ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Θεωρία: 09

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Συστήματα εξισώσεων: Βασικές έννοιες

- Το υπόδειγμα παλινδρόμησης περιέχει μία εξίσωση

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_K X_{tK} + u_t, t = 1, ..., T$$

και η αιτιακή σχέση (causal relationship) είναι προς μία κατεύθυνση: οι ερμηνευτικές μεταβλητές προσδιορίζουν την εξαρτημένη μεταβλητή και η εξαρτημένη μεταβλητή δεν προσδιορίζει τις ερμηνευτικές μεταβλητές.

$$X_1, ..., X_K \to Y \quad Y \nrightarrow X_1, ..., X_K$$

- Συχνά, οικονομικά φαινόμενα περιγράφονται με υποδείγματα που είναι συστήματα εξισώσεων (system of equations) με παραπάνω από μία εξίσωση και η αιτιακή σχέση είναι προς τις δύο κατευθύνσεις: η εξαρτημένη μεταβλητή και οι ερμηνευτικές μεταβλητές αλληλοπροσδιορίζονται.

$$Y \leftrightarrow X_1, ..., X_K$$

π.χ. Συστήματα εξισώσεων

(i) Προσφορά και ζήτηση

$$Q_t^S = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_t$$
$$Q_t^D = \gamma_0 + \gamma_1 P_t + \varepsilon_t$$
$$Q_t^S = Q_t^D = Q_t$$

όπου Q^S = προσφερόμενη ποσότητα, Q^D = ζητούμενη ποσότητα και P = τιμή.

(ii) Κλειστή οικονομία χωρίς κράτος

$$C_t = \delta_0 + \delta_1 W_t + \delta_2 C_{t-1} + u_t$$
$$W_t = C_t + I_t$$

όπου W = ΑΕΠ, C = κατανάλωση και I = επένδυση.

- Το σύστημα εξισώσεων περιγράφει τη διάρθρωση (structure) του φαινομένου με τις διαρθρωτικές εξισώσεις (structural equations) και είναι σε διαρθρωτική μορφή (structural form).

- Οι διαρθρωτικές εξισώσεις του συστήματος εξισώσεων χωρίζονται σε
  - Εξισώσεις συμπεριφοράς (behavioral equations)
  - Ταυτότητες (identities)
- Οι μεταβλητές του συστήματος εξισώσεων χωρίζονται σε
  - Ενδογενείς (endogenous), όταν οι τιμές τους καθορίζονται εντός του συστήματος εξισώσεων.
  - Εξωγενείς (exogenous), όταν οι τιμές τους καθορίζονται εκτός του συστήματος εξισώσεων.
- Προκαθορισμένες (predetermined) μεταβλητές του συστήματος εξισώσεων είναι οι εξωγενείς μεταβλητές και οι υστερήσεις των ενδογενών μεταβλητών.
- Το σύστημα εξισώσεων είναι στατικό (static) όταν βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας και είναι δυναμικό (dynamic) όταν περιγράφει τη δυναμική εξέλιξη.
- Το σύστημα εξισώσεων είναι στοχαστικό (stochastic) όταν τουλάχιστον μία εξίσωση συμπεριφοράς περιέχει σφάλμα.

- Το σύστημα εξισώσεων είναι πλήρες (complete) όταν ο αριθμός των εξισώσεων είναι ίσος με τον αριθμό των ενδογενών μεταβλητών.

- Όταν το σύστημα εξισώσεων λύνεται ως προς τις προκαθορισμένες μεταβλητές είναι σε ανηγμένη μορφή (reduced form).

- Η ανηγμένη μορφή του συστήματος εξισώσεων εκτιμάται με τη μέθοδο OLS εξίσωση προς εξίσωση.

- Όταν το σύστημα εξισώσεων λύνεται ως προς τις εξωγενείς μεταβλητές είναι σε τελική μορφή (final form).

- Η τελική μορφή του συστήματος εξισώσεων χρειάζεται για τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών.

