ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Θεωρία: 08

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υποδείγματα παλινδρόμησης με χρονικές υστερήσεις

- Έστω ότι οι μεταβλητές Y_t και X_t είναι χρονολογικές σειρές. Ο δείκτης t συμβολίζει τον χρόνο και υπάρχουν δεδομένα για τις χρονικές περιόδους $t = 1, ..., T$.

  π.χ. Η εξαρτημένη μεταβλητή Y είναι:

  (i) Y = ετήσιος πληθωρισμός για τα έτη 1990-2019

  Y_1 = πληθωρισμός 1990, Y_2 = πληθωρισμός 1991, ..., Y_T = πληθωρισμός 2019

  (ii) Y = μηνιαίος πληθωρισμός για τους μήνες Ιανουάριος 1990 - Δεκέμβριος 2019

  Y_1 = πληθωρισμός Ιανουαρίου 1990, Y_2 = πληθωρισμός Φεβρουάριου 1990, ..., Y_T = πληθωρισμός Δεκεμβρίου 2019

- Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

  η επίδραση της ερμηνευτικής μεταβλητής στην εξαρτημένη μεταβλητή είναι στιγμιαία και εκδηλώνεται την ίδια χρονική περίοδο.

- Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t-s} + u_t$$

η επίδραση της ερμηνευτικής μεταβλητής στην εξαρτημένη μεταβλητή δεν είναι στιγμιαία και εκδηλώνεται με χρονική υστέρηση s χρονικών περιόδων.

- Για μία χρονολογική σειρά W_t ο τελεστής υστέρησης L (lag operator) είναι

$$L^s W_t = W_{t-s}, \ s = 0, 1, 2, ...$$

  – Ισχύει ότι

$$LW_t = W_{t-1}, \ L^2 W_t = L(LW_t) = LW_{t-1} = W_{t-2}, \ ...$$

  – Για κάθε σταθερά c ισχύει ότι

$$L^s c = c, \ s = 0, 1, 2, ...$$

  – Για κάθε σταθερά c με $|c| \leq 1$ ισχύει ότι

$$(1 - cL)^{-1} = 1 + cL + c^2 L^2 + c^3 L^3 + ...$$

1. Υπόδειγμα κατανεμόμενων χρονικών υστερήσεων (distributed lag model)

$$Y_t = \alpha_0 + \pi_0 X_t + \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + ... + u_t \tag{1}$$

- Βραχυχρόνιος πολλαπλασιαστής (short run multiplier) της Y ως προς τη X:

$$\pi_0 = \frac{\partial E(Y_t)}{\partial X_t} = \frac{\Delta E(Y_t)}{\Delta X_t}$$

Μετράει τη μεταβολή στη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η ερμηνευτική μεταβλητή X μεταβληθεί κατά 1 μονάδα την ίδια χρονική περίοδο.

- s-Ενδιάμεσος πολλαπλασιαστής (interim multiplier) της Y ως προς τη X:

$$\pi_s = \frac{\partial E(Y_t)}{\partial X_{t-s}} = \frac{\Delta E(Y_t)}{\Delta X_{t-s}}, \ \ s = 1, 2, ...$$

Μετράει τη μεταβολή στη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η ερμηνευτική μεταβλητή X μεταβληθεί κατά 1 μονάδα πριν από s χρονικές περιόδους.

- Μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής (long run multiplier) της Y ως προς τη X:

$$\pi = \frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \widetilde{X}} = \frac{\Delta \widetilde{Y}}{\Delta \widetilde{X}} = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots = \sum_{s=0}^{\infty} \pi_s$$

  όπου $\widetilde{Y}$ και $\widetilde{X}$ είναι οι μακροχρόνιες τιμές των μεταβλητών Y και X, αντίστοιχα. Μετράει τη μεταβολή στη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η ερμηνευτική μεταβλητή X μεταβληθεί κατά 1 μονάδα σε όλες τις χρονικές περιόδους.

