ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ασκήσεις: 08

Βιολέττα Δάλλα

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θέμα 1, Ιούνιος 2015

α) OLS εκτιμητής του β:

$$\widehat{\beta} = (X^{'}X)^{-1}X^{'}Y = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Εκτιμώμενη γραμμή παλινδρόμησης:

$$\widehat{\Pi}_t = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 A_t = 22 - 2A_t$$

Πρόβλεψη για πληθωρισμό (Π_f^A) αν ανεργία είναι 10% ($A_f = 10$):

$$\widehat{\Pi}_f^A = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 A_f = 22 - 2 \cdot 10 = 2$$

Πρόβλεψη για πληθωρισμό (Π_f^B) αν ανεργία είναι 5% ($A_f = 5$):

$$\widehat{\Pi}_f^B = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 A_f = 22 - 2 \cdot 5 = 12$$

Αν η ανεργία από το 10% μειωθεί στο 5%, τότε η προβλεπόμενη μεταβολή στον πληθωρισμό είναι αύξηση κατά 10% ($\widehat{\Pi}_f^B - \widehat{\Pi}_f^A = 12 - 2 = 10$).

β) OLS εκτιμητής του $V(\widehat{\beta})$:

$$\widehat{V}(\widehat{\beta}) = s^2(X^{'}X)^{-1} = s^2 \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

όπου

$$s^2 = \frac{1}{T-K-1}SSE = \frac{1}{22-1-1}30 = 1,5$$

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} \Rightarrow SST = \frac{SSR}{R^2} = \frac{70}{0,7} = 100$$

$$SST = SSR + SSE \Rightarrow SSE = SST - SSR = 100 - 70 = 30$$

γ) Έχουμε τα υποδείγματα παλινδρόμησης:

$$(1)\ \Pi_t = \beta_0 + \beta_1 A_t + u_t \ \ (R)$$

$$(2)\ \Pi_t = \gamma_0 + \gamma_1 A_t + \gamma_2 A_t^2 + \gamma_3(1/A_t) + w_t \ \ (U)$$

Το υπόδειγμα παλινδρόμησης (2) περιέχει δύο επιπλέον ερμηνευτικές μεταβλητές (A^2 και $1/A$) σε σχέση με το υπόδειγμα παλινδρόμησης (1).

Στατιστικός έλεγχος για γραμμικούς περιορισμούς

Υποθέσεις: $H_0 : \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ έναντι $H_1 : \gamma_2 \neq 0$ ή/και $\gamma_3 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/q}{SSE_U/(T-K-1)} = \frac{(30-18)/2}{18/(22-3-1)} = 6$

όπου στο (2)

$SST = SSR + SSE \Rightarrow SSE = SST - SSR = 100 - 82 = 18$

(αφού τα υποδείγματα παλινδρόμησης (1) και (2) έχουν την ίδια εξαρτημένη μεταβλητή και τα ίδια δεδομένα, τότε έχουν το ίδιο SST).

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{q,T-K-1,\alpha} = F_{2,18,0{,}05} = 3{,}555$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0{,}05$.

Σχόλιο: Οι ερμηνευτικές μεταβλητές του τετραγώνου της ανεργίας και του αντιστρόφου της ανεργίας (A^2 και $1/A$) είναι από κοινού σημαντικές.

Βρέθηκε ότι οι ερμηνευτικές μεταβλητές του τετραγώνου της ανεργίας και του αντιστρόφου της ανεργίας (A^2 και $1/A$) είναι από κοινού σημαντικές. Άρα, στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης (παράλειψη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών). Επομένως, επιλέγουμε το (2) μεταξύ των υποδειγμάτων παλινδρόμησης (1) και (2).

Έχουμε τα υποδείγματα παλινδρόμησης:

(2) $\Pi_t = \gamma_0 + \gamma_1 A_t + \gamma_2 A_t^2 + \gamma_3 (1/A_t) + w_t \;\; (U)$

(3) $\Pi_t = \delta_0 + \delta_1 (1/A_t) + \eta_t \;\; (R)$

Το υπόδειγμα παλινδρόμησης (2) περιέχει δύο επιπλέον ερμηνευτικές μεταβλητές (A και A^2) σε σχέση με το υπόδειγμα παλινδρόμησης (3).

