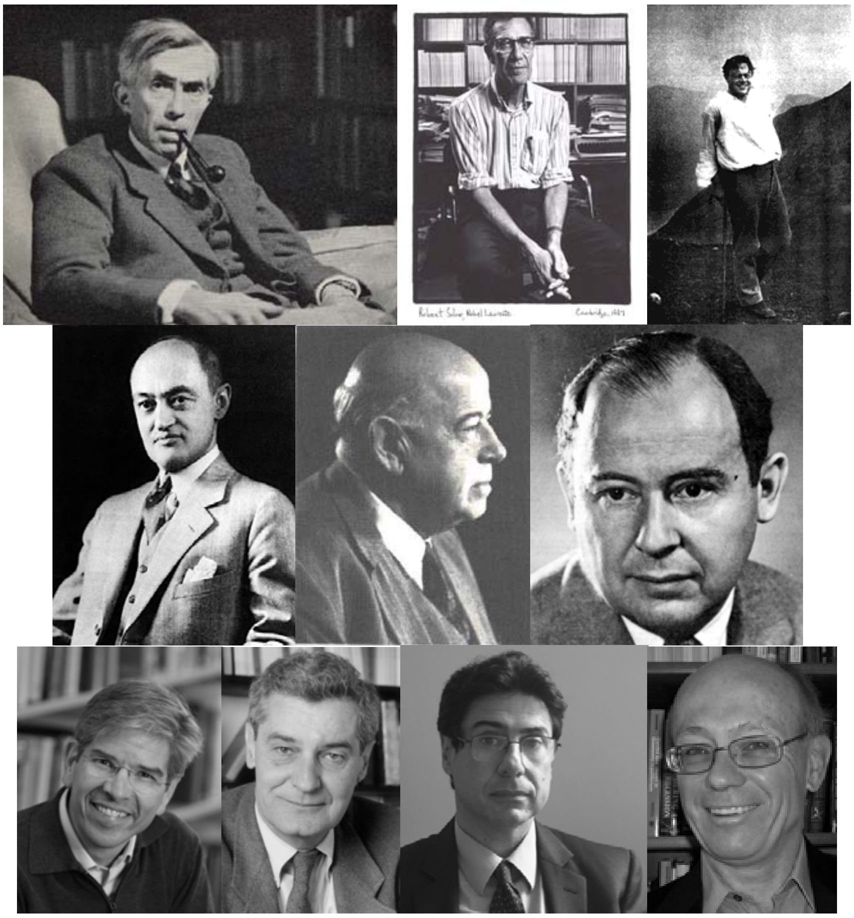
ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Σημειώσεις στη Θεωρία της Οικονομικής Μεγέθυνσης



Νίκος Θεοχαράκης
&
Λευτέρης Τσερκέζης

2009

Σημείωση

Τα κείμενα που ακολουθούν αποτελούν την βάση των πανεπιστημιακών παραδόσεων του υπογράφοντος στο μάθημα της Θεωρίας της Οικονομικής Μεγέθυνσης στο Τμήμα Οικονομικών Επιστημών του Αθήνησι. Πρέπει να διαβαστούν, για τις εξετάσεις του μαθήματος, σε συνδυασμό με το διδακτικό εγχειρίδιο του Hywell G. Jones *Εισαγωγή στις σύγχρονες θεωρίες οικονομικής μεγέθυνσης* (Αθήνα: Κριτική, 1993) που διανέμεται από το Πανεπιστήμιο Αθηνών στις φοιτήτριες και φοιτητές του Τμήματος. Οι σημειώσεις δεν περιλαμβάνουν την ανάλυση της τεχνικής προόδου που υπάρχει στο εγχειρίδιο και είναι στην εξεταστέα ύλη.

Οι πρώτες δύο διαλέξεις αποτελούν ουσιαστικά επεξεργασία της διδακτικής παρουσίασης με ηλεκτρονικό τρόπο και ως εκ τούτου είναι ελλειπτικές. Η τρίτη διάλεξη για το υπόδειγμα Harrod αποτελεί κωδικοποίηση του αντίστοιχου κεφαλαίου του Hywell Jones και αποτελούν μια σύνοψη και aide-mémoire. Το υπόδειγμα Solow αναλύεται πιο διεξοδικά σε αυτές τις σημειώσεις από ό,τι στο εγχειρίδιο. Αντίθετα το υπόδειγμα Ramsey-Cass-Koopmans, τα υποδείγματα ενδογενούς μεγέθυνσης και το υπόδειγμα του von Neumann δεν περιλαμβάνονται στο εγχειρίδιο. Ο Λευτέρης Τσερκέζης, διδακτορικός φοιτητής του Τμήματός μας έγραψε το τελευταίο κεφάλαιο για την σύγκλιση.

Πρέπει να τονίσω ότι οι σημειώσεις αυτές σε μεγάλο μέρος τους *δεν είναι πρωτότυπες*. Βασίζονται κυρίως σε ξενόγλωσσα εγχειρίδια που απευθύνονται σε προχωρημένους προπτυχιακούς ή μεταπτυχιακούς φοιτητές και, φυσικά, στα πρωτότυπα άρθρα που αναλύονται. Όπου έχει γίνει αυτό αναφέρεται διαρρήδην και σαφώς μέσα στο κείμενο. Προσπάθησα όμως να κάνω τις σημειώσεις πιο αναλυτικές με επεξηγήσεις, ώστε να γίνουν προσιτές σε προπτυχιακούς φοιτητές χωρίς να απαιτείται εξειδικευμένη γνώση. Το κεφάλαιο που έγραψε ο Λευτέρης Τσερκέζης είναι όμως πρωτότυπο.

Αθήνα, Ιούνιος 2009,

Νίκος Θεοχαράκης
ntheocar@econ.uoa.gr

Πίνακας περιεχομένων

ΠΡΩΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
Τα μαθηματικά της μεγέθυνσης

1. Διαχρονική μεταβολή και ρυθμοί μεγέθυνσης (growth rates)

Η οικονομική μεγέθυνση προϋποθέτει ότι τα οικονομικά μεγέθη (μεταβλητές, αγγλ. *variables*) μεταβάλλονται στον χρόνο. Άρα οι *οικονομικές* μεταβλητές που μας απασχολούν είναι *χρονικές μεταβλητές* και εκφράζονται αναλυτικά με *χρονικές συναρτήσεις*. *Παραδείγματα οικονομικών μεταβλητών*: ΑΕΠ, απόθεμα κεφαλαίου, επενδύσεις, εργατικό δυναμικό.

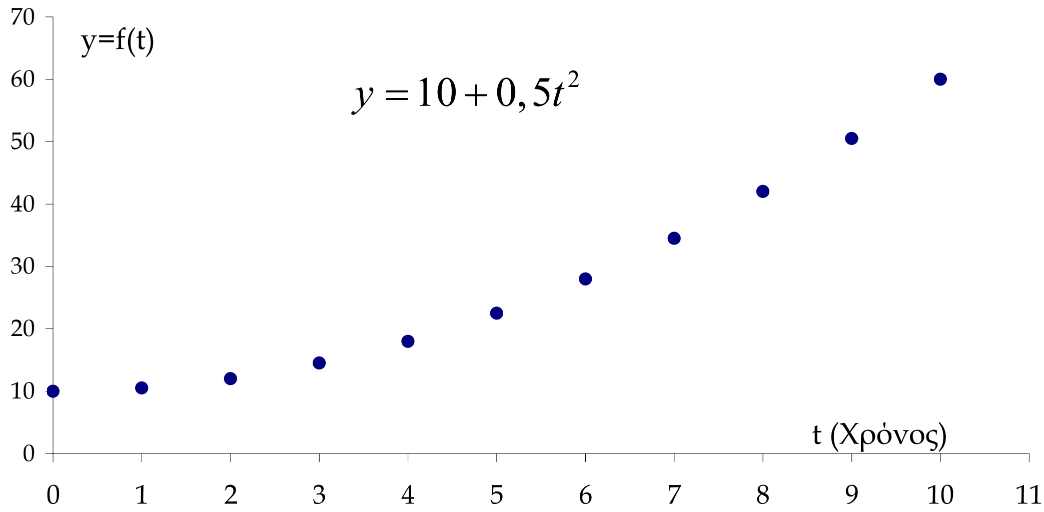
Χρονικές μεταβλητές

Διακρίνονται σε:
- Διακριτές μεταβλητές (*Discrete variables*)
- Συνεχείς μεταβλητές (*Continuous variables*)