- Στην εκτίμηση των συστημάτων εξισώσεων σε διαρθρωτική μορφή εμφανίζονται δύο επιπλέον προβλήματα:
  - Σφάλμα αλληλεξάρτησης (simultaneity problem)
  - Ταυτοποίηση (identification)

π.χ. Κλειστή οικονομία χωρίς κράτος

W = ΑΕΠ, C = κατανάλωση και I = επένδυση

Διαρθρωτική μορφή συστήματος εξισώσεων (1) και (2):

$$C_t = \delta_0 + \delta_1 W_t + \delta_2 C_{t-1} + u_t \tag{1}$$

$$W_t = C_t + I_t \tag{2}$$

- Οι εξισώσεις (1) και (2) είναι οι διαρθρωτικές εξισώσεις.
- Η εξίσωση (1) είναι εξίσωση συμπεριφοράς.
- Η εξίσωση (2) είναι ταυτότητα.
- Οι μεταβλητές C_t και W_t είναι ενδογενείς. Οι μεταβλητές $\mathbb{1}_t$ και I_t είναι εξωγενείς.

$$u_t \uparrow\downarrow \overset{(1)}{\Rightarrow} C_t \uparrow\downarrow \overset{(2)}{\Rightarrow} W_t \uparrow\downarrow \overset{(1)}{\Rightarrow} C_t \uparrow\downarrow \overset{(2)}{\Rightarrow} W_t \uparrow\downarrow \overset{(1)}{\Rightarrow} C_t \uparrow\downarrow \quad \ldots$$

  Οι μεταβλητές C_t και W_t καθορίζονται εντός του συστήματος εξισώσεων. Η μεταβλητή I_t δεν καθορίζεται εντός του συστήματος εξισώσεων.

- Οι μεταβλητές $\mathbb{1}_t$, I_t και C_{t-1} είναι προκαθορισμένες μεταβλητές.
- Το σύστημα εξισώσεων (1) και (2) είναι δυναμικό, στοχαστικό και πλήρες.

Ανηγμένη μορφή συστήματος εξισώσεων (1) και (2):

Ανηγμένη μορφή της διαρθρωτικής εξίσωσης (1)

$$
\begin{aligned}
(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} C_t &= \delta_0 + \delta_1(C_t + I_t) + \delta_2 C_{t-1} + u_t \Leftrightarrow \\
(1-\delta_1)C_t &= \delta_0 + \delta_1 I_t + \delta_2 C_{t-1} + u_t \Leftrightarrow \\
C_t &= \frac{\delta_0}{1-\delta_1} + \frac{\delta_1}{1-\delta_1} I_t + \frac{\delta_2}{1-\delta_1} C_{t-1} + \frac{1}{1-\delta_1} u_t \\
C_t &= \alpha_{11} + \alpha_{12} I_t + \alpha_{13} C_{t-1} + v_{t1} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

όπου $\alpha_{11} = \frac{\delta_0}{1-\delta_1}$, $\alpha_{12} = \frac{\delta_1}{1-\delta_1}$, $\alpha_{13} = \frac{\delta_2}{1-\delta_1}$ και $v_{t1} = \frac{1}{1-\delta_1} u_t$.

Ανηγμένη μορφή της διαρθρωτικής εξίσωσης (2)

$$
\begin{aligned}
(2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} W_t &= \delta_0 + \delta_1 W_t + \delta_2 C_{t-1} + u_t + I_t \Leftrightarrow \\
(1-\delta_1)W_t &= \delta_0 + I_t + \delta_2 C_{t-1} + u_t \Leftrightarrow \\
W_t &= \frac{\delta_0}{1-\delta_1} + \frac{1}{1-\delta_1} I_t + \frac{\delta_2}{1-\delta_1} C_{t-1} + \frac{1}{1-\delta_1} u_t \Leftrightarrow \\
W_t &= \alpha_{21} + \alpha_{22} I_t + \alpha_{23} C_{t-1} + v_{t2} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

όπου $\alpha_{21} = \frac{\delta_0}{1-\delta_1}$, $\alpha_{22} = \frac{1}{1-\delta_1}$, $\alpha_{23} = \frac{\delta_2}{1-\delta_1}$ και $v_{t2} = \frac{1}{1-\delta_1} u_t$.