Στατιστικός έλεγχος για γραμμικούς περιορισμούς

Υποθέσεις: $H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ έναντι $H_1 : \gamma_1 \neq 0$ ή/και $\gamma_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $F = \frac{(SSE_R - SSE_U)/q}{SSE_U/(T-K-1)} = \frac{(24-18)/2}{18/(22-3-1)} = 3$

όπου στο (3)

$SST = SSR + SSE \Rightarrow SSE = SST - SSR = 100 - 76 = 24$

(αφού τα υποδείγματα παλινδρόμησης (1) και (3) έχουν την ίδια εξαρτημένη μεταβλητή και τα ίδια δεδομένα, τότε έχουν το ίδιο SST).

Κρίσιμη περιοχή: $F > F_{q,\, T-K-1,\, \alpha} = F_{2,\, 18,\, 0{,}05} = 3,555$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Οι ερμηνευτικές μεταβλητές της ανεργίας και του τετραγώνου της ανεργίας (A και A^2) δεν είναι από κοινού σημαντικές.

Βρέθηκε ότι οι ερμηνευτικές μεταβλητές της ανεργίας και του τετραγώνου της ανεργίας (A και A^2) δεν είναι από κοινού σημαντικές. Άρα, στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (2) υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης (περίληψη μη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών). Επομένως, επιλέγουμε το (3) μεταξύ των υποδειγμάτων παλινδρόμησης (2) και (3).

Τελικά, μεταξύ των υποδειγμάτων παλινδρόμησης (1), (2) και (3) επιλέγουμε το (3), αφού στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης λόγω παράλειψης σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών και στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (2) υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης λόγω περίληψης μη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών.

Βρέθηκε ότι στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης (παράλειψη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών) που δημιουργεί ενδογένεια. Άρα, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ των συντελεστών β είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής. Επομένως, η πρόβλεψη $\widehat{\Pi}_f$ είναι μεροληπτική και ασυνεπής πρόβλεψη του Π_f (και αυτές του ερωτήματος α)). Τότε και η πρόβλεψη για τη μεταβολή στον πληθωρισμό είναι μεροληπτική και ασυνεπής.

Βάσει του επιλεγόμενου υποδείγματος παλινδρόμησης (3):

Πρόβλεψη για πληθωρισμό (Π_f^A) αν ανεργία είναι 10% ($A_f = 10$):

$$\widehat{\Pi}_f^A = \widehat{\delta}_0 + \widehat{\delta}_1(1/A_f) = -3 + 25 \cdot (1/10) = -0,5$$

Πρόβλεψη για πληθωρισμό (Π_f^B) αν ανεργία είναι 5% ($A_f = 5$):

$$\widehat{\Pi}_f^B = \widehat{\delta}_0 + \widehat{\delta}_1(1/A_f) = -3 + 25 \cdot (1/5) = 2$$

Αν η ανεργία από το 10% μειωθεί στο 5%, τότε η προβλεπόμενη μεταβολή στον πληθωρισμό είναι αύξηση κατά 2,5% ($\widehat{\Pi}_f^B - \widehat{\Pi}_f^A = 2 - (-0,5) = 2,5$).

δ) Εισάγουμε στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (2) την ερμηνευτική μεταβλητή Z. Έχουμε το υπόδειγμα παλινδρόμησης:

$$\Pi_t = \gamma_0 + \gamma_1 A_t + \gamma_2 A_t^2 + \gamma_3(1/A_t) + \gamma_4 Z_t + \varepsilon_t$$

Ισχύει ότι: $Z_t = 5\frac{A_t^2+1}{A_t} - 1 \Leftrightarrow Z_t = 5(A_t + \frac{1}{A_t}) - 1 \Leftrightarrow 5A_t + 5\frac{1}{A_t} - Z_t = 1 \Rightarrow$ τέλεια γραμμική σχέση ανάμεσα στις ερμηνευτικές μεταβλητές A, $1/A$ και $Z \Rightarrow$ υπάρχει τέλεια πολυσυγγραμμικότητα $\Rightarrow$ ο πίνακας X δεν είναι πλήρους βαθμού $\Rightarrow$ ο πίνακας $X^{'}X$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow$ οι OLS εκτιμητές δεν υπολογίζονται.

