

ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις: 01

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών



Θέμα 1, Σεπτέμβριος 2011

α) Διάνυσμα $Y = S$ εξαρτημένης μεταβλητής και πίνακας X ερμηνευτικών μεταβλητών $X_1 = I$:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Άρα

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 55 - 15 \cdot 15} \begin{pmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,3 \\ -0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

και

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 37 \end{pmatrix}$$

OLS εκτιμητής του β :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} 1,1 & -0,3 \\ -0,3 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

Εκτιμώμενη γραμμή παλινδρόμησης:

$$\hat{S}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 I_i = -0,1 + 0,7 I_i$$

β) OLS εκτιμητής του $V(\hat{\beta})$:

$$\widehat{V}(\hat{\beta}) = s^2(X'X)^{-1} = s^2 \begin{pmatrix} 1,1 & -0,3 \\ -0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = 0,37 \cdot \begin{pmatrix} 1,1 & -0,3 \\ -0,3 & 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,407 & -0,111 \\ -0,111 & 0,037 \end{pmatrix}$$

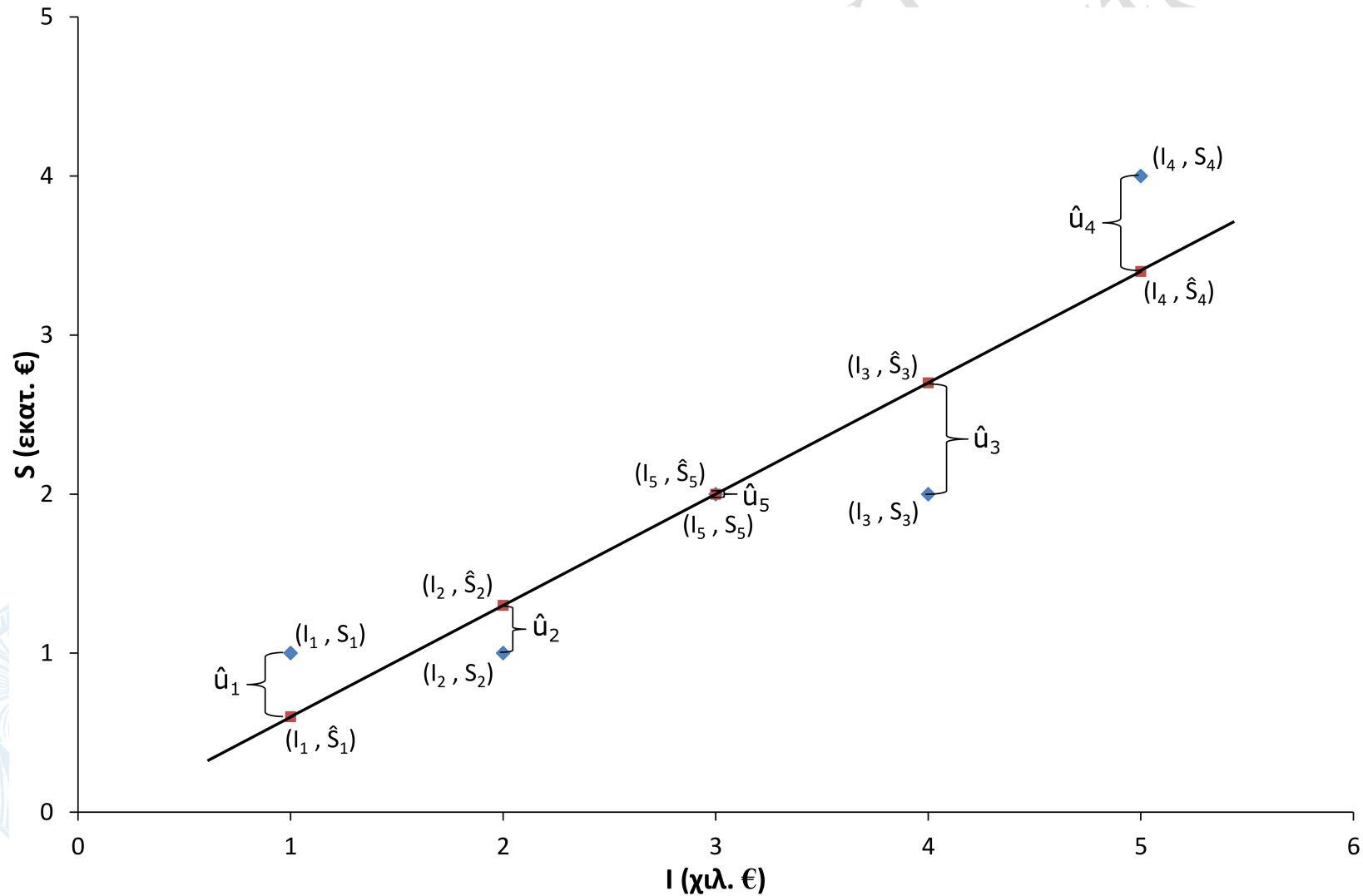
όπου

$$s^2 = \frac{1}{T - K - 1} SSE = \frac{1}{5 - 1 - 1} 1,1 = 0,37$$

$$SSE = \sum_{i=1}^T \hat{u}_i^2 = 0,4^2 + (-0,3)^2 + (-0,7)^2 + 0,6^2 + 0^2 = 1,1$$

$$\hat{u} = Y - \hat{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 2,7 \\ 3,4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ -0,3 \\ -0,7 \\ 0,6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{Y} = X\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 2,7 \\ 3,4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Έξτρα: Τα δεδομένα για την εξαρτημένη μεταβλητή ($Y = S$) και την ερμηνευτική μεταβλητή ($X_1 = I$), η εκτιμώμενη γραμμή παλινδρόμησης ($\hat{S} = -0,1 + 0,7I$), οι υπολογισμένες τιμές ($\hat{Y} = \hat{S}$) και τα κατάλοιπα (\hat{u}):



Ερμηνεία εκτιμώμενων συντελεστών παλινδρόμησης:

