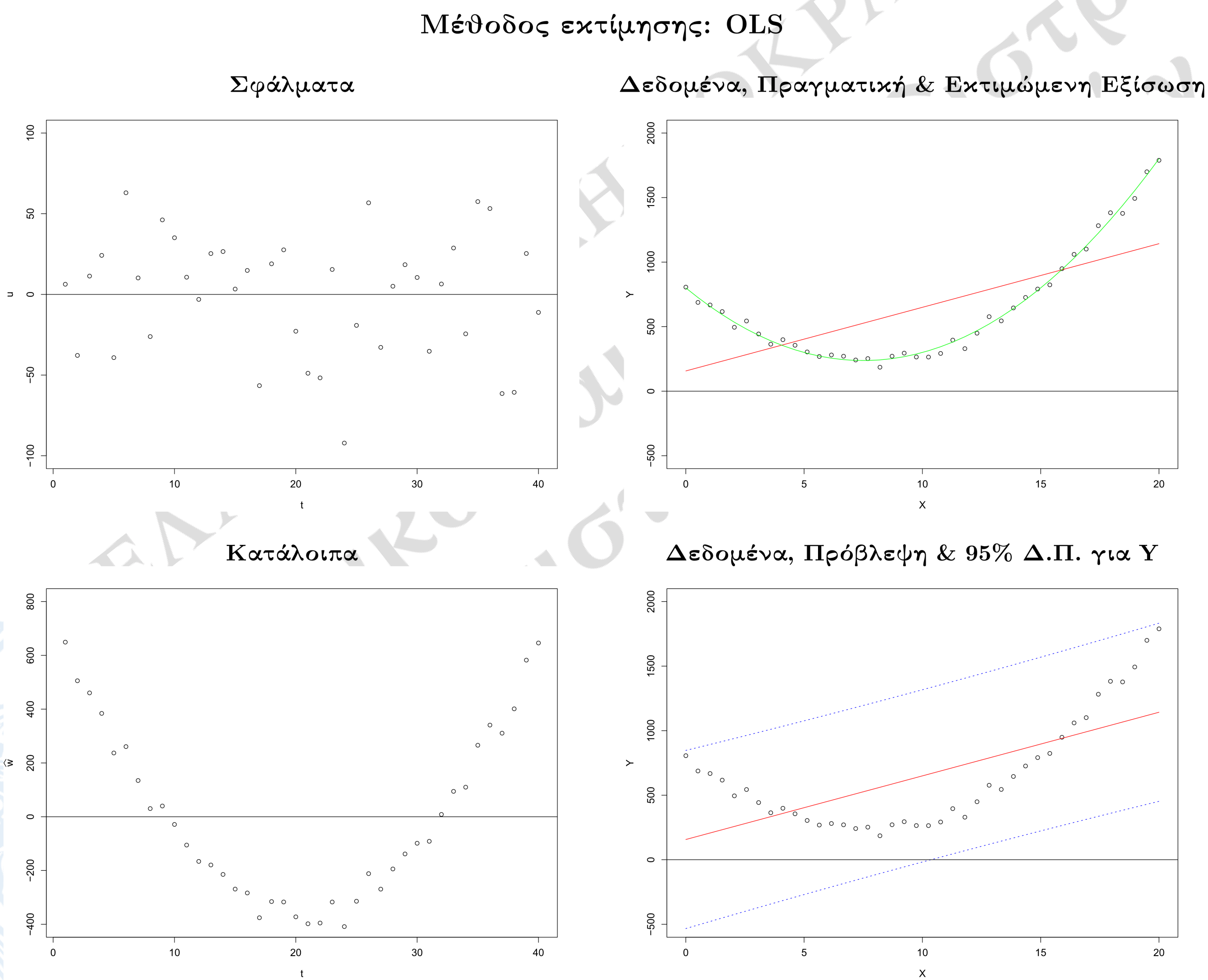
- Στις περιπτώσεις (iv)-(v), το σφάλμα εξειδίκευσης δεν δημιουργεί ενδογένεια. Οι στατιστικές ιδιότητες των OLS εκτιμητών δεν επηρεάζονται (εφόσον υπόλοιπες βασικές υποθέσεις ισχύουν). Οι OLS εκτιμητές στο επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης θα έχουν υψηλότερες διακυμάνσεις από αυτούς στο πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης. Σε μικρά δείγματα μπορεί να δημιουργηθεί το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας.