Θέμα 2, Σεπτέμβριος 2019

α) Ισχύει ότι

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma(Y_t^* - Y_{t-1}) \Leftrightarrow$$
$$\gamma Y_t^* = Y_t - (1-\gamma)Y_{t-1} \Leftrightarrow$$
$$Y_t^* = \frac{1}{\gamma}Y_t - \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1}$$

και

$$Y_t^* = \delta_0 + \delta_1 X_t + \varepsilon_t \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\gamma}Y_t - \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1} = \delta_0 + \delta_1 X_t + \varepsilon_t \Rightarrow$$
$$\frac{1}{\gamma}Y_t = \delta_0 + \frac{1-\gamma}{\gamma}Y_{t-1} + \delta_1 X_t + \varepsilon_t \Rightarrow$$
$$Y_t = \delta_0\gamma + (1-\gamma)Y_{t-1} + \delta_1\gamma X_t + \gamma\varepsilon_t \Rightarrow$$
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t \ (1)$$

όπου $\beta_0 = \delta_0\gamma$, $\beta_1 = 1-\gamma$, $\beta_2 = \delta_1\gamma$ και $u_t = \gamma\varepsilon_t$.

Το θεωρητικό υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) αντιστοιχεί στο εκτιμώμενο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1).

OLS εκτιμητής $\widehat{\gamma}$ του βαθμού προσαρμογής γ:

$$\beta_1 = 1 - \gamma \Leftrightarrow \gamma = 1 - \beta_1 \Rightarrow \widehat{\gamma} = 1 - \widehat{\beta}_1 = 1 - 0,12 = 0,88$$

Βαθμός προσαρμογής είναι μικρότερος του 1 $\Leftrightarrow \gamma < 1 \overset{\beta_1 = 1-\gamma}{\Leftrightarrow} \beta_1 > 0$

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = 0$ έναντι $H_1 : \beta_1 > 0$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1^*}{s_{\widehat{\beta}_1}} = \frac{0{,}12 - 0}{0{,}04} = 3$

Κρίσιμη περιοχή: $t > t_{T-K-1,\,\alpha} = t_{51-2-1,\,0{,}05} = t_{48,\,0{,}05} \simeq Z_{0{,}05} = 1,645$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Βαθμός προσαρμογής είναι μικρότερος του 1.

β) Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (2) γίνεται στατιστικός έλεγχος για ετεροσκεδαστικότητα.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Pagan-Godfrey για ετεροσκεδαστικότητα

Ετεροσκεδαστικότητα: $V(u_t) = \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 X_t^2$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\widehat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 X_t^2 + \eta_t \quad (2)$

Υποθέσεις: $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ έναντι $H_1 : \alpha_1 \neq 0$ ή/και $\alpha_2 \neq 0$

Στατιστική ελέγχου: $BPG = TR^2 = 51 \cdot 0,01 = 0,51$

Κρίσιμη περιοχή: $BPG > \chi^2_{m,\,\alpha} = \chi^2_{2,\,0{,}05} = 5,991$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα της μορφής $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 X_t^2$.

Βάσει του υποδείγματος βοηθητικής παλινδρόμησης (3) γίνεται στατιστικός έλεγχος για αυτοσυσχέτιση έως 3ης-τάξης.