Διακριτές μεταβλητές

- Το μέγεθος μετράται σε συγκεκριμένες *στιγμές* του χρόνου (π.χ., στην αρχή ή το τέλος ενός μήνα, τριμήνου ή έτους) ή αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο *χρονικό διάστημα* (μήνας, τρίμηνο ή έτος)
- Στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε σε *απόθεμα* (π.χ., απόθεμα κεφαλαίου, αριθμός ανέργων), ενώ στην δεύτερη περίπτωση αναφερόμαστε σε *ροή* (π.χ., ΑΕΠ, επενδύσεις).
- Στην περίπτωση της διακριτής μεταβλητής ο χρόνος λαμβάνει τιμές από τους φυσικούς αριθμούς $t = 0,1,2,3,\ldots,n$
- Η χρονική στιγμή (ή διάστημα) $t = 0$ ορίζεται αυθαίρετα και αποτελεί την αρχή της χρονολογικής σειράς.
- Οι χρονικές στιγμές (ή οι αρχές των χρονικών διαστημάτων) $t=0$, $t=1$, $t=2$, …, $t=n$ απέχουν χρονικά εξίσου μεταξύ τους κατά ένα διάστημα που αποτελεί την μονάδα μέτρησης του χρόνου.
- Την διακριτή μεταβλητή μπορούμε να την συμβολίσουμε χρησιμοποιώντας ως υπο-δείκτη την χρονική στιγμή ή διάστημα:
    - $y_0, y_1, y_2 \ldots y_t \ldots y_n$
- Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε ως t_0 την αρχική στιγμή και οι υπόλοιπες να ορισθούν ως $t_0 + 1$, $t_0 + 2$, … , $t_0 + n$:
    - $y_{t_o}, y_{t_o+1}, y_{t_o+2}, \ldots, y_{t_o+n}$

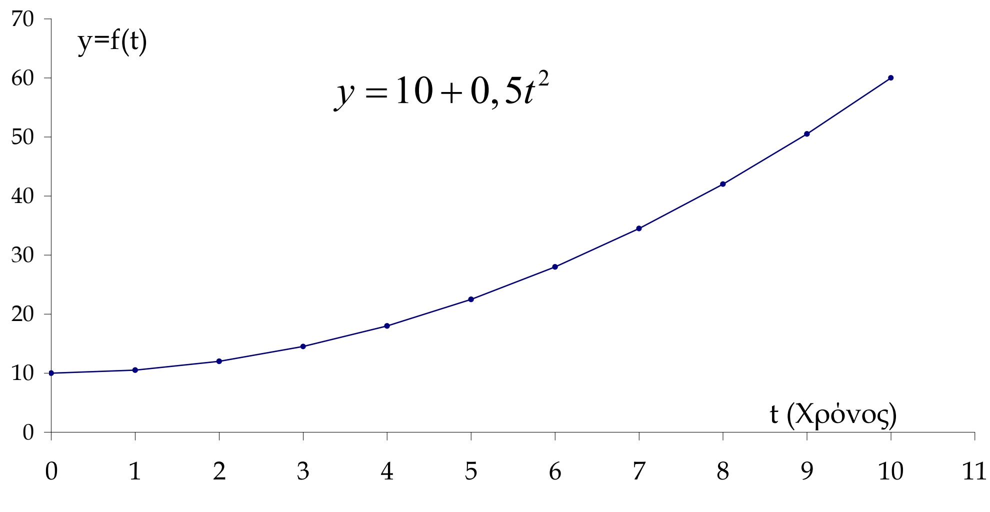
Διακριτή μεταβλητή



Συνεχείς μεταβλητές

- Η χρονική μεταβλητή *y* ορίζεται συναρτήσει του χρόνου *t* και συμβολίζεται ως *y*=*f*(*t*).
- Στην περίπτωση της συνεχούς μεταβλητής ο χρόνος λαμβάνει τιμές από το συνεχές φάσμα των θετικών πραγματικών αριθμών και μπορεί να ορισθεί και για ενδιάμεσες χρονικές στιγμές.
  - Συνεπώς η χρονική συνάρτηση *y*=*f*(*t*) είναι συνεχής (τουλάχιστον για ορισμένα χρονικά διαστήματα).
  - Όπως και στην περίπτωση των διακριτών μεταβλητών η χρονική στιγμή *t*=0 ορίζεται αυθαίρετα.

Συνεχής μεταβλητή



Μεταβολή & ταχύτητα μεταβολής

- Στις χρονικές μεταβλητές μας ενδιαφέρει η *μεταβολή* τους στον χρόνο καθώς και η *ταχύτητα μεταβολής*.
- Αν στο χρονικό διάστημα Δt η μεταβλητή y μεταβληθεί κατά Δy τότε η «μέση ταχύτητα», ή η *μέση τάση μεταβολής* της y που ορίζεται ως $\Delta y/\Delta t$ μας δείχνει την *απόλυτη μεταβολή* του μεγέθους y στο χρονικό διάστημα Δt.
- Το πρόβλημα με τον ορισμό αυτό είναι ότι *εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης της μεταβλητής y*. Θα είναι δηλ., διαφορετικό αν η y είναι εκφρασμένη σε €, ή σε χιλιάδες € ή σε $.

Σχετική ή ποσοστιαία μεταβολή

- Για τον λόγο αυτό εστιάζουμε στην *σχετική* ή *ποσοστιαία* μεταβολή του y:
- Διαιρούμε δηλ., την απόλυτη μεταβολή Δy (αρνητική ή θετική) με το μέγεθος της μεταβλητής y:

$$\Delta y/y$$

- Στην περίπτωση αυτή οι μονάδες ακυρώνονται:

$$\Delta y/y=100(\text{χιλ.€})/1.000(\text{χιλ.€}) = 100.000\text{€}/1.000.000\text{€}=10\%$$

Ποσοστιαίος ρυθμός μεγέθυνσης

- Ορίζουμε τον *ποσοστιαίο ρυθμό μεγέθυνσης* της μεταβλητής y, g_y ως:

$$g_y = \frac{1}{y}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

- Συχνά, επειδή λαμβάνουμε το Δt να είναι ίσο με την μονάδα μέτρησης του χρόνου, δηλ., $\Delta t=1$, ο παραπάνω ορισμός ισοδυναμεί με τον

$$g_y=\Delta y/y$$

Ποσοστιαίος ρυθμός μεγέθυνσης στις διακριτές μεταβλητές

- Στις διακριτές μεταβλητές η απόλυτη μεταβολή ορίζεται ως:

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$$

- Άρα ο ποσοστιαίος ρυθμός μεγέθυνσης είναι

$$g_{y,t} = \frac{1}{y}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1}{y_t}\frac{y_{t+1}-y_t}{\Delta t} = \frac{y_{t+1}-y_t}{y_t}$$

Εφόσον στις διακριτές μεταβλητές $\Delta t=(t+1)-t=1$

- Παρατηρείστε επίσης ότι

$$g_{y,t} = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} \Rightarrow y_t\left(1 + g_{y,t}\right) = y_{t+1}$$

- Παράδειγμα:
- Έστω η μεταβλητή y_t η οποία έχει την αρχική τιμή y_0=120 και στις επόμενες 5 περιόδους έχει τις τιμές 126, 138, 161, 182 και 200 αντίστοιχα.
- Υπολογίστε τους αντίστοιχους ρυθμούς μεγέθυνσης.