- Εντοπισμός σφάλματος εξειδίκευσης:
  - Γραφήματα δεδομένων Y με κάθε $X_1, ..., X_K$ και καταλοίπων $\widehat{u}$
  - Στατιστικοί έλεγχοι

π.χ. (i) Παράλειψη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 800 - 150X_t + 10X_t^2 + u_t$, $t = 1, \ldots, 40$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t$

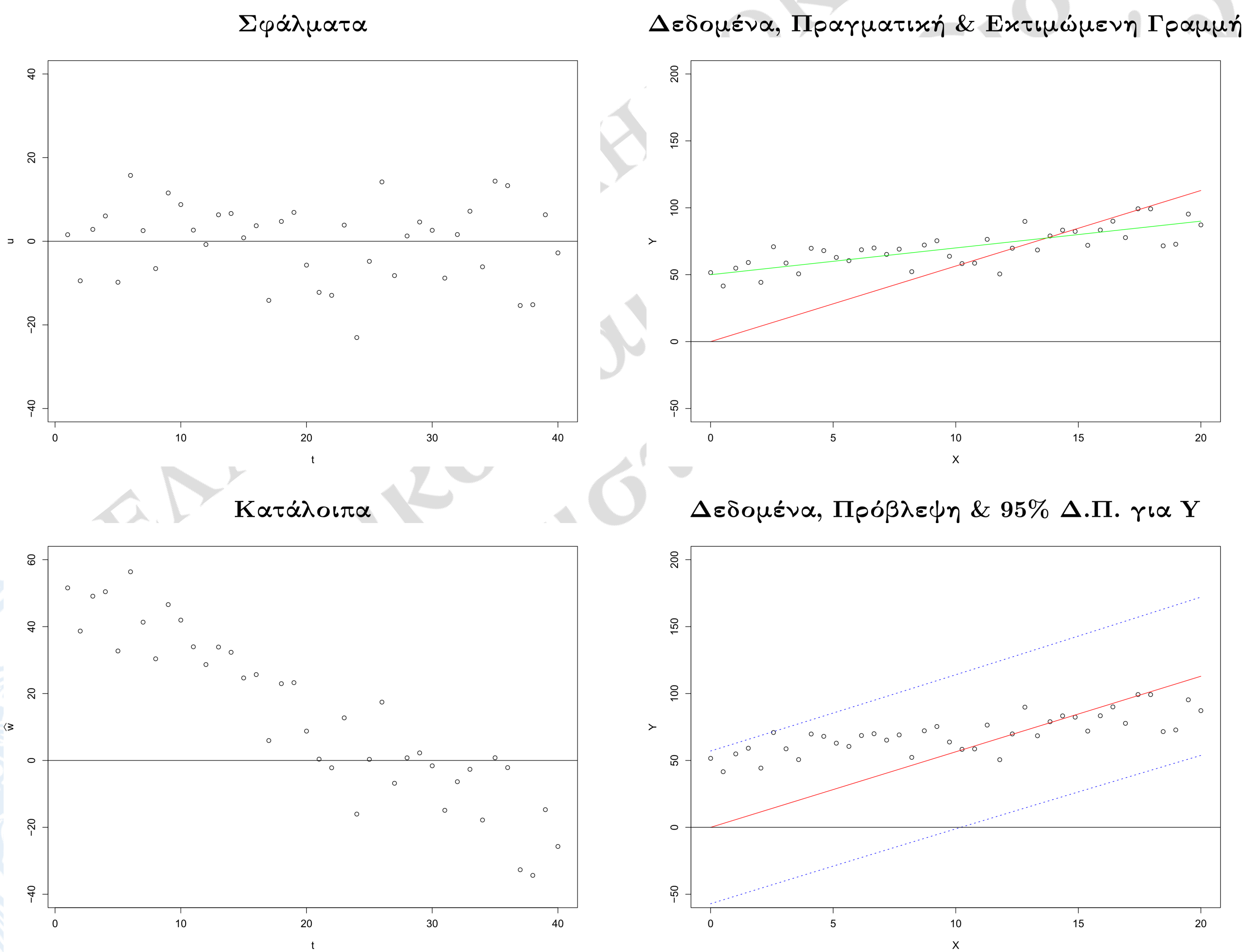


π.χ. (ii) Χρήση λάθων περιορισμών

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, ..., 40$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_1 X_t + w_t$ με $\beta_0 = 0$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