- Μέση υστέρηση (average lag) της Y ως προς τη X:

$$MY = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} s\pi_s}{\sum_{s=0}^{\infty} \pi_s}$$

  Μετράει τη μέση χρονική περίοδο που διαρκεί η μεταβολή στη μέση τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y όταν η ερμηνευτική μεταβλητή X μεταβληθεί κατά 1 μονάδα σε όλες τις χρονικές περιόδους.

Σημείωση: Το υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) δεν μπορεί να εκτιμηθεί λόγω του άπειρου αριθμού των συντελεστών π_s, $s = 0, 1, \ldots, \infty$.

2. Υπόδειγμα κατανεμόμενων πεπερασμένων χρονικών υστερήσεων q-τάξης

$$Y_t = \alpha_0 + \pi_0 X_t + \pi_1 X_{t-1} + ... + \pi_q X_{t-q} + u_t \tag{2}$$

- Βραχυχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi_0$$

- Ενδιάμεσοι πολλαπλασιαστές της Y ως προς τη X:

$$\pi_s,\ \ s = 1, 2, ..., q \quad \text{και} \quad \pi_s = 0,\ \ s = q+1, q+2, ...$$

- Μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + ... = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + ... + \pi_q = \sum_{s=0}^{q} \pi_s$$

3. Υπόδειγμα κατανεμόμενων χρονικών υστερήσεων με τον μετασχηματισμό του Koyck

$$Y_t = \alpha_0 + \pi_0 X_t + \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + ... + u_t \quad \text{με } \pi_s = \beta\lambda^s, 0 < \lambda < 1 \tag{3}$$

- Βραχυχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi_0 = \beta$$

- Ενδιάμεσοι πολλαπλασιαστές της Y ως προς τη X:

$$\pi_s = \beta\lambda^s, \; s = 1, 2, ...$$

- Μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + ... = \beta + \beta\lambda + \beta\lambda^2 + ... = \beta(1 + \lambda + \lambda^2 + ...) \stackrel{0<\lambda<1}{=} \frac{\beta}{1-\lambda}$$

Για να εκτιμηθεί το υπόδειγμα (3), το υπόδειγμα μετασχηματίζεται σε

$$Y_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* Y_{t-1} + \beta_0^* X_t + u_t^* \tag{3*}$$

όπου $\alpha_0^* = \alpha_0(1-\lambda)$, $\alpha_1^* = \lambda$, $\beta_0^* = \beta$ και $u_t^* = u_t - \lambda u_{t-1}$.

Ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
&Y_t = \alpha_0 + \pi_0 X_t + \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + ... + u_t \quad \text{με } \pi_s = \beta\lambda^s \Leftrightarrow \\
&Y_t = \alpha_0 + \beta X_t + \beta\lambda L X_t + \beta\lambda^2 L^2 X_t + ... + u_t \Leftrightarrow \\
&Y_t = \alpha_0 + \beta(1 + \lambda L + \lambda^2 L^2 + ...)X_t + u_t \overset{0<\lambda<1}{\Leftrightarrow} \\
&Y_t = \alpha_0 + \beta(1 - \lambda L)^{-1} X_t + u_t \Leftrightarrow \\
&(1 - \lambda L)Y_t = (1 - \lambda L)\alpha_0 + \beta X_t + (1 - \lambda L)u_t \Leftrightarrow \\
&Y_t - \lambda L Y_t = \alpha_0 - \lambda L \alpha_0 + \beta X_t + u_t - \lambda L u_t \Leftrightarrow \\
&Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha_0 - \lambda\alpha_0 + \beta X_t + u_t - \lambda u_{t-1} \Leftrightarrow \\
&Y_t = \alpha_0(1 - \lambda) + \lambda Y_{t-1} + \beta X_t + (u_t - \lambda u_{t-1}) \Leftrightarrow \\
&Y_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* Y_{t-1} + \beta_0^* X_t + u_t^*
\end{aligned}
$$

όπου $\alpha_0^* = \alpha_0(1 - \lambda)$, $\alpha_1^* = \lambda$, $\beta_0^* = \beta$ και $u_t^* = u_t - \lambda u_{t-1}$.