Τελική μορφή συστήματος εξισώσεων (1) και (2):

Τελική μορφή της διαρθρωτικής εξίσωσης (1)

$$(3) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow C_t = \frac{\alpha_{11}}{1-\alpha_{13}} + \alpha_{12}I_t + \alpha_{12}\alpha_{13}I_{t-1} + \alpha_{12}\alpha_{13}^2 I_{t-2} + ... +$$

$$+ v_{t1} + \alpha_{13}v_{t-1,1} + \alpha_{13}^2 v_{t-2,1} + ...$$

$$C_t = \pi_{11} + \pi_{12}I_t + \pi_{13}I_{t-1} + \pi_{14}I_{t-2} + ... + w_{t1}$$

όπου $\pi_{11} = \frac{\alpha_{11}}{1-\alpha_{13}}$, $\pi_{12} = \alpha_{12}$, $\pi_{13} = \alpha_{12}\alpha_{13}$, $\pi_{14} = \alpha_{12}\alpha_{13}^2$, ... και $w_{t1} = v_{t1} + \alpha_{13}v_{t-1,1} + \alpha_{13}^2 v_{t-2,1} + ...$

Τελική μορφή της διαρθρωτικής εξίσωσης (2)

$$(4) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} W_t = \alpha_{21} + \alpha_{22}I_t + \alpha_{23}(W_{t-1} - I_{t-1}) + v_{t2} \Leftrightarrow$$

$$W_t = \alpha_{21} + \alpha_{22}I_t - \alpha_{23}I_{t-1} + \alpha_{23}W_{t-1} + v_{t2} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow$$

$$W_t = \frac{\alpha_{21}}{1-\alpha_{23}} + \alpha_{22}I_t + (\alpha_{22}\alpha_{23} - \alpha_{23})I_{t-1} + (\alpha_{22}\alpha_{23}^2 - \alpha_{23}^2)I_{t-2} + ... +$$

$$+ v_{t2} + \alpha_{23}v_{t-1,2} + \alpha_{23}^2 v_{t-2,2} + ...$$

$$W_t = \pi_{21} + \pi_{22}I_t + \pi_{23}I_{t-1} + \pi_{24}I_{t-2} + ... + w_{t2}$$

όπου $\pi_{21} = \frac{\alpha_{21}}{1-\alpha_{23}}$, $\pi_{22} = \alpha_{22}$, $\pi_{23} = \alpha_{22}\alpha_{23} - \alpha_{23}$, $\pi_{24} = \alpha_{22}\alpha_{23}^2 - \alpha_{23}^2$, ... και $w_{t2} = v_{t2} + \alpha_{23}v_{t-1,2} + \alpha_{23}^2 v_{t-2,2} + ...$

Συστήματα εξισώσεων: Συμβολισμοί με πίνακες

Διαρθρωτική μορφή πλήρους συστήματος G γραμμικών εξισώσεων ή υπόδειγμα γραμμικών αλληλοεξαρτώμενων εξισώσεων (linear simultaneous equations model)

$$\begin{aligned} \beta_{11} Y_{t1} + \ldots + \beta_{1G} Y_{tG} + \gamma_{11} X_{t1} + \ldots + \gamma_{1K} X_{tK} &= u_{t1} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \ \vdots \quad \vdots \qquad , t = 1, \ldots, T \\ \beta_{G1} Y_{t1} + \ldots + \beta_{GG} Y_{tG} + \gamma_{G1} X_{t1} + \ldots + \gamma_{GK} X_{tK} &= u_{tG} \end{aligned}$$

Συμβολισμός με πίνακες:

$$BY + \Gamma X = u \qquad (*)$$

όπου

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & \ldots & Y_{T1} \\ \vdots & & \vdots \\ Y_{1G} & \ldots & Y_{TG} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_{11} & \ldots & X_{T1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{1K} & \ldots & X_{TK} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1G} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{G1} & \ldots & \beta_{GG} \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{G1} & \ldots & \gamma_{GK} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_{11} & \ldots & u_{T1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1G} & \ldots & u_{TG} \end{pmatrix}$$

- $Y_1, ..., Y_G$ είναι οι ενδογενείς μεταβλητές και $X_1, ..., X_K$ είναι οι προκαθορισμένες μεταβλητές.

- Αν υπάρχει σταθερός όρος, θέτουμε $X_{t1} = 1$, $t = 1, ..., T$.