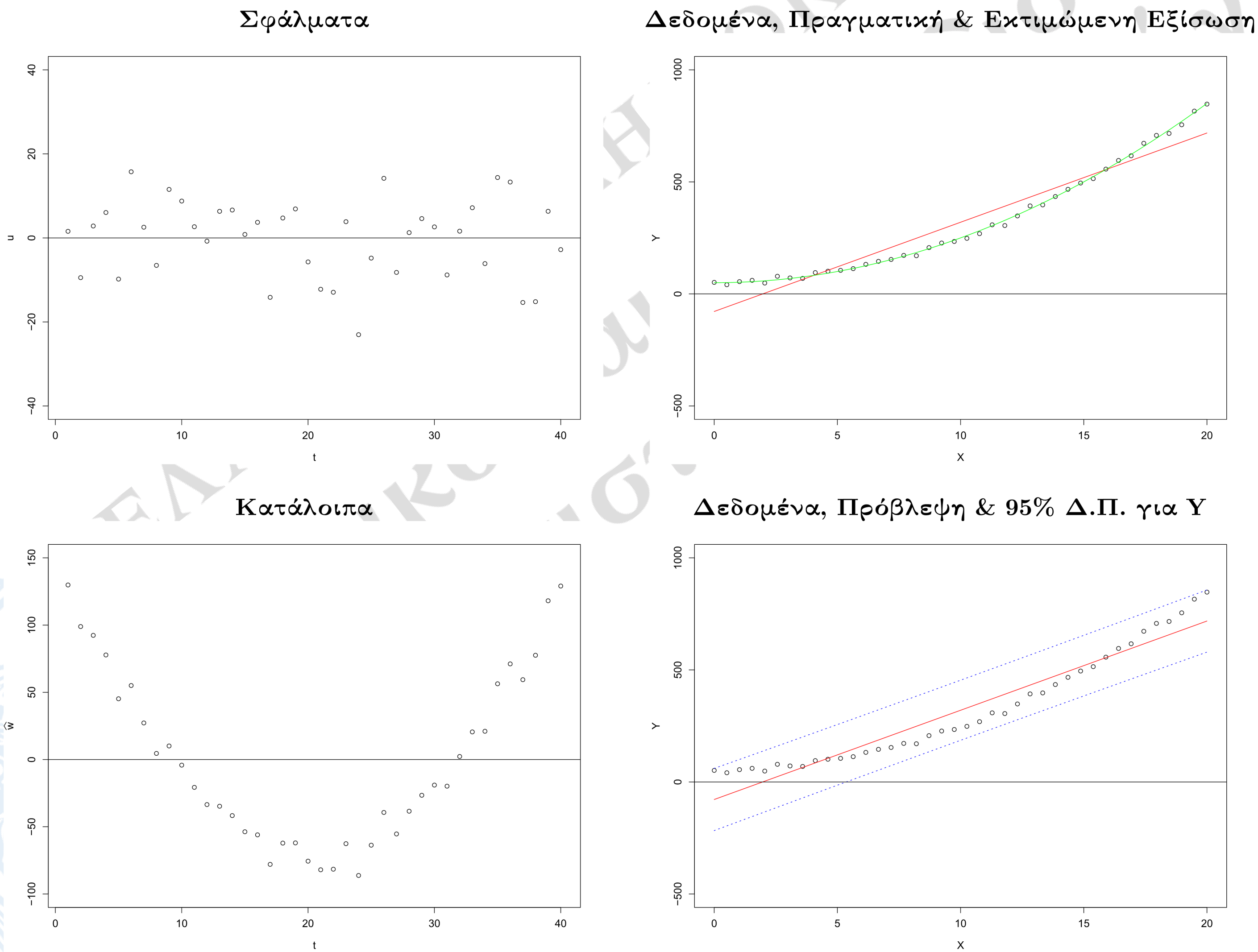


π.χ. (iii) Χρήση λάθων συναρτησιακών σχέσεων

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t^2 + u_t$, $t = 1, ..., 40$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS

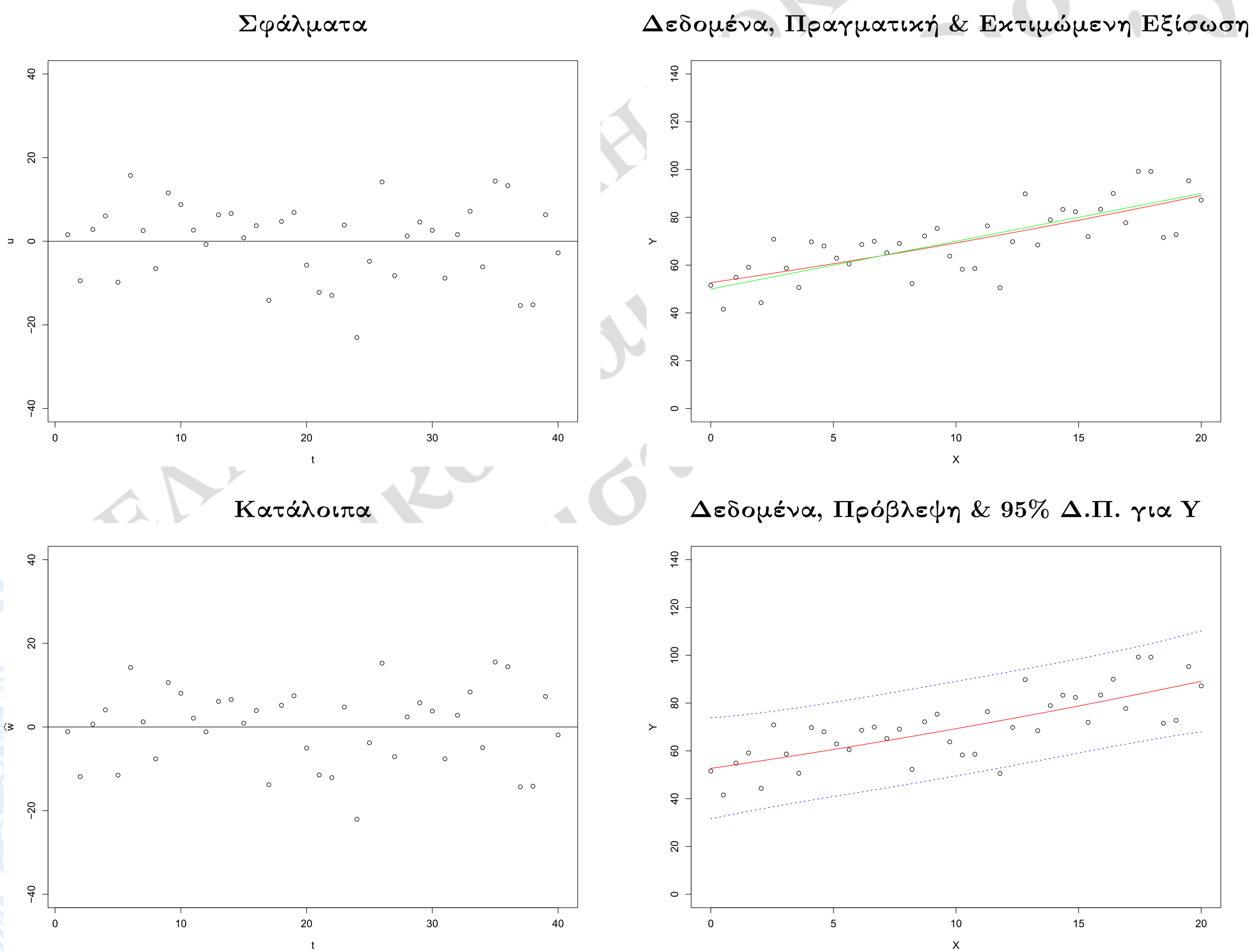


π.χ. (iv) Περίληψη μη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 50 + 2X_t + u_t$, $t = 1, ..., 40$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_t^2 + w_t$

Μέθοδος εκτίμησης: OLS



π.χ. (v) Μη χρήση σωστών περιορισμών

Πραγματικό υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = 2X_t + u_t$, $t = 1, ..., 40$ με $\beta_0 = 0$

Επιλεγόμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + w_t$