$\hat{\beta}_0 = -0,1$: Αν το εισόδημα είναι μηδενικό, η (μέση) αποταμίευση είναι $-0,1$ εκατ. € = -10 €.

$\hat{\beta}_1 = 0,7$: Αν το εισόδημα αυξηθεί κατά 1 χιλ. € = 1000 €, τότε η (μέση) αποταμίευση θα αυξηθεί κατά 0,7 εκατ. € = 70 €.

Εκτιμώμενες διακυμάνσεις των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ και εκτιμώμενη συνδιακύμανση των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$

$$\widehat{V}(\hat{\beta}_0) = 0,407, \quad \widehat{V}(\hat{\beta}_1) = 0,037 \quad \text{και} \quad \widehat{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = -0,111$$

Τυπικά σφάλματα των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$

$$s_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_0)} = \sqrt{0,407} = 0,638 \quad \text{και} \quad s_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{0,037} = 0,192$$

Συνολικό άθροισμα τετραγώνων SST:

$$SST = \sum_{i=1}^T (Y_i - \bar{Y})^2 = (1 - 2)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (4 - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 6$$

όπου

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Y_i = \frac{1}{5}(1 + 1 + 2 + 4 + 2) = 2$$

Άθροισμα τετραγώνων παλινδρόμησης SSR:

$$SSR = \sum_{i=1}^T (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 = (0,6 - 2)^2 + (1,3 - 2)^2 + (2,7 - 2)^2 + (3,4 - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 4,9$$

$$\text{ή } SST = SSR + SSE \Rightarrow SSR = SST - SSE = 6 - 1,1 = 4,9$$

Συντελεστής προσδιορισμού:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{4,9}{6} = 0,817 \quad \text{ή} \quad R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{1,1}{6} = 0,817$$

Ερμηνεία συντελεστή προσδιορισμού:

Το 81,7% της συνολικής μεταβλητότητας της αποταμίευσης ερμηνεύεται από τη γραμμική επίδραση του εισοδήματος.

Διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(T - K - 1)}{SST/(T - 1)} = 1 - \frac{1,1/(5 - 1 - 1)}{6/(5 - 1)} = 0,756$$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών