



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών Θεωρίες Οικονομικής Μεγέθυνσης

Ν. Θεοχαράκης
10/3/2021

Άσκηση 2

Τεχνική πρόοδος και συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas

Σε μια γενικευμένη συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas του τύπου $Y(t) = AK(t)^\alpha L(t)^\beta$ μπορούμε να ενσωματώσουμε την τεχνική πρόοδο με τρόπο που να αυξάνει την παραγωγικότητα (αποτελεσματικότητα) του κεφαλαίου, της εργασίας ή συνολικά της παραγωγής. Σε επόμενο μάθημα θα δούμε τους ορισμούς αυτών των τύπων τεχνικής προόδου, αλλά τώρα μας ενδιαφέρει ο μαθηματικός μετασχηματισμός.

Αν ορίσουμε ως $A_H(t)$ την αποτελεσματικότητα της συνολικής παραγωγής, με $A_K(t)$ την αποτελεσματικότητα του κεφαλαίου και $A_L(t)$ με την αποτελεσματικότητα της εργασίας, η συνάρτηση παραγωγής με τα διάφορα είδη τεχνικής προόδου μπορεί να γραφεί στη γενική της μορφή ως:

$$Y(t) = AA_H(t)[(A_K(t)K(t))^\alpha (A_L(t)L(t))^\beta]$$

Δίνονται μάλιστα οι ρυθμοί μεγέθυνσης τους ως εξής:

$$\hat{A}_H(t) = g_H, \quad \hat{A}_K(t) = g_K, \quad \hat{A}_L(t) = g_L$$

Σας ζητώ να αποδείξετε ότι με τους κατάλληλους μετασχηματισμούς των μεταβλητών στην συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas είναι αδιάφορο **πού** ενσωματώνεται η τεχνική πρόοδος, δηλαδή η συνάρτηση παραγωγής με ενσωματωμένη τεχνική πρόοδο στη γενική μορφή μπορεί να ξαναγραφεί εναλλακτικά και ισοδύναμα και ως

$$Y(t) = AB_H(t)[K(t)^\alpha L(t)^\beta]$$

$$Y(t) = A(B_K(t)K(t))^\alpha L(t)^\beta$$

$$Y(t) = AK(t)^\alpha [B_L(t)L(t)]^\beta$$

όπου τα διάφορα B είναι συνάρτηση των A και των α και β . Υπολογίστε και τους ρυθμούς μεγέθυνσης των B σε σχέση με τους ρυθμούς μεγέθυνσης των A και των α και β

Λύση

Εκφράζουμε εκ νέου τη συνάρτηση παραγωγής συγκεντρώνοντας όλους τους όρους της τεχνικής προόδου μαζί και τη συνάρτηση παραγωγής με όλους τους όρους χωρίς ενσωματωμένη τεχνική πρόοδο μαζί η συνάρτηση γίνεται

$$Y(t) = AA_H(t)[(A_k(t)K(t))^\alpha (A_L(t)L(t))^\beta] = [A_H(t)A_k(t)^\alpha A_L(t)^\beta][AK(t)^\alpha L(t)^\beta]$$

Εξισώνουμε αυτή τη συνάρτηση παραγωγής με τις μορφές συναρτήσεων των B_i . λύνουμε ως προς τα B_i (όπου $i=H,K,L$) και έχουμε:

$$Y(t) = [A_H(t)A_k(t)^\alpha A_L(t)^\beta][AK(t)^\alpha L(t)^\beta] = B_H(t)[AK(t)^\alpha L(t)^\beta] \Rightarrow$$

$$B_H(t) = A_H(t)A_k(t)^\alpha A_L(t)^\beta$$

$$Y(t) = [A_H(t)A_k(t)^\alpha A_L(t)^\beta][AK(t)^\alpha L(t)^\beta] = A(B_K(t)K(t))^\alpha L(t)^\beta = B_K(t)^\alpha [AK(t)^\alpha L(t)^\beta] \Rightarrow$$

$$B_K(t)^\alpha = A_H(t)A_k(t)^\alpha A_L(t)^\beta \Rightarrow B_K(t) = A_H(t)^{\frac{1}{\alpha}} A_k(t) A_L(t)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$Y(t) = [A_H(t)A_k(t)^\alpha A_L(t)^\beta][AK(t)^\alpha L(t)^\beta] = AK(t)^\alpha [B_L(t)L(t)]^\beta = B_L(t)^\beta [AK(t)^\alpha L(t)^\beta] \Rightarrow$$

$$B_L(t)^\beta = A_H(t)A_k(t)^\alpha A_L(t)^\beta \Rightarrow B_L(t) = A_H(t)^{\frac{1}{\beta}} A_k(t)^{\frac{\alpha}{\beta}} A_L(t)$$

Άρα

$$B_H(t) = A_H(t)A_k(t)^\alpha A_L(t)^\beta$$

$$B_K(t) = A_H(t)^{\frac{1}{\alpha}} A_k(t) A_L(t)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$B_L(t) = A_H(t)^{\frac{1}{\beta}} A_k(t)^{\frac{\alpha}{\beta}} A_L(t)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα «λογαριθμίζω και παραγωγίζω» υπολογίζουμε τους ρυθμούς μεγέθυνσης των B_i (όπου $i=H,K,L$) συναρτήσεων των ρυθμών μεγέθυνσης των A_i δηλ., των g_i , και των παραμέτρων α και β

$$\hat{B}_H = g_H + \alpha g_K + \beta g_L$$

$$\hat{B}_K = \frac{1}{\alpha} g_H + g_K + \frac{\beta}{\alpha} g_L$$

$$\hat{B}_L = \frac{1}{\beta} g_H + \frac{\alpha}{\beta} g_K + g_L$$