Στατιστικός έλεγχος Breusch-Godfrey για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \rho_3 u_{t-3} + \eta_t$

Βοηθητική παλινδρόμηση: $\widehat{u}_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 X_t + \rho_1 \widehat{u}_{t-1} + \rho_2 \widehat{u}_{t-2} + \rho_3 \widehat{u}_{t-3} + \eta_t \quad (3)$

Υποθέσεις: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$ έναντι H_1 : τουλάχιστον ένα $\rho_j \neq 0$, $j = 1, 2, 3$

Στατιστική ελέγχου: $BG = (T - p)R^2 = (51 - 3) \cdot 0,1 = 4,8$

Κρίσιμη περιοχή: $BG > \chi^2_{p,\,\alpha} = \chi^2_{3,\,0{,}05} = 7,815$

Απόφαση: Δεν απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση έως $3^{\eta\varsigma}$-τάξης.

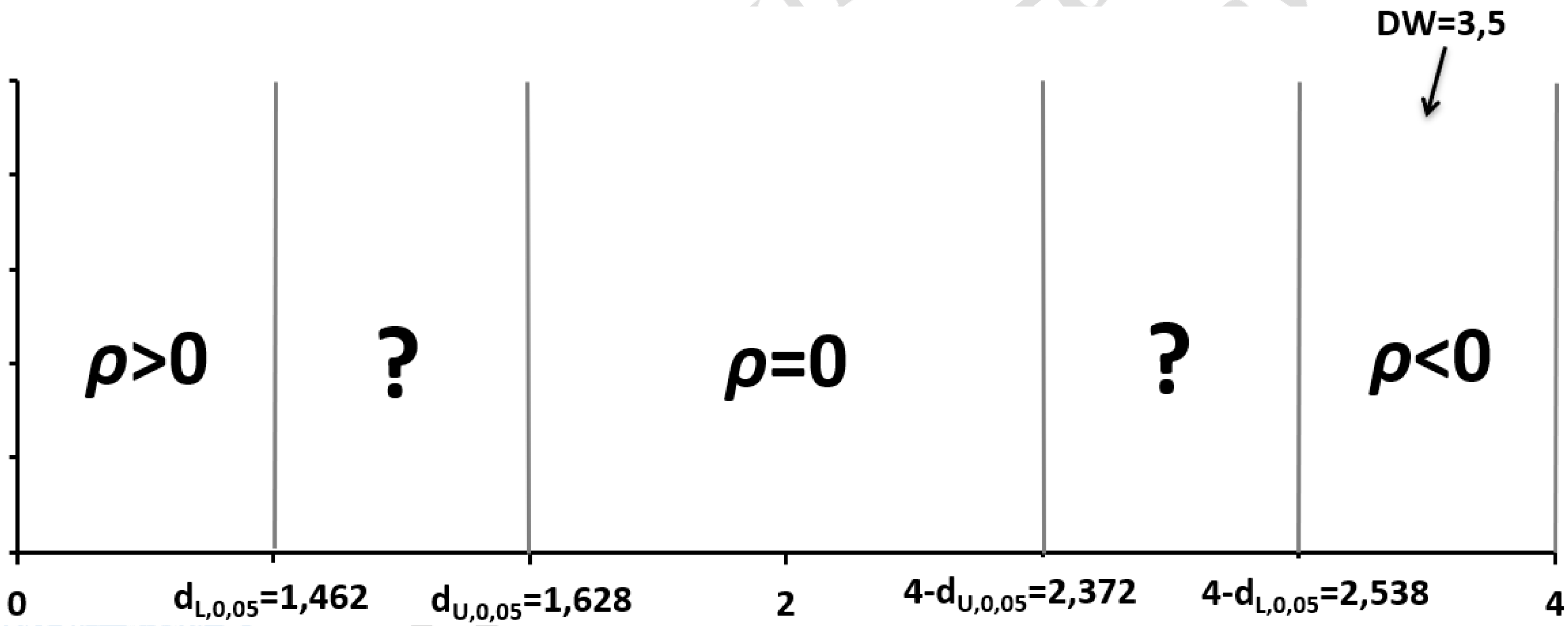
Βρέθηκε ότι δεν υπάρχει ετεροσκεδαστικότητα και αυτοσυσχέτιση στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1). Το υπόδειγμα παλινδρόμησης περιλαμβάνει την 1^{η}-υστέρηση της εξαρτημένης μεταβλητής ως ερμηνευτική μεταβλητή (Y_{t-1}).