- Αν η g εξίσωση είναι ταυτότητα, θέτουμε $u_{tg} = 0$, $t = 1, ..., T$.

- Κάποιοι από τους συντελεστές $\beta_{gg'}, \gamma_{gk}$, $g, g' = 1, ..., G$, $k = 1, ..., K$ μπορεί να είναι γνωστοί.

- Σε κάθε g εξίσωση, ο συντελεστής β_{gg} μπορεί να γίνει ίσος με μονάδα. Τότε η ενδογενής μεταβλητή Y_g γίνεται η εξαρτημένη μεταβλητή όταν η g εξίσωση γραφεί ως υπόδειγμα παλινδρόμησης.

  π.χ. 1^{η} εξίσωση:

$$\beta'_{11}Y_{t1} + \beta'_{12}Y_{t2} + ... + \beta'_{1G}Y_{tG} + \gamma'_{11}X_{t1} + ... + \gamma'_{1K}X_{tK} = u'_{t1} \Leftrightarrow$$

$$Y_{t1} + \frac{\beta'_{12}}{\beta'_{11}}Y_{t2} + ... + \frac{\beta'_{1G}}{\beta'_{11}}Y_{tG} + \frac{\gamma'_{11}}{\beta'_{11}}X_{t1} + ... + \frac{\gamma'_{1K}}{\beta'_{11}}X_{tK} = \frac{1}{\beta'_{11}}u'_{t1} \Leftrightarrow$$

$$Y_{t1} + \beta_{12}Y_{t2} + ... + \beta_{1G}Y_{tG} + \gamma_{11}X_{t1} + ... + \gamma_{1K}X_{tK} = u_{t1} \Leftrightarrow$$

$$Y_{t1} = -\beta_{12}Y_{t2} - ... - \beta_{1G}Y_{t,G} - \gamma_{11}X_{t1} - ... - \gamma_{1K}X_{tK} + u_{t1}$$

Ανηγμένη μορφή πλήρους συστήματος G γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{array}{rcl} Y_{t1} & = & \alpha_{11}X_{t1} + ... + \alpha_{1K}X_{tK} + v_{t1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{tG} & = & \alpha_{G1}X_{t1} + ... + \alpha_{GK}X_{tK} + v_{tG} \end{array}, \quad t = 1, ..., T$$

Συμβολισμός με πίνακες:

$$Y = AX + v \qquad (**)$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{G1} & \ldots & \alpha_{GK} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{T1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1G} & \ldots & v_{TG} \end{pmatrix}$$

π.χ. Κλειστή οικονομία χωρίς κράτος

Ενδογενείς μεταβλητές: C_t, W_t

Προκαθορισμένες μεταβλητές: $\mathbb{1}_t$, I_t, C_{t-1}

Διαρθρωτική μορφή συστήματος εξισώσεων (1) και (2):

$$
\begin{array}{lllcrrrrrcl}
(1) & C_t = \delta_0 + \delta_1 W_t + \delta_2 C_{t-1} + u_t & \Leftrightarrow & & C_t & -\delta_1 W_t & -\delta_0 & & -\delta_2 C_{t-1} & = & u_t \\
(2) & W_t = C_t + I_t & \Leftrightarrow & & -C_t & +W_t & & -I_t & & = & 0
\end{array}
$$

Συμβολισμός με πίνακες:

$$BY + \Gamma X = u$$

όπου

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_T \\ W_1 & \dots & W_T \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ I_1 & \dots & I_T \\ C_0 & \dots & C_{T-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\delta_1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -\delta_0 & 0 & -\delta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_T \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ανηγμένη μορφή συστήματος εξισώσεων (1) και (2):

$$C_t = \alpha_{11} + \alpha_{12} I_t + \alpha_{13} C_{t-1} + v_{t1} \tag{3}$$

$$W_t = \alpha_{21} + \alpha_{22} I_t + \alpha_{23} C_{t-1} + v_{t2} \tag{4}$$

Συμβολισμός με πίνακες:

$$Y = AX + v$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{T1} \\ v_{12} & \dots & v_{T2} \end{pmatrix}$$

Συστήματα εξισώσεων: Εκτίμηση

- Σε κάθε ανηγμένη εξίσωση (∗∗) γίνονται οι βασικές υποθέσεις Α.1, Α.2, Α.3/Α.3', Α.4 και Α.5/Α.5'. Για τα σφάλματα των διαρθρωτικών εξισώσεων (∗) γίνεται η υπόθεση: ισχύει ότι $Cov(u_{tg}, u_{tg'}) = \sigma_{gg'}$ και $Cov(u_{tg}, u_{sg'}) = 0$, $t, s = 1, ..., T$, $t \neq s$, $g, g' = 1, ..., G$.

- Ανηγμένη μορφή συστήματος εξισώσεων (∗∗):
  - Κάθε εξίσωση εκτιμάται με τη μέθοδο OLS.

- Διαρθρωτική μορφή συστήματος εξισώσεων (∗) :
  - Αν η εξίσωση συμπεριφοράς περιέχει μία ενδογενή μεταβλητή, τότε εκτιμάται με τη μέθοδο OLS.
  - Αν η εξίσωση συμπεριφοράς περιέχει πάνω από δύο ενδογενείς μεταβλητές, τότε η μέθοδος OLS είναι ασυνεπής (λόγω σφάλματος αλληλεξάρτησης) και πρέπει να εξετασθεί αν μπορεί να εκτιμηθεί με συνέπεια (ταυτοποίηση).
  - Οι ταυτότητες δεν χρειάζονται εκτίμηση.

Συστήματα εξισώσεων: Σφάλμα αλληλεξάρτησης

- Έστω ότι υπάρχει μία εξίσωση συμπεριφοράς στη διαρθρωτική μορφή συστήματος εξισώσεων που περιέχει τουλάχιστον δύο ενδογενείς μεταβλητές. Τότε, υπάρχει τουλάχιστον μία ενδογενή μεταβλητή που είναι ερμηνευτική μεταβλητή στο υπόδειγμα παλινδρόμησης.
π.χ. 1^{η} εξίσωση:

$$Y_{t1} + \beta_{12}Y_{t2} + ... + \beta_{1G}Y_{tG} + \gamma_{11}X_{t1} + ... + \gamma_{1K}X_{tK} = u_{t1} \Leftrightarrow$$
$$Y_{t1} = -\beta_{12}Y_{t2} - ... - \beta_{1G}Y_{t,G} - \gamma_{11}X_{t1} - ... - \gamma_{1K}X_{tK} + u_{t1}$$

- Γενικά, οι ενδογενείς μεταβλητές αλληλοεξαρτώνται. Λόγω της αλληλεξάρτησης, το σφάλμα μίας ενδογενής μεταβλητής συσχετίζεται ταυτόχρονα με τις υπόλοιπες ενδογενείς μεταβλητές και άρα δημιουργείται ενδογένεια στο υπόδειγμα παλινδρόμησης.
π.χ. 1^{η} και 2^{η} εξίσωση:

$$Y_{t1} = -\beta_{12}Y_{t2} - \beta_{13}Y_{t3} - ... - \beta_{G,G}Y_{t,G} - \gamma_{11}X_{t1} - ... - \gamma_{1K}X_{tK} + u_{t1}$$
$$Y_{t2} = -\beta_{21}Y_{t1} - \beta_{23}Y_{t3} - ... - \beta_{2G}Y_{tG} - \gamma_{21}X_{t1} - ... - \gamma_{2K}X_{tK} + u_{t2}$$

Ισχύει ότι: $u_{t1} \uparrow\downarrow \overset{1^{\eta}}{\Rightarrow} Y_{t1} \uparrow\downarrow \overset{2^{\eta}}{\Rightarrow} Y_{t2} \uparrow\downarrow \overset{1^{\eta}}{\Rightarrow} Y_{t1} \uparrow\downarrow \overset{2^{\eta}}{\Rightarrow} Y_{t2} \uparrow\downarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow Y_{t1}, Y_{t2}$ αλληλοεξαρτώνται και $Corr(Y_{t2}, u_{t1}) \neq 0 \Rightarrow$ υπόθεση Α.3/Α.3' δεν ισχυεί στην 1^{η} εξίσωση.

- Αν η αλληλεξάρτηση αγνοηθεί, τότε υπάρχει σφάλμα αλληλεξάρτησης. Οι OLS εκτιμητές είναι μεροληπτικοί και ασυνεπείς λόγω της ενδογένειας.

- Για να εκτιμηθεί με συνέπεια η εξίσωση συμπεριφοράς που έχει σφάλμα αλληλεξάρτησης, θα πρέπει να ταυτοποιείται.

Συστήματα εξισώσεων: Ταυτοποίηση

- Για τη διαρθρωτική και την ανηγμένη μορφή του συστήματος εξισώσεων ισχύει ότι

$$(*) \quad BY + \Gamma X = u \Leftrightarrow BY = -\Gamma X + u \Leftrightarrow Y = -B^{-1}\Gamma X + B^{-1}u \Leftrightarrow$$

$$(**) \quad Y = AX + v \quad \text{με } A = -B^{-1}\Gamma \text{ και } v = B^{-1}u$$

- Η ανηγμένη μορφή του συστήματος εξισώσεων εκτιμάται με τη μέθοδο OLS εξίσωση προς εξίσωση και υπολογίζεται ο OLS εκτιμητής $\widehat{A}$ του A. Τότε,

$$A = -B^{-1}\Gamma \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B}^{-1}\widehat{\Gamma} \qquad (***)$$

που είναι ένα σύστημα $G \cdot K$ εξισώσεων με $(G \cdot G - G) + G \cdot K$ αγνώστους: $\widehat{\beta}_{gg'}, \widehat{\gamma}_{gk}$, $g, g' = 1, ..., G$, $g \neq g'$, $k = 1, ..., K$.

  - Αν το σύστημα εξισώσεων (∗∗∗) δεν μπορεί να λυθεί ως προς τους $\widehat{\beta}_{gg'}, \widehat{\gamma}_{gk}$, τότε δεν μπορεί να εκτιμηθεί με συνέπεια η διαρθρωτική μορφή του συστήματος (∗) και το σύστημα διαρθρωτικών εξισώσεων (∗) δεν ταυτοποιείται (not identified).
  - Αν το σύστημα εξισώσεων (∗∗∗) μπορεί να λυθεί ως προς τους τους $\widehat{\beta}_{gg'}, \widehat{\gamma}_{gk}$, τότε μπορεί να εκτιμηθεί με συνέπεια η διαρθρωτική μορφή του συστήματος (∗)

και το σύστημα διαρθρωτικών εξισώσεων (∗) ταυτοποιείται (identified).

- Για την ταυτοποίηση (identification) του συστήματος διαρθρωτικών εξισώσεων πρέπει να ικανοποιούνται δύο συνθήκες σε κάθε διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς που έχει σφάλμα αλληλεξάρτησης.

1. Συνθήκη τάξης (order condition): $K^{**} \geq G^{*} - 1$

K^{**} = αριθμός των προκαθορισμένων μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στη διαρθρωτική εξίσωση

G^{*} = αριθμός των ενδογενών μεταβλητών που περιλαμβάνονται στη διαρθρωτική εξίσωση

2. Συνθήκη βαθμού (rank condition): $r(\Delta) = G - 1$

Δ = πίνακας των συντελεστών στις υπόλοιπες διαρθρωτικές εξισώσεις όλων των μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στη διαρθρωτική εξίσωση

G = αριθμός των εξισώσεων του συστήματος

- Οι συνθήκες ταυτοποίησης εξετάζεται αν ισχύουν σε κάθε διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς που έχει σφάλμα αλληλεξάρτησης.
  - Αν η συνθήκη τάξης και η συνθήκη βαθμού ισχύουν, τότε η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς ταυτοποιείται:
    - Αν η συνθήκη τάξης ισχύει με = και η συνθήκη βαθμού ισχύει, τότε η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς ταυτοποιείται ακριβώς (exactly identified).
    - Αν η συνθήκη τάξης ισχύει με > και η συνθήκη βαθμού ισχύει, τότε η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς υπερταυτοποιείται (overidentified).
  - Αν η συνθήκη τάξης ή η συνθήκη βαθμού δεν ισχύει, τότε η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς δεν ταυτοποιείται (not identified).
- Αν όλες οι διαρθρωτικές εξισώσεις συμπεριφοράς που έχουν σφάλμα αλληλεξάρτησης ταυτοποιούνται, τότε το σύστημα διαρθρωτικών εξισώσεων ταυτοποιείται. Αν τουλάχιστον μία διαρθρωτική εξισώση συμπεριφοράς που έχει σφάλμα αλληλεξάρτησης δεν ταυτοποιείται, τότε το σύστημα διαρθρωτικών εξισώσεων δεν ταυτοποιείται.