Υπολογισμός ρυθμών μεγέθυνσης διακριτών μεταβλητών

(1)	(2)	(3)	(4)
t	y_t	Δy_t	$g_{y,t}$
0	120		
1	126	6	5,00%
2	138	12	9,52%
3	161	23	16,67%
4	182	21	13,04%
5	200	18	9,89%

-
- Παρατηρείστε επίσης ότι

$$y_0\left(1+g_{y,0}\right)=y_1$$

$$y_1\left(1+g_{y,1}\right)=y_2=y_0\left(1+g_{y,0}\right)\left(1+g_{y,1}\right)$$

$$y_2\left(1+g_{y,2}\right)=y_3=y_0\left(1+g_{y,0}\right)\left(1+g_{y,1}\right)\left(1+g_{y,2}\right)$$

$$y_3\left(1+g_{y,3}\right)=y_4=y_0\left(1+g_{y,0}\right)\left(1+g_{y,1}\right)\left(1+g_{y,2}\right)\left(1+g_{y,3}\right)$$

$$y_4\left(1+g_{y,4}\right)=y_5=y_0\left(1+g_{y,0}\right)\left(1+g_{y,1}\right)\left(1+g_{y,2}\right)\left(1+g_{y,3}\right)\left(1+g_{y,4}\right)$$

- Ερωτάται:
- Ποιος είναι ο *μέσος ρυθμός μεγέθυνσης*, δηλ., ο ρυθμός εκείνος που αν ήταν σταθερός σε όλες τις περιόδους θα μας έδινε την τελική τιμή;
- Δηλ., ποιος θα ήταν ο g_y για τον οποίον θα ίσχυε

$$y_0(1+g_y)^n=y_n$$

- Λύνοντας τον παραπάνω τύπο ως προς g_y έχουμε:

$$y_0\left(1+g_y\right)^n = y_n \Rightarrow g_y = \left(\frac{y_n}{y_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

- Στο παράδειγμά μας έχουμε:

$$g_y = \left(\frac{y_n}{y_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{200}{120}\right)^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 10{,}76\%$$

- Παρατηρείστε ότι ο μέσος ρυθμός μεγέθυνσης είναι διαφορετικός από τον μέσο όρο των ρυθμών μεγέθυνσης, δηλ.,

$$g_y = \left(\frac{y_n}{y_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \neq \sum_{t=0}^{n-1}\frac{g_{y,t}}{n} = \frac{5+9{,}52+16{,}67+13{,}04+9{,}89}{5} \approx 10{,}82\%$$

Ρυθμός μεγέθυνσης στις συνεχείς μεταβλητές

- Στις συνεχείς μεταβλητές αντικαθιστούμε το πηλίκο $\Delta y/y$ με την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $y=f(t)$.
- Θυμηθείτε ότι η πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης $y=f(t)$ ορίζεται ως:

$$f'(t) = \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

- Εν προκειμένω δεν μιλάμε για *μέση τάση μεταβολής* όπως στις διακριτές μεταβλητές αλλά για *στιγμιαία τάση μεταβολής* σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, η οποία δίδεται από την πρώτη παράγωγο $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$
- Ο *(στιγμιαίος) ρυθμός μεγέθυνσης* προκύπτει αντίστοιχα διαιρώντας την στιγμιαία τάση μεταβολής με το μέγεθος της μεταβλητής στην συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Δηλ.,

$$g_y = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

- Συνήθως συμβολίζουμε την *πρώτη παράγωγο ως προς τον χρόνο t* με μία τελεία πάνω από την μεταβλητή. Έτσι έχουμε:

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f'(t)$$

- Ο οποίος διαβάζεται «y τελεία» (y dot)

- Αντίστοιχα ο *ρυθμός μεγέθυνσης ορίζεται* ως:

$$g_y = \frac{\dot{y}}{y} = \hat{y}$$

- Ο οποίος διαβάζεται «y σκεπή» (y hat)

- Άρα οι εξής συμβολισμοί είναι ισοδύναμοι:

$$g_y = \frac{\dot{y}}{y} = \hat{y} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

2. Λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις

- Θυμηθείτε τους ορισμούς:
- Ο *φυσικός λογάριθμος* ενός θετικού αριθμού y ο οποίος συμβολίζεται με $\log_e(y)$, ή απλούστερα με $\ln(y)$, είναι ο αριθμός εκείνος z ο οποίος αν χρησιμοποιηθεί ως εκθέτης του υπερβατικού αριθμού **e**= 2,718281828… μας δίνει τον αριθμό y.
- Δηλ., ισχύει ότι
    - $z = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^z$
- Άρα η $y=y(z)=e^z=\exp(z)$ αποτελεί μια *εκθετική συνάρτηση* ως προς z
- Η συνάρτηση αυτή αποτελεί μια ειδική περίπτωση ενός γενικότερου τύπου εκθετικών συναρτήσεων της μορφής

$$y = Ae^{\phi(z)}$$

- Της οποίας η πρώτη παράγωγος δίνεται από τον τύπο

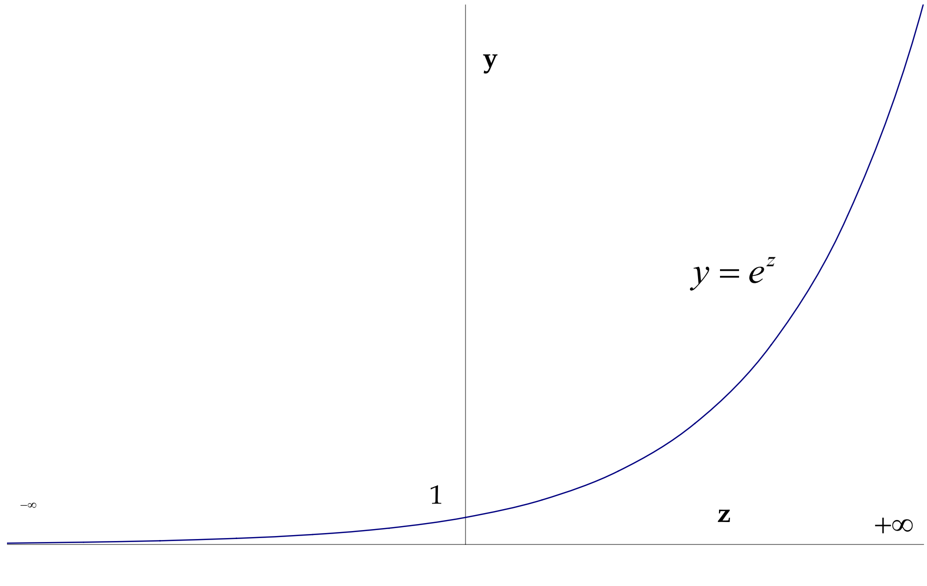
$$\frac{dy}{dz} = \left(Ae^{\phi(z)}\right)' = Ae^{\phi(z)}\phi'(z)$$

- Στην περίπτωση της $y(z)=e^z$ η πρώτη παράγωγος είναι

$$\frac{dy}{dz} = \left(e^z\right)' = e^z$$

- Δηλ., η ίδια η συνάρτηση. Είναι προφανές ότι όλες οι παράγωγοι (δευτέρα, τρίτη, κλπ.) είναι ίδιες με την αρχική συνάρτηση.
- Εφόσον $y(0)=e^0=1$ και $e^z>0$, δηλ., η συνάρτηση, η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος είναι θετικές προκύπτει και η γραφική μορφή της συνάρτησης

Γραφική παράσταση εκθετικής συνάρτησης



Οικονομική σημασία του e

- Έστω ένα ποσό €A το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο *r*.
- Μετά από ένα έτος το ποσό αυτό θα είναι: €A(1+*r*)
- Μετά από *t* έτη θα είναι: €$A(1+r)^t$
- Έστω τώρα ότι η τράπεζα ανατοκίζει το ποσό κάθε τρίμηνο, δηλ., 4 φορές το χρόνο.
- Μετά από ένα χρόνο το ποσό θα είναι: €$A(1+r/4)^4$
- Μετά από *t* έτη θα είναι €:$A(1+r/4)^{4t}$
- Γενικότερα αν η τράπεζα ανατοκίζει *n* φορές το χρόνο
- Μετά από ένα χρόνο το ποσό θα είναι: €$A(1+r/n)^n$
- Μετά από *t* έτη θα είναι €A $(1+r/n)^{nt}$
- Τι σημασία έχει πόσες φορές ανατοκίζεται το κεφάλαιο;
- Ας δούμε τι σημαίνει αυτό για A=1 και *r*=100%

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	2,25
4	2,4414063
100	2,7048138
1.000	2,7169239
10.000	2,7181459
100.000	2,7182682
10.000.000	2,7182817

- Όταν οι φορές που ανατοκίζεται €1 με επιτόκιο 100% τείνουν στο άπειρο, δηλ., όταν έχουμε *συνεχή ανατοκισμό* (*continuous compounding*), το ποσό αυτό μετά από ένα χρόνο θα τείνει στο *e* το οποίο είναι ίσο με 2,718281828...
- Πιο αυστηρά, το *e* ορίζεται ως:

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν το επιτόκιο είναι σταθερό και ίσο με *r,* ένα ποσό €1 με συνεχή ανατοκισμό γίνεται μετά από *t* έτη ίσο με

$$e^{rt}$$

Απόδειξη

- Πρώτα αποδεικνύουμε για t=1:
- Ζητούμε το όριο της ακολουθίας

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

- Όταν το n τείνει στο άπειρο
- Έστω m=n/r. Συνεπώς

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{mr} = \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^r$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n &= \lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^r \\ &= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^r \\ &= e^r\end{aligned}$$