Άρα, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\beta}$ των συντελεστών β είναι μεροληπτικός, συνεπής και ασυμπτωτικά άριστος εκτιμητής. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\beta})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\widehat{\beta})$ είναι μεροληπτικός και συνεπής εκτιμητής.

Επομένως, οι στατιστικοί έλεγχοι t και F (και αυτός του ερωτήματος α)) είναι αξιόπιστοι (σε μεγάλα δείγματα).

γ) Στατιστικός έλεγχος Durbin-Watson για αυτοσυσχέτιση

Αυτοσυσχέτιση: $u_t = \rho u_{t-1} + \eta_t$



Υποθέσεις: $H_0 : \rho = 0$ έναντι $H_1 : \rho < 0$

Στατιστική ελέγχου: $DW = 3,5$

Κρίσιμη περιοχή: $DW > 4 - d_{L,\,\alpha} = 4 - d_{L,\,0{,}05} = 4 - 1,462 = 2,538$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Υπάρχει (αρνητική) αυτοσυσχέτιση $1^{ης}$-τάξης.

Έχουμε τα υποδείγματα παλινδρόμησης:

(1) $Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 X_t + u_t \;\; (U)$

(4) $M_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + w_t \Rightarrow Y_t - Y_{t-1} = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + w_t \Rightarrow Y_t = \alpha_0 + Y_{t-1} + \alpha_1 X_t + w_t \;\; (R)$

Το υπόδειγμα (4) είναι ειδική περίπτωση του (1) με γραμμικό περιορισμό $\beta_1 = 1$.

Βάσει των (1) και (4) ελέγχουμε την υπόθεση ότι ο γραμμικός περιορισμός $\beta_1 = 1$ ισχύει.

Στατιστικός έλεγχος για έναν συντελεστή παλινδρόμησης

Υποθέσεις: $H_0 : \beta_1 = 1$ έναντι $H_1 : \beta_1 \neq 1$

Στατιστική ελέγχου: $t = \frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1^*}{s_{\widehat{\beta}_1}} = \frac{0{,}12 - 1}{0{,}04} = -22$

Κρίσιμη περιοχή: $|t| > t_{T-K-1,\,\frac{\alpha}{2}} = t_{51-2-1,\,0{,}025} = t_{48,\,0{,}025} \simeq Z_{0{,}025} = 1,96$

Απόφαση: Απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$.

Σχόλιο: Ο γραμμικός περιορισμός $\beta_1 = 1$ δεν ισχύει.

Βρέθηκε ότι ο γραμμικός περιορισμός $\beta_1 = 1$ δεν ισχύει. Επομένως, στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (4) υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης (χρήση λάθους περιορισμού) που δημιουργεί ενδογένεια. Άρα, ο OLS εκτιμητής $\widehat{\alpha}$ των συντελεστών α είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής. Επίσης, ο OLS εκτιμητής $\widehat{V}(\widehat{\alpha})$ του πίνακα διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των εκτιμητών των συντελεστών $V(\widehat{\alpha})$ είναι μεροληπτικός και ασυνεπής εκτιμητής.

Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (4) υπάρχει σφάλμα εξειδίκευσης λόγω χρήσης λάθους περιορισμού ($\beta_1 = 1$) και αυτοσυσχέτιση. Στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (1) ο λάθος περιορισμός ($\beta_1 = 1$) δεν χρησιμοποιείται και δεν υπάρχει αυτοσυσχέτιση. Η αυτοσυσχέτιση $1^{ης}$-τάξης που υπάρχει στο υπόδειγμα παλινδρόμησης (4) μπορεί να έχει δημιουργηθεί λόγω της χρήσης λάθους περιορισμού ($\beta_1 = 1$).