Συστήματα εξισώσεων: Εκτίμηση

- Μέθοδοι εκτίμησης μίας διαρθρωτικής εξίσωσης συμπεριφοράς (single equation methods):

  1. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων OLS
  2. Έμμεση μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων ILS (indirect least squares)
  3. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια 2SLS (two-stages least squares)
  4. Μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας με περιορισμένες πληροφορίες LIML (limited-information maximum likelihood)

- Μέθοδοι ταυτόχρονης εκτίμησης όλων των διαρθρωτικών εξισώσεων (systems methods):

  1. Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε τρία στάδια 3SLS (three-stages least squares)
  2. Μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας με όλες τις πληροφορίες FIML (full-information maximum likelihood)

- Αν η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς δεν έχει σφάλμα αλληλεξάρτησης, εκτιμάται με OLS.

- Αν η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς έχει σφάλμα αλληλεξάρτησης και ταυτοποιείται ακριβώς, εκτιμάται με ILS.

- Αν η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς έχει σφάλμα αλληλεξάρτησης και υπερταυτοποιείται, εκτιμάται με 2SLS.

- Αν το σύστημα διαρθρωτικών εξισώσεων ταυτοποιείται, εκτιμάται με 3SLS.

- Σε κάθε περίπτωση, οι μέθοδοι OLS, ILS, 2SLS και 3SLS δίνουν συνεπείς εκτιμητές των συντελεστών των διαρθρωτικών εξισώσεων.

- Αν υπάρχει ταυτόχρονη συσχέτιση ανάμεσα στα σφάλματα των διαρθρωτικών εξισώσεων, $Cov(u_{tg}, u_{tg'}) = \sigma_{gg'} \neq 0$ για κάποια $g, g' = 1, ..., G$, τότε μόνο η μέθοδος 3SLS δίνει ασυμπτωτικά αποτελεσματικούς εκτιμητές των συντελεστών.

Έμμεση μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων ILS

- Για την εκτίμηση διαρθρωτικής εξίσωσης συμπεριφοράς που ταυτοποιείται ακριβώς.
- Έμμεση μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων ILS:
  - Οι συντελεστές κάθε ανηγμένης εξίσωσης (∗∗) εκτιμούνται με τη μέθοδο OLS.
  - Από τη σχέση (∗∗∗), υπολογίζονται οι εκτιμητές των συντελεστών των διαρθρωτικών εξισώσεων.
- Η μέθοδος ILS είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο IV στη διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς με βοηθητικές μεταβλητές τις προκαθορισμένες μεταβλητές που δεν περιλαμβάνονται στην εξίσωση.

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια 2SLS

- Για την εκτίμηση διαρθρωτικής εξίσωσης συμπεριφοράς που υπερταυτοποιείται.

- Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια 2SLS:

  Στάδιο 1:

  Οι συντελεστές κάθε ανηγμένης εξίσωσης (∗∗) εκτιμούνται με OLS και βρίσκονται οι υπολογισμένες τιμές των ενδογενών μεταβλητών.

  Στάδιο 2:

  Σε κάθε υπερταυτοποιημένη διαρθρωτική εξίσωση, κάθε ενδογενή μεταβλητή (που είναι ερμηνευτική μεταβλητή) αντικαθίσταται από την υπολογισμένη τιμή της από το πρώτο στάδιο και εκτιμάται με τη μέθοδο OLS.

- Η μέθοδος 2SLS είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο GIVE στη διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς με βοηθητικές μεταβλητές τις προκαθορισμένες μεταβλητές που δεν περιλαμβάνονται στην εξίσωση.

- Η μέθοδος ILS είναι ειδική περίπτωση της μεθόδου 2SLS.

Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε τρία στάδια 3SLS

- Για την ταυτόχρονη εκτίμηση διαρθρωτικών εξισώσεων που ταυτοποιούνται.

- Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων σε τρία στάδια 3SLS:

  Στάδιο 1-2:

  Ακολουθούνται τα δύο στάδια της μεθόδου 2SLS.

  Στάδιο 3:

  Το σύστημα διαρθρωτικών εξισώσεων γράφεται ως σύστημα φαινομενικά μη συνδεόμενων παλινδρομήσεων SURE (seemingly unrelated regression equations). Χρησιμοποιούνται τα κατάλοιπα από το δεύτερο στάδιο και εφαρμόζεται η μέθοδος GLS.

- Αν τα σφάλματα μεταξύ των διαφορετικών διαρθρωτικών εξισώσεων είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστα για όλες τις παρατηρήσεις, $Corr(u_{tg}, u_{tg'}) = 0$ για κάθε $g \neq g'$, $t = 1, ..., T$, η μέθοδος 2SLS είναι ισοδύναμη με τη μέθοδο 3SLS.

π.χ. Κλειστή οικονομία χωρίς κράτος

Ενδογενείς μεταβλητές: C_t, W_t

Προκαθορισμένες μεταβλητές: $\mathbb{1}_t$, I_t, C_{t-1}

Διαρθρωτική μορφή συστήματος εξισώσεων (1) και (2):

$$
\begin{array}{lllllllll}
(1) & C_t = \delta_0 + \delta_1 W_t + \delta_2 C_{t-1} + u_t & \Leftrightarrow & C_t & -\delta_1 W_t & -\delta_0 & & -\delta_2 C_{t-1} & = u_t \\
(2) & W_t = C_t + I_t & \Leftrightarrow & -C_t & +W_t & & -I_t & & = 0
\end{array}
$$

- Η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (1) περιέχει 2 ενδογενείς μεταβλητές (C_t, W_t). Άρα στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) υπάρχει ερμηνευτική μεταβλητή που είναι ενδογενής (W_t) και συσχετίζεται ταυτόχρονα με το σφάλμα u_t ⇒ υπάρχει σφάλμα αλληλεξάρτησης που δημιουργεί ενδογένεια ⇒ μέθοδος OLS είναι ασυνεπής.

- Αφού υπάρχει σφάλμα αλληλεξάρτησης στη διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (1), εξετάζουμε την ταυτοποίηση του συστήματος εξισώσεων (1) και (2).

Ταυτοποίηση της διαρθρωτικής εξίσωσης συμπεριφοράς (1):

1. Συνθήκη τάξης:

$$\left.\begin{array}{ll} K^{**} = 1 & (I_t) \\ G^{*} = 2 & (C_t, W_t) \end{array}\right\} \Rightarrow K^{**} = G^{*} - 1 \Rightarrow \text{ συνθήκη ισχύει}$$

2. Συνθήκη βαθμού:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(\Delta) = 1 \\ G = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow r(\Delta) = G - 1 \Rightarrow \text{ συνθήκη ισχύει}$$

Αφού η συνθήκη τάξης ισχύει με $=$ και η συνθήκη βαθμού ισχύει, η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (1) ταυτοποιείται ακριβώς.

Η διαρθρωτική εξίσωση (2) δεν χρειάζεται ταυτοποίηση αφού είναι ταυτότητα.

Επομένως, το σύστημα διαρθρωτικών εξισώσεων (1) και (2) ταυτοποιείται.

- Βρέθηκε ότι η διαρθρωτική εξίσωση συμπεριφοράς (1) ταυτοποιείται ακριβώς. Η διαρθρωτική εξίσωση (2) είναι ταυτότητα. Τα σφάλματα των διαρθρωτικών εξισώσεων (1) και (2) είναι ταυτόχρονα ασυσχέτιστα, αφού η διαρθρωτική εξίσωση (2) δεν περιέχει σφάλμα.

Άρα, η μέθοδος ILS στη διαρθρωτική εξίσωση (1) θα δώσει συνεπείς και ασυμπτωτικά αποτελεσματικούς εκτιμητές των συντελεστών.

Η διαρθρωτική εξίσωση (2) δεν χρειάζεται εκτίμηση αφού είναι ταυτότητα.