4. Υπόδειγμα αναπροσαρμοζόμενων προσδοκιών (adaptive expectations model)

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t \quad \text{και} \quad X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma(X_t - X_{t-1}^*) \tag{4}$$

όπου $0 < \gamma \leq 1$ είναι ο βαθμός προσαρμογής.

Για να εκτιμηθεί το υπόδειγμα (4), το υπόδειγμα μετασχηματίζεται σε

$$Y_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* Y_{t-1} + \beta_0^* X_t + u_t^* \tag{4*}$$

όπου $\alpha_0^* = \alpha\gamma$, $\alpha_1^* = 1 - \gamma$, $\beta_0^* = \beta\gamma$ και $u_t^* = u_t - (1-\gamma)u_{t-1}$.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma(X_t - X_{t-1}^*) \Leftrightarrow \\
&X_t^* - (1-\gamma)X_{t-1}^* = \gamma X_t \Leftrightarrow \\
&X_t^* - (1-\gamma)LX_t^* = \gamma X_t \Leftrightarrow \\
&(1-(1-\gamma)L)X_t^* = \gamma X_t \Leftrightarrow \\
&X_t^* = (1-(1-\gamma)L)^{-1}\gamma X_t
\end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
&Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t \Rightarrow \\
&Y_t = \alpha + \beta(1-(1-\gamma)L)^{-1}\gamma X_t + u_t \Rightarrow \\
&(1-(1-\gamma)L)Y_t = (1-(1-\gamma)L)\alpha + \beta\gamma X_t + (1-(1-\gamma)L)u_t \Rightarrow \\
&Y_t - (1-\gamma)LY_t = \alpha - (1-\gamma)L\alpha + \beta\gamma X_t + u_t - (1-\gamma)Lu_t \Rightarrow \\
&Y_t - (1-\gamma)Y_{t-1} = \alpha - (1-\gamma)\alpha + \beta\gamma X_t + u_t - (1-\gamma)u_{t-1} \Rightarrow \\
&Y_t = \alpha\gamma + (1-\gamma)Y_{t-1} + \beta\gamma X_t + (u_t - (1-\gamma)u_{t-1}) \Rightarrow \\
&Y_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* Y_{t-1} + \beta_0^* X_t + u_t^*
\end{aligned}
$$

όπου $\alpha_0^* = \alpha\gamma$, $\alpha_1^* = 1-\gamma$, $\beta_0^* = \beta\gamma$ και $u_t^* = u_t - (1-\gamma)u_{t-1}$.

Για να υπολογισθούν οι πολλαπλασιαστές της Y ως προς τη X, το υπόδειγμα (4*) μετασχηματίζεται στο υπόδειγμα (1).

5. Υπόδειγμα μερικής προσαρμογής (partial adjustment model)

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t + u_t \quad \text{και} \quad Y_t - Y_{t-1} = \gamma(Y_t^* - Y_{t-1}) + \varepsilon_t \tag{5}$$

όπου $0 < \gamma \leq 1$ είναι ο βαθμός προσαρμογής.

Για να εκτιμηθεί το υπόδειγμα (5), το υπόδειγμα μετασχηματίζεται σε

$$Y_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* Y_{t-1} + \beta_0^* X_t + u_t^* \tag{5*}$$