- Μετά αποδεικνύουμε για κάθε t:
- Θυμηθείτε ότι γενικά ισχύει:

$$\left(\lim_{m\to\infty} x_m\right)^r = \lim_{m\to\infty}\left(x_m^r\right)$$

- Συνεπώς

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right)^t \\ &= \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n\right)^t \\ &= \left(e^r\right)^t = e^{rt}\end{aligned}$$

- Άρα ένα ποσό €Α συνεχώς ανατοκιζόμενο με ετήσιο επιτόκιο r θα είναι μετά από t έτη ίσο με €

$$\mathrm{A}e^{rt}$$

- Τον τύπο αυτό μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για ***αναγωγή σε παρούσα αξία***:
- Αν έχουμε συνεχή ανατοκισμό με σταθερό επιτόκιο r ποια είναι η παρούσα αξία ενός ποσού €Β την χρονική στιγμή *t;*
- Η παρούσα αξία είναι ίση με

$$\mathrm{B}e^{-rt}$$

- Ο παραπάνω τύπος είναι ανάλογος με τον τύπο της αναγωγής σε παρούσα αξία χωρίς ανατοκισμό:

$$\frac{B}{(1+r)^t}$$

- Έστω μια συνεχής οικονομική μεταβλητή $y(t)$ από την χρονική στιγμή 0 έως την χρονική στιγμή Τ. Ποια είναι η παρούσα αξία αυτής της μεταβλητής για όλο αυτό το διάστημα;
- Η απάντηση δίνεται από τον τύπο

$$PV = \int_0^T y\left(t\right)e^{-rt}dt$$

- Ο παραπάνω τύπος είναι ανάλογος με τον τύπο της αναγωγής σε παρούσα αξία μιας χρηματικής ροής χωρίς ανατοκισμό:

$$PV = \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t}$$

- Γενικότερα, μια μεταβλητή $y(t)$ που μεγεθύνεται συνεχώς με **σταθερό** ετήσιο ρυθμό μεγέθυνσης ίσο με g και η οποία έχει αρχική τιμή $y(0)= y_0$ στην χρονική στιγμή t θα είναι ίση με:

$$y(t)= y_0e^{gt}$$

Όπου

$$g = \frac{\dot{y}}{y} = \hat{y}$$

- Η μορφή αυτή μας επιτρέπει να μελετήσουμε καλύτερα μια χρονική συνάρτηση και μας διευκολύνει στους υπολογισμούς μας
- *Παράδειγμα*: Ερωτάται σε πόσα χρόνια θα διπλασιασθεί το ΑΕΠ (y) μιας οικονομίας αν έχει ένα σταθερό ρυθμό μεγέθυνσης ίσο με g;
- *Απάντηση*: Αν το ΑΕΠ διπλασιάσθηκε σε t έτη από την αρχική περίοδο, θα ισχύει ότι $y(t)= y_0e^{gt} =2y_0$
- Άρα $e^{gt} =2$
- Λογαριθμίζοντας και τα δύο σκέλη προκύπτει ότι

$$\ln\left(e^{gt}\right) = \ln 2 \Rightarrow gt = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{g}$$

- Δεδομένου ότι ln2≈0,693 για ένα ρυθμό μεγέθυνσης 10% η οικονομία θα διπλασιασθεί σε *t* =0,693/0,1 δηλ., σε περίπου 7 έτη.

- Από την συνάρτηση *y*(*z*)=e^z προκύπτει και ένας άλλος τρόπος να μετρηθεί ο ρυθμός μεγέθυνσης
- Παρατηρείστε ότι

$$y(t) = \exp\left(z(t)\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \left(e^z\right)' \frac{dz}{dt} = e^z \frac{dz}{dt} = y \frac{dz}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dt} = g_y$$

- Ή με τον συμβολισμό που υιοθετήσαμε

$$\dot{y} = y'\dot{z} = \left(e^z\right)' \dot{z} = e^z \dot{z} = y\dot{z} \Rightarrow$$

$$\dot{z} = \frac{\dot{y}}{y} = \hat{y}$$

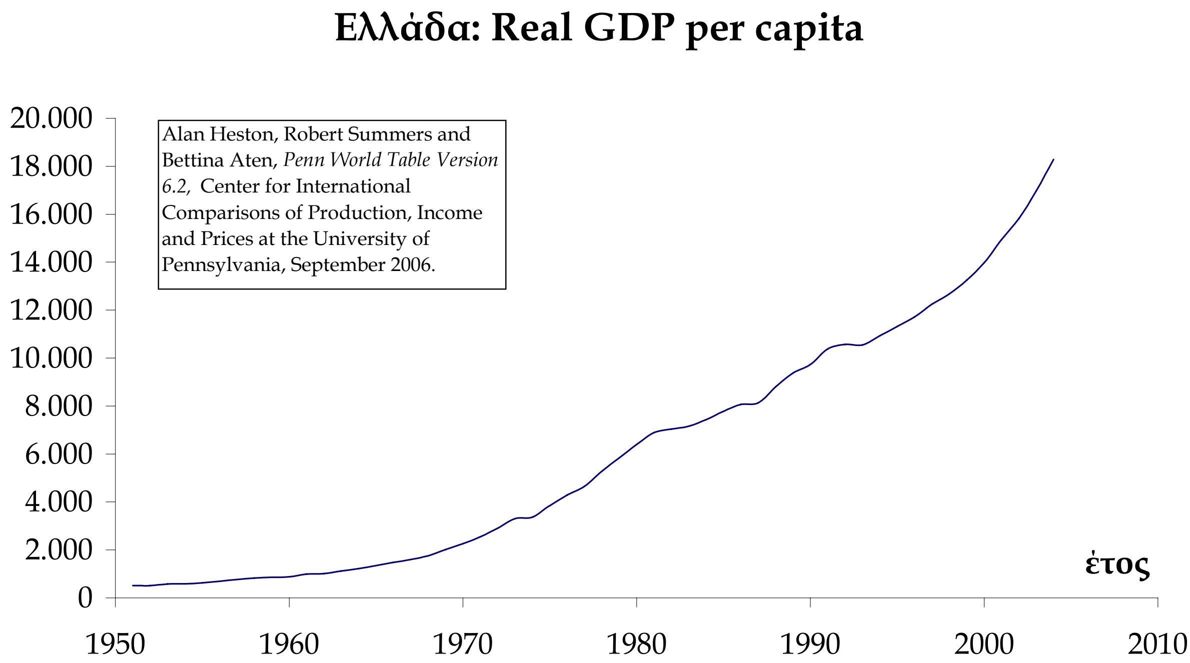
- Εφόσον *z*=ln(*y*) προκύπτει ότι

$$\dot{z} = \frac{d \ln y}{dt} = \frac{\dot{y}}{y} = \hat{y}$$

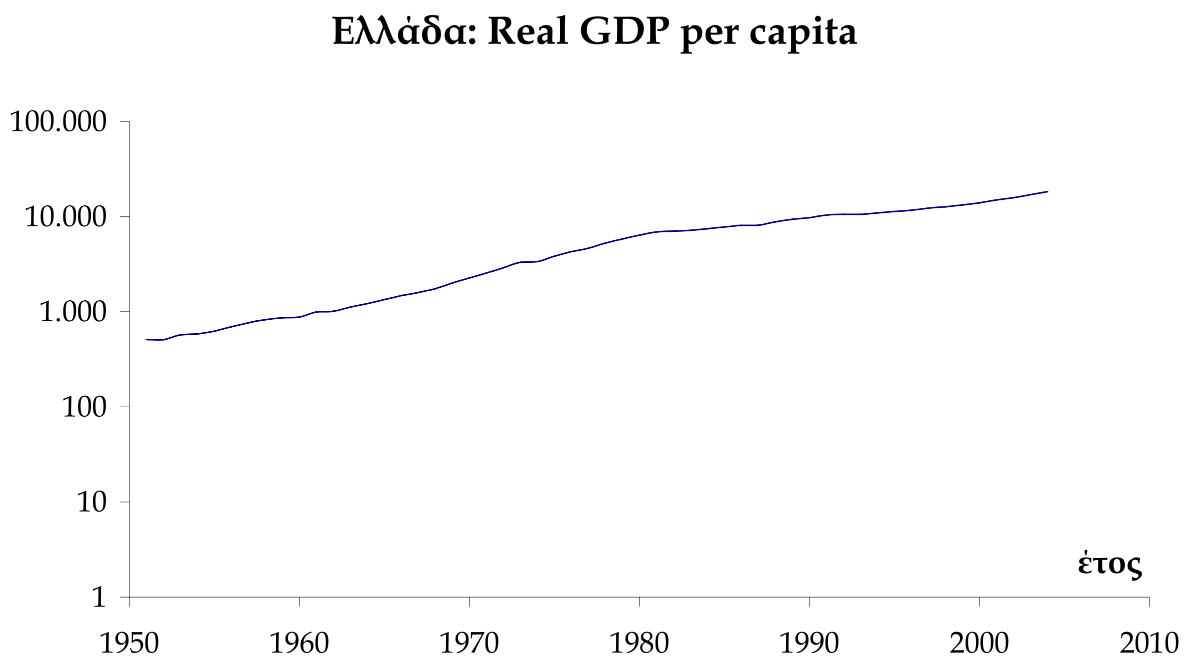
- Δηλ., *η πρώτη παράγωγος του λογαριθμικού μετασχηματισμού της μεταβλητής y μας δίνει τον ρυθμό μεγέθυνσης της*

- Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αντιληφθούμε παρατηρώντας την ***γραφική παράσταση*** του λογαριθμικού μετασχηματισμού μιας μεταβλητής τι συμβαίνει στον ρυθμό μεγέθυνσης

Κανονική μορφή



Λογαριθμικός μετασχηματισμός



Αν ένα μέγεθος μεταβάλλεται με σταθερό εκθετικό ρυθμό η γραφική παράσταση του λογαρίθμου του θα είναι ευθύγραμμα. Στο διάγραμμα όπου εμφανίζεται το κατά κεφαλή ΑΕΠ της Ελλάδας λογαριθμικά στον κάθετο άξονα, είναι εμφανές ότι από την δεκαετία του 1980 η κλίση είναι μικρότερη γεγονός που αντανακλά και τον χαμηλότερο μικρό μεγέθυνσης. Κάτι τέτοιο δεν είναι εύκολα παρατηρήσιμο στην γραφική παράσταση με το κανονικό μέγεθος

Γενικά ισχύει ότι

- Αν $z=xy$, τότε $\ln z=\ln x+\ln y$
- Αν $z=x/y$, τότε $\ln z=\ln x-\ln y$
- Αν $z=x^{\beta}$, τότε $\ln z=\beta\ln x$
- Αν $y=f(x)=\ln x$, τότε $dy/dx=1/x$
- Αν $y=\ln x(t)$, τότε
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{x}\dot{x}=\frac{\dot{x}}{x}=\hat{x}$$

Λογαριθμίζοντας και παραγωγίζοντας ως προς t

- Αν $z=xy$, τότε $\ln z=\ln x+\ln y$, και συνεπώς $d\ln z/dt=d\ln x/dt+d\ln y/dt$ ή $\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}$
- Αν $z=x/y$, τότε $\ln z=\ln x-\ln y$, άρα $\hat{z}=\hat{x}-\hat{y}$
- Αν $z=x^{\beta}$, τότε $\ln z=\beta\ln x$ άρα $\hat{z}=\beta\hat{x}$

- *Παράδειγμα*: Συνάρτηση *Cobb-Douglas*
$$Y(t)=AK(t)^{a}L(t)^{1-a}$$
- Λογαριθμίζοντας έχουμε
$$\ln Y(t)=\ln A+a\ln K(t)+(1-a)\ln L(t)$$
- Στη συνέχεια παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{d\ln Y(t)}{dt}=a\frac{d\ln K(t)}{dt}+(1-a)\frac{d\ln L(t)}{dt}\Rightarrow$$
$$\frac{\dot{Y}}{Y}=a\frac{\dot{K}}{K}+(1-a)\frac{\dot{L}}{L}\Rightarrow\hat{Y}=a\hat{K}+(1-a)\hat{L}$$

Λόγοι (ratios) και ρυθμοί μεγέθυνσης (growth rates)

- Αν ο λόγος z δύο μεταβλητών x και y είναι σταθερός, τότε ο ρυθμός μεγέθυνσης των δύο μεταβλητών είναι ο ίδιος
- Απόδειξη:

$$z = \frac{x}{y} \Rightarrow \hat{z} = \hat{x} - \hat{y}$$

- Αν ο λόγος είναι σταθερός δεν μεταβάλλεται, άρα:

$$\dot{z} = 0 \Rightarrow \frac{\dot{z}}{z} = \hat{z} = 0 = \hat{x} - \hat{y} \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

Παράδειγμα: Αν το κατά κεφαλή ΑΕΠ παραμένει αμετάβλητο, το ΑΕΠ θα πρέπει να μεγεθύνεται με τον ίδιο ρυθμό που μεγεθύνεται και ο πληθυσμός.

Σχέση μεταξύ ποσοστιαίου ρ.μ. και εκθετικής μεγέθυνσης

- Ο ποσοστιαίος ρυθμός μεγέθυνσης ορίζεται ως

$$[y(t+1)-y(t)]/y(t)$$

Στην εκθετική μεγέθυνση έχουμε $y(t+1)=y(t)e^g$

- Άρα

$$\frac{y(t+1)-y(t)}{y(t)} = \frac{e^g y(t)-y(t)}{y(t)} = e^g - 1$$

- Γνωρίζουμε ότι η προσέγγιση κατά Taylor του e^x για μικρά x είναι $e^x \approx x+1$
- Άρα

$$\frac{y(t+1)-y(t)}{y(t)} = e^g - 1 \approx (g+1) - 1 = g$$

ΔΕΥΤΕΡΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
"Stylized facts"

Η παρούσα διάλεξη έχει προκύψει από την διδακτική παρουσίαση με ηλεκτρονικό τρόπο και αποσκοπεί στο να δείξει γραφικά τα τυποποιημένα δεδομένα μεταξύ διαφορετικών χωρών στην μεταπολεμική περίοδο. Με την έννοια αυτή δεν αποτελεί ενοποιημένο κείμενο.

Με τον αγγλικό όρο *stylized facts*, που θα μπορούσε να αποδοθεί ως «τυποποιημένα δεδομένα», εννοούμε απλουστευμένες παρουσιάσεις εμπειρικών ευρημάτων που έχουν επιβεβαιωθεί τόσο συχνά ώστε να μπορεί να θεωρηθούν ως προφανείς εμπειρικές αλήθειες. Ο όρος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1958 από τον Ούγγρο οικονομολόγο Nicholas Kaldor, καθηγητή στο πανεπιστήμιο του Cambridge. Οι θεωρίες και τα υποδείγματα της οικονομικής μεγέθυνσης θα πρέπει να μπορούν να εξηγήσουν αυτά τα θεωρούμενα ως αληθή εμπειρικά ευρήματα.

.

Nicholas Kaldor, 1908-1986

Ποια είναι λοιπόν τα stylized facts στην οικονομική μεγέθυνση;

SF#1 Υπάρχει τεράστια διαφορά στο κατά κεφαλήν εισόδημα στις διάφορες εθνικές οικονομίες.

SF#2 Οι ρυθμοί οικονομικής μεγέθυνσης διαφέρουν σημαντικά μεταξύ των χωρών.

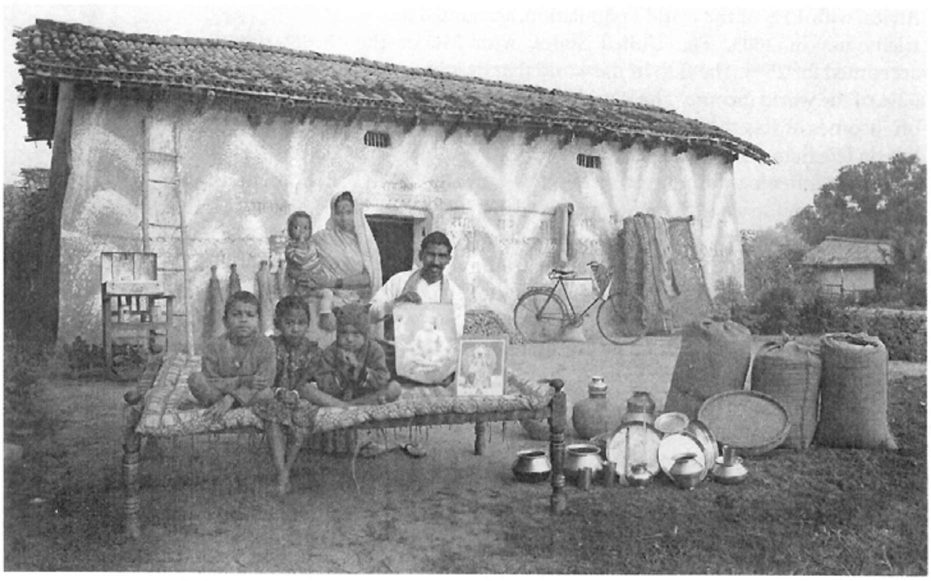
SF#3 Οι ρυθμοί οικονομικής μεγέθυνσης γενικά δεν είναι σταθεροί στον χρόνο.

SF#4 Η σχετική θέση μιας χώρας στην παγκόσμια κατανομή των κατά κεφαλήν εισοδημάτων δεν είναι σταθερή.

SF#5 Στις ΗΠΑ τον τελευταίο αιώνα:

1. Η πραγματική απόδοση του κεφαλαίου δεν έχει ανοδική ή πτωτική τάση
2. Τα σχετικά εισοδήματα εργασίας και κεφαλαίου παραμένουν σταθερά
3. Ο μέσος ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν προϊόντος υπήρξε θετικός και σχετικά σταθερός

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν περιγράφοντας τα τυποποιημένα δεδομένα. Το πρώτο τ.δ. (SF#1) είναι ότι *υπάρχει τεράστια διαφορά στο κατά κεφαλήν εισόδημα στις διάφορες εθνικές οικονομίες*. Στις επόμενες δύο εικόνες παρουσιάζονται δύο «τυπικά νοικοκυριά» με όλα τα υπάρχοντά τους. Το πρώτο είναι ινδικό και το δεύτερο αγγλικό. Η διαφορά στο επίπεδο των υλικών αγαθών είναι εμφανής. *Πηγή*: David N. Weil: *Economic Growth*, Addison-Wesley, 2005.

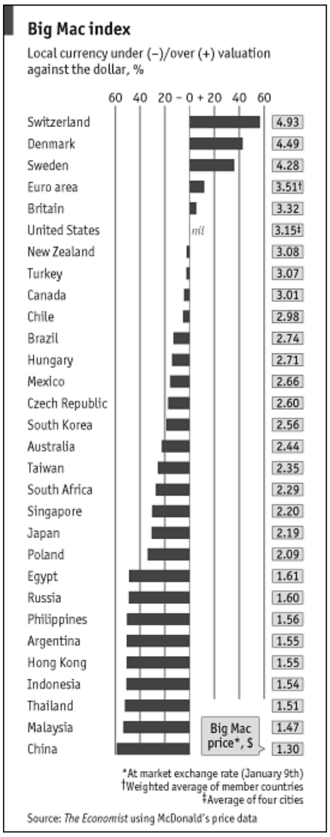


A typical Indian family with their possessions.

A typical English family with their possessions.

Η σύγκριση μεταξύ του ΑΕΠ των διαφόρων εθνικών οικονομιών γίνεται με βάση την θεωρία της *ισοτιμίας της αγοραστικής δύναμης* (purchasing-power parity). Μετράμε δηλ., όχι το ΑΕΠ σε δολάρια ή ευρώ κάνοντας την μετατροπή από το εθνικό νόμισμα με την τρέχουσα (ή άλλη) ισοτιμία αλλά σε όρους αγοραστικής δύναμης σε δολάρια ΗΠΑ. Παρόλο που δεν θα την αναπτύξουμε εδώ, η βασική ιδέα της θεωρίας είναι ότι δεν μπορεί οι συγκρίσεις μεταξύ χωρών να βασίζονται στην και να μεταβάλλονται με την ισοτιμία των εθνικών νομισμάτων. Επίσης οι τιμές των διαφορετικών αγαθών και υπηρεσιών διαφέρουν ως προς το ύψος τους για αγαθά και υπηρεσίες που δεν υπόκεινται στην εξίσωση του διεθνούς εμπορίου. Έτσι, ενώ μια τηλεοπτική συσκευή κοστίζει το ίδιο στις περισσότερες χώρες, ένα κούρεμα κοστίζει διαφορετικά στην Ινδία και στις ΗΠΑ. Έτσι οι νομισματικές ισοτιμίες πρέπει να προσαρμοσθούν με τρόπο ώστε ένα «καλάθι» από αγαθά και υπηρεσίες να έχει το ίδιο κόστος σε όποια χώρα και αν αγορασθεί. Οι Διεθνείς Πίνακες από το Κέντρο Διεθνών Συγκρίσεων του Πανεπιστημίου της Πενσυλβανίας στις ΗΠΑ (http://pwt.econ.upenn.edu/) είναι από τις πλέον χρησιμοποιούμενες βάσεις δεδομένων για διεθνείς οικονομικές συγκρίσεις.

Μία κωμική αλλά ενδιαφέρουσα εφαρμογή της αρχής της ισοτιμίας της αγοραστικής δύναμης είναι το *Economist's Big Mac index* που συντάσσει το περιοδικό *The Economist* και δείχνει πόσο κοστίζει ένα χάμπουργκερ *Big Mac* στις διαφορετικές πόλεις του κόσμου. *Πηγή*: *The Economist,* 12/1/2006

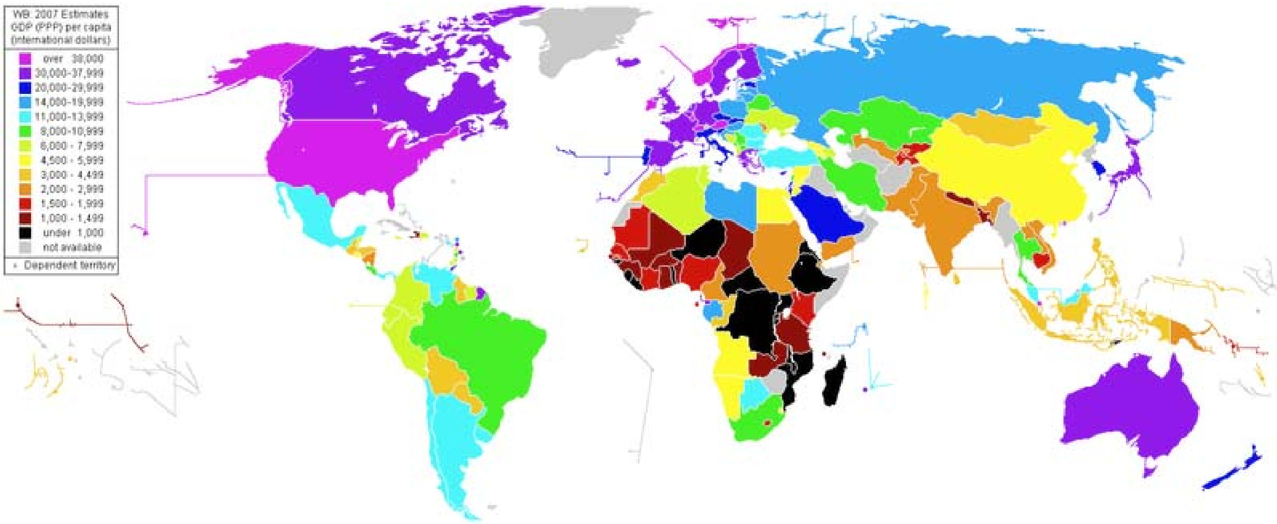


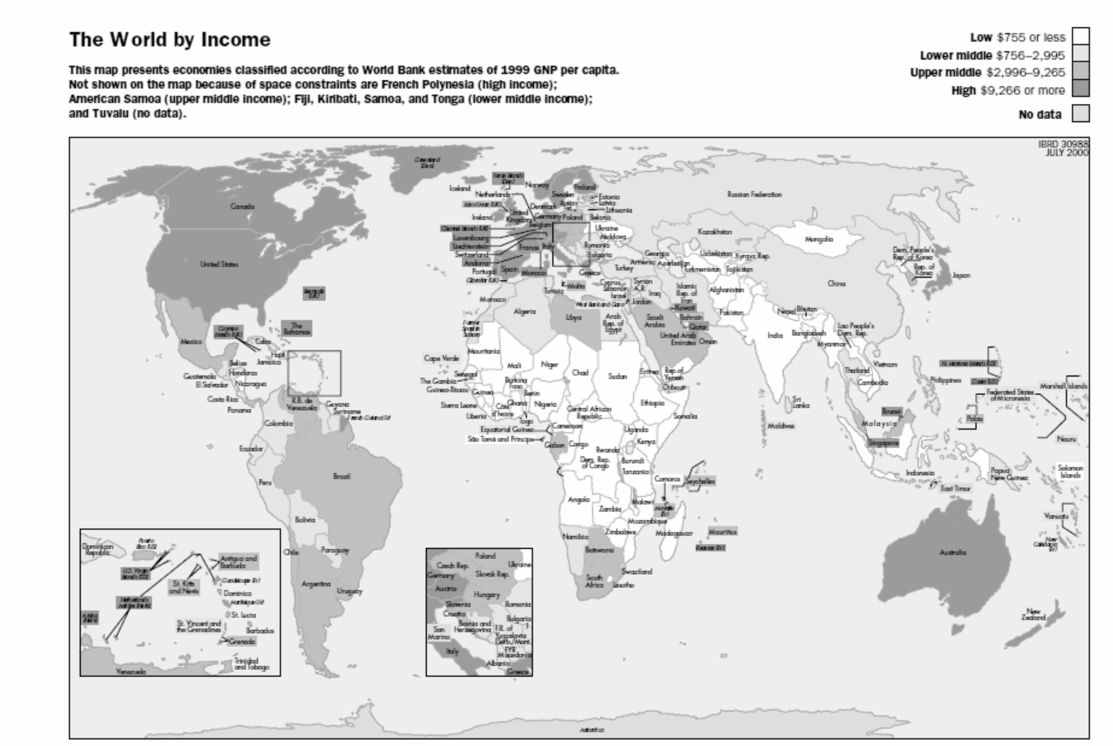
Επίσης συχνά μετράμε το ΑΕΠ ανά εργάτη και όχι κατά κεφαλή. Οι λόγοι για αυτό είναι κυρίως ότι:

- Το κατά κεφαλή ΑΕΠ αναφέρεται στην ευημερία ενώ ανά εργάτη στην παραγωγικότητα
- Άτομα που δεν αναφέρονται ως εργαζόμενοι μπορεί να εργάζονται στην οικιακή οικονομία ή στην παραοικονομία

Ας σημειωθεί πάντως ότι το ΑΕΠ κατά κεφαλή αποτελεί μόνο ένα δείκτη ευημερίας (π.χ., παιδική θνησιμότητα, ή το προσδόκιμο αποτελούν άλλα μέτρα ευημερίας)

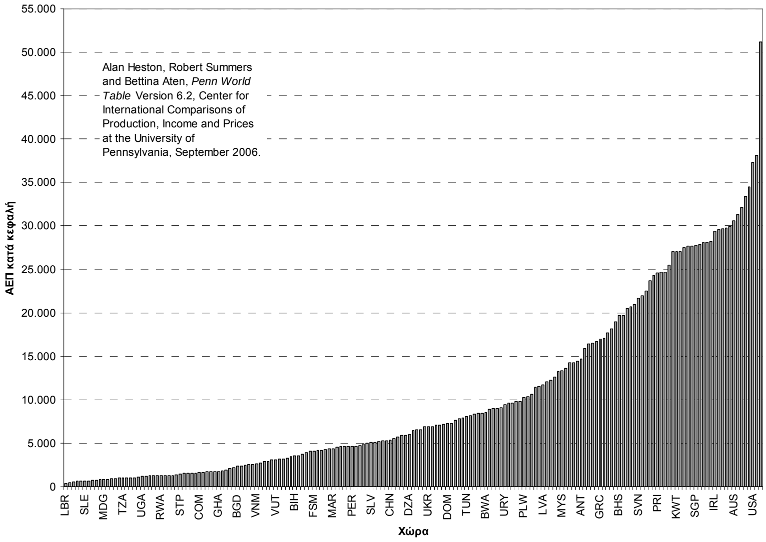
Οι παρακάτω χάρτες δείχνουν την διαφορά σε ΑΕΠ κατά κεφαλή με βάση την αγοραστική δύναμη. *Πηγή*: Διεθνής Τράπεζα.





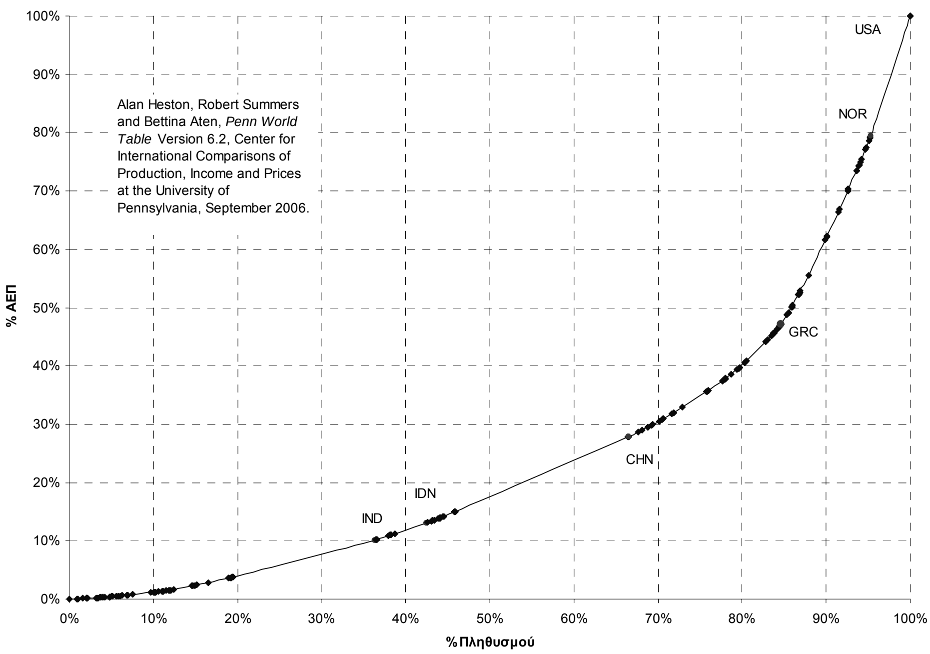
Ένας άλλος τρόπος να αντιληφθούμε τις διαφορές του ΑΕΠ κατά κεφαλή είναι να δούμε γραφικά το ΑΕΠ κατά κεφαλή κατατάσσοντας τις χώρες κατά αύξον ΑΕΠ κ.κ. *Πηγή*: Heston *et al.*, Penn World Tables (2006) και επεξεργασία ΝΘ.

ΑΕΠ κατά κεφαλή 2003

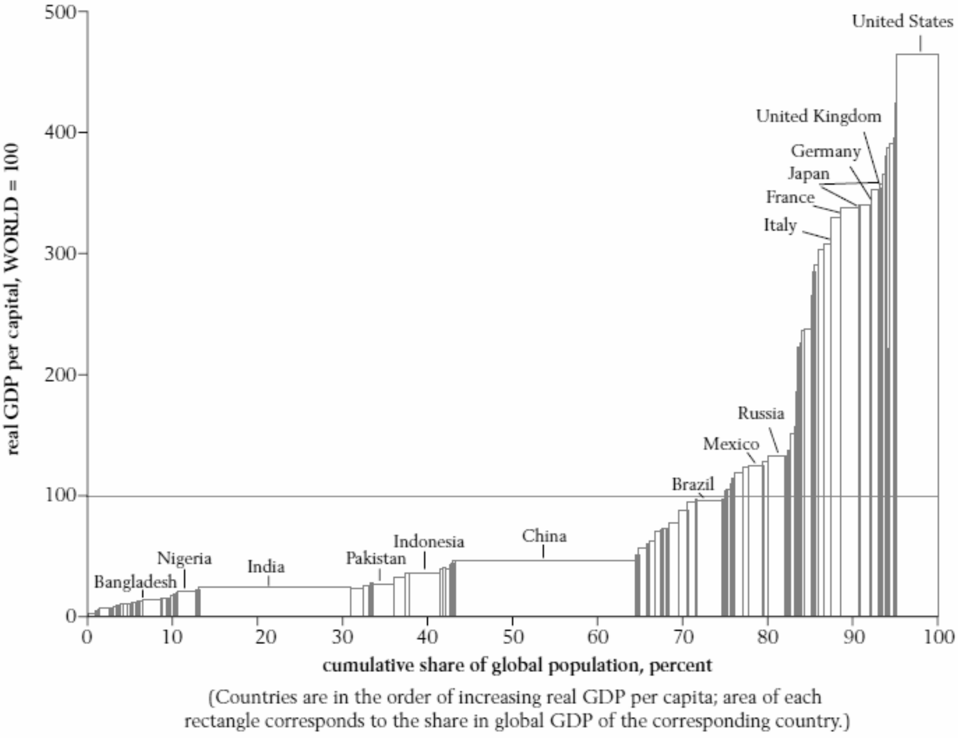


Τα ίδια στοιχεία γίνονται ακόμα πιο παραστατικά αν τα επεξεργασθούμε υπολογίζοντας τον πληθυσμό κάθε χώρας και τα βάλουμε σε μια καμπύλη Lorenz που αποτελεί και ένα τρόπο μέτρησης της ανισότητας. Έτσι μπορούμε να δούμε τι ποσοστό του παγκόσμιου εισοδήματος έχει τι ποσοστό του παγκόσμιου πληθυσμού. Φαίνεται, π.χ., ότι τα 2/3 του πληθυσμού έχουν πολύ λιγότερο από το 1/3 του παγκόσμιου ΑΕΠ, ενώ το 47% του πληθυσμού έχει λιγότερο από το 17% του παγκόσμιου ΑΕΠ.