όπου $\alpha_0^* = \alpha\gamma$, $\alpha_1^* = 1 - \gamma$, $\beta_0^* = \beta\gamma$ και $u_t^* = \gamma u_t + \varepsilon_t$.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1} = \gamma(Y_t^* - Y_{t-1}) + \varepsilon_t &\Leftrightarrow \\ \gamma Y_t^* = Y_t - (1-\gamma)Y_{t-1} - \varepsilon_t &\Leftrightarrow \\ Y_t^* = \frac{1}{\gamma}Y_t - \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1} - \frac{1}{\gamma}\varepsilon_t & \end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
&Y_t^* = \alpha + \beta X_t + u_t \Rightarrow \\
&\frac{1}{\gamma}Y_t - \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1} - \frac{1}{\gamma}\varepsilon_t = \alpha + \beta X_t + u_t \Rightarrow \\
&\frac{1}{\gamma}Y_t = \alpha + \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1} + \beta X_t + u_t + \frac{1}{\gamma}\varepsilon_t \Rightarrow \\
&Y_t = \alpha\gamma + (1-\gamma)Y_{t-1} + \beta\gamma X_t + (\gamma u_t + \varepsilon_t) \Rightarrow \\
&Y_t = \alpha_0^* + \alpha_1^* Y_{t-1} + \beta_0^* X_t + u_t^*
\end{aligned}
$$

όπου $\alpha_0^* = \alpha\gamma$, $\alpha_1^* = 1-\gamma$, $\beta_0^* = \beta\gamma$ και $u_t^* = \gamma u_t + \varepsilon_t$.

Για να υπολογισθούν οι πολλαπλασιαστές της Y ως προς τη X, το υπόδειγμα (5*) μετασχηματίζεται στο υπόδειγμα (1).

6. Αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κατανεμόμενων χρονικών υστερήσεων p, q-τάξεων ADL(p, q) (autoregressive distributed lag model of p, q-orders)

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + ... + \alpha_p Y_{t-p} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + ... + \beta_q X_{t-q} + u_t \tag{6}$$

Τα υποδείγματα (2), (3*), (4*) και (5*) είναι ειδικές περιπτώσεις του υποδείγματος (6).

Όταν $p, q = 1$, το υπόδειγμα ADL(1,1) είναι

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t \tag{6*}$$

Για να υπολογισθούν οι πολλαπλασιαστές της Y ως προς τη X, το υπόδειγμα (6)/(6*) μετασχηματίζεται στο υπόδειγμα (1).

Σημείωση:

- Η εκτίμηση των υποδειγμάτων (2)-(6) γίνεται όταν οι χρονολογικές σειρές Y και X είναι στάσιμες και εργοδικές. Ανάλογα με το υπόδειγμα και τις υποθέσεις, χρησιμοποιούνται οι μέθοδοι εκτίμησης OLS, GLS/FGLS, IV/GIVE.

- Στα υποδείγματα (2) και (6) οι τάξεις μπορούν να επιλεγούν με κριτήρια επιλογής υποδείγματος, π.χ. $\overline{R}^2$.

- Στα υποδείγματα (2) και (6) μπορεί να υπάρχει το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας αν οι τάξεις των υποδειγμάτων είναι μεγάλες.

- Τα υποδείγματα (1)-(6) μπορούν να επεκταθούν για πάνω από μία ερμηνευτική μεταβλητή X.

- Τα υποδείγματα (4)-(5) μπορούν να επεκταθούν για διάφορες υστερήσεις της εξαρτημένης και ερμηνευτικής μεταβλητής.

- Για τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών, στις περιπτώσεις 4.-6. τα υποδείγματα μετασχηματίζονται στο υπόδειγμα (1).

π.χ. Υπολογισμός πολλαπλασιαστών στο ADL(1,1) υπόδειγμα (6*)

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t \Leftrightarrow$$

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 L Y_t + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t \Leftrightarrow$$

$$(1 - \alpha_1 L) Y_t = \alpha_0 + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t \Leftrightarrow$$

$$Y_t = (1 - \alpha_1 L)^{-1} \alpha_0 + (1 - \alpha_1 L)^{-1} \beta_0 X_t + (1 - \alpha_1 L)^{-1} \beta_1 X_{t-1} + \\ + (1 - \alpha_1 L)^{-1} u_t \Leftrightarrow$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \beta_0 X_t + \beta_0 \alpha_1 X_{t-1} + \beta_0 \alpha_1^2 X_{t-2} + ... + \beta_1 X_{t-1} + \beta_1 \alpha_1 X_{t-2} + ... + \\ + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_1^2 u_{t-2} + ... \Leftrightarrow$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \beta_0 X_t + (\beta_0 \alpha_1 + \beta_1) X_{t-1} + (\beta_0 \alpha_1^2 + \beta_1 \alpha_1) X_{t-2} + ... + \\ + u_t + \alpha_1 u_{t-1} + \alpha_1^2 u_{t-2} + ...$$

όπου για $|\alpha_1| < 1$

$$(1 - \alpha_1 L)^{-1} \alpha_0 = (1 + \alpha_1 L + \alpha_1^2 L^2 + ...) \alpha_0 = \alpha_0 + \alpha_1 L \alpha_0 + \alpha_1^2 L^2 \alpha_0 + ... \\ = \alpha_0 + \alpha_1 \alpha_0 + \alpha_1^2 \alpha_0 + ... = (1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + ...) \alpha_0 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

$$(1-\alpha_1 L)^{-1}X_t = (1+\alpha_1 L+\alpha_1^2 L^2+...)X_t = X_t+\alpha_1 LX_t+\alpha_1^2 L^2 X_t+...$$
$$= X_t+\alpha_1 X_{t-1}+\alpha_1^2 X_{t-2}+...$$

$$(1-\alpha_1 L)^{-1}X_{t-1} = (1+\alpha_1 L+\alpha_1^2 L^2+...)X_{t-1} = X_{t-1}+\alpha_1 LX_{t-1}+\alpha_1^2 L^2 X_{t-1}+...$$
$$= X_{t-1}+\alpha_1 X_{t-2}+\alpha_1^2 X_{t-3}+...$$

Παρόμοια,

$$(1-\alpha_1 L)^{-1}u_t = u_t+\alpha_1 u_{t-1}+\alpha_1^2 u_{t-2}+...$$

- Βραχυχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi_0 = \frac{\partial E(Y_t)}{\partial X_t} = \beta_0$$

- Ενδιάμεσοι πολλαπλασιαστές της Y ως προς τη X:

$$\pi_1 = \frac{\partial E(Y_t)}{\partial X_{t-1}} = \beta_0\alpha_1+\beta_1, \quad \pi_2 = \frac{\partial E(Y_t)}{\partial X_{t-2}} = \beta_0\alpha_1^2+\beta_1\alpha_1, \quad ...$$

- Μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi = \pi_0+\pi_1+\pi_2+... = \beta_0+\beta_0\alpha_1+\beta_1+\beta_0\alpha_1^2+\beta_1\alpha_1+...$$

Εναλλακτικά:

Μακροχρόνια, οι μεταβλητές είναι σε ισορροπία $\Rightarrow Y_t = Y_{t-1} = \widetilde{Y}$, $X_t = X_{t-1} = \widetilde{X}$ και $u_t = \widetilde{u} = E(u_t) = 0$, όπου $\widetilde{Y}$, $\widetilde{X}$ και $\widetilde{u}$ είναι οι μακροχρόνιες τιμές των μεταβλητών Y, X και u, αντίστοιχα.

Μακροχρόνια, το υπόδειγμα (6*) είναι

$$\widetilde{Y} = \alpha_0 + \alpha_1 \widetilde{Y} + \beta_0 \widetilde{X} + \beta_1 \widetilde{X} + \widetilde{u} \Leftrightarrow$$
$$(1 - \alpha_1)\widetilde{Y} = \alpha_0 + (\beta_0 + \beta_1)\widetilde{X} + 0 \Leftrightarrow$$
$$\widetilde{Y} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \alpha_1}\widetilde{X}$$

Μακροχρόνιος πολλαπλασιαστής της Y ως προς τη X:

$$\pi = \frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial \widetilde{X}} = \frac{\beta_0 + \beta_1}{1 - \alpha_1}$$