Καμπύλη Lorenz 2003



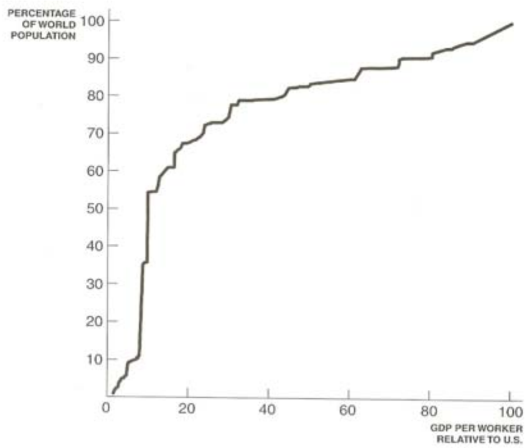
Πιο παραστατικά το επόμενο γράφημα δείχνει το ΑΕΠ κ.κ. σε σχετικούς όρους (με το παγκόσμιο ΑΕΠ κ.κ.=100) και το σωρευτικό ποσοστό του παγκόσμιου πληθυσμού που απολαμβάνει το συγκεκριμένο ΑΕΠ. Φαίνεται ότι τα ¾ του πληθυσμού έχουν μικρότερο ΑΕΠ κ.κ. από τον μέσο όρο). *Πηγή*: IBRD/World Bank, *2005 International Comparison Program*, 2008.



Source: 2005 ICP.

Note: The economies with the highest GDP per capita, Luxembourg, Qatar, Norway, Brunei Darussalam, and Kuwait, are not shown in this figure because together they account for less than 1 percent of the world economy in total; and the United States is the sixth largest.

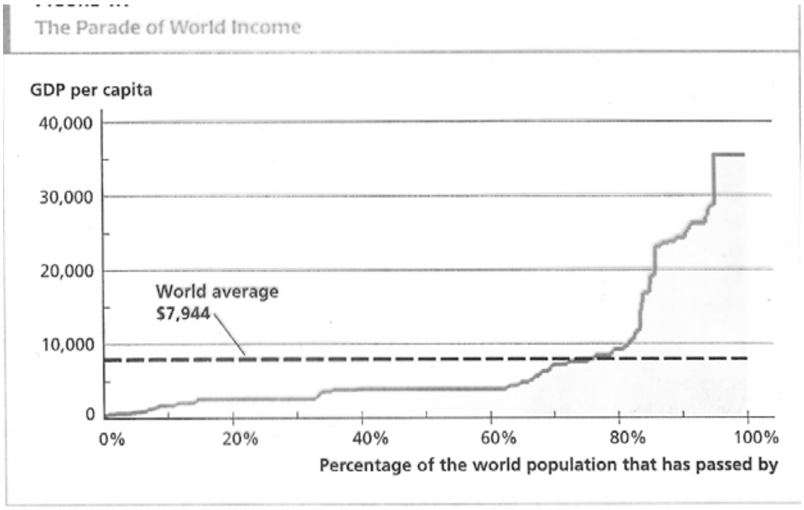
Ο επόμενος πίνακας δείχνει σωρευτικά το ποσοστό του πληθυσμού της γης σε σχέση με το ΑΕΠ των ΗΠΑ ανά εργαζόμενο. Παρατηρείστε ότι το 60% του πληθυσμού έχει λιγότερο από το 20% του ΑΕΠ των ΗΠΑ ανά εργαζόμενο. *Πηγή*: Charles I Jones, *Introduction to Economic Growth*, 2η εκδ., W.W. Norton, 2002



SOURCE: Penn World Tables Mark 5.6, Summers and Heston (1991), updated using Easterly and Yu (2000).

Note: A point (x, y) in the figure indicates that the fraction of the world's population living in countries with a relative GDP per worker less than x is equal to y. 136 countries are included.

Μια άλλη παρουσίαση της ανισότητας είναι μέσω της «παρέλασης», μιας ιδέας του Jan Pen από το 1971. Οι κάτοικοι του πλανήτη παρελαύνουν κατά «ύψος» του ΑΕΠ κ.κ., οι πιο «κοντοί» πρώτοι. Είναι όπως το προ-προηγούμενο διάγραμμα με πραγματικά όμως στοιχεία. *Πηγή*: David N. Weil: *Economic Growth*, Addison-Wesley,2005.



Source: Heston, Summers, and Aten (2002).

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει διάφορες χώρες και δίπλα τον πληθυσμού τους και την σχέση του ΑΕΠ ανά εργαζόμενο σε σχέση με αυτό των ΗΠΑ, το 1960 και το 2000. Πηγή: Durlauf *et al.*, “Growth Econometrics”, 2005.

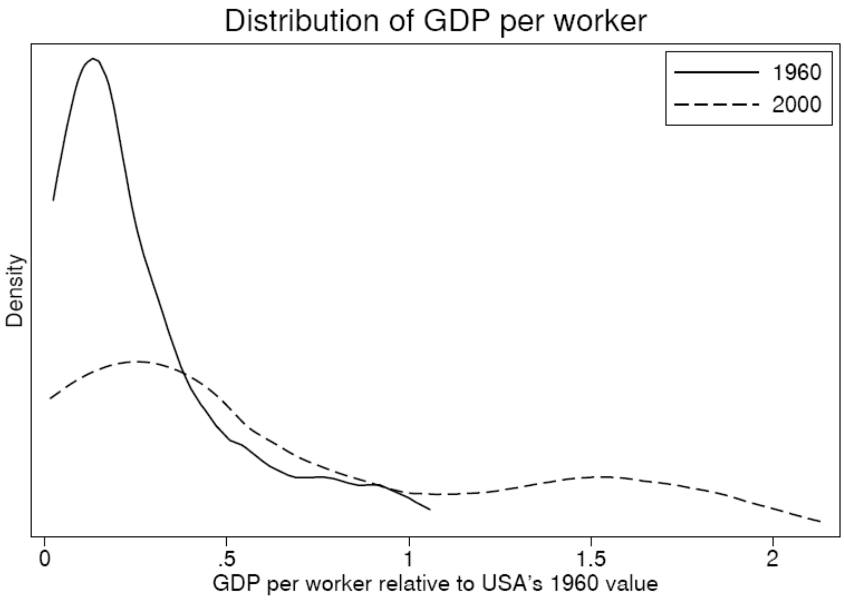
Table 1: International Disparities in GDP per Worker

Country	Population(m, 2000)	R1960	R2000
USA	275	1	1
United Kingdom	60	.69	.69
Argentina	37	.62	.40
France	60	.60	.76
Italy	58	.55	.84
South Africa	43	.47	.34
Mexico	97	.44	.38
Spain	40	.40	.68
Iran	64	.30	.30
Colombia	42	.27	.18
Japan	127	.25	.60
Brazil	170	.24	.30
Turkey	67	.17	.24
Philippines	76	.17	.13
Egypt	64	.17	.21
Korea, Republic of	47	.15	.57
Bangladesh	131	.10	.10
Nigeria	127	.08	.02
Indonesia	210	.08	.14
Thailand	61	.07	.20
Pakistan	138	.07	.11
India	1016	.06	.10
China	1259	.04	.10
Ethiopia	64	.04	.02
Mean		.29	.35
Median		.21	.27

Notes:
- R is GDP per worker as a fraction of that in the USA.

Το παρακάτω διάγραμμα κάνει ότι και ο προηγούμενος πίνακας για όλες τις χώρες και δείχνει την κατανομή του ΑΕΠ ανά εργαζόμενο σε σχέση με το ΑΕΠ ανά εργαζόμενο των ΗΠΑ το 1960. Παρατηρείστε ότι ακόμα και το 2000 οι περισσότερες χώρες (διακεκομμένη γραμμή) είναι σε χειρότερη μοίρα από ό,τι οι ΗΠΑ το 1960. (Ίδια πηγή).

Figure 1: Cross-Country Density of Output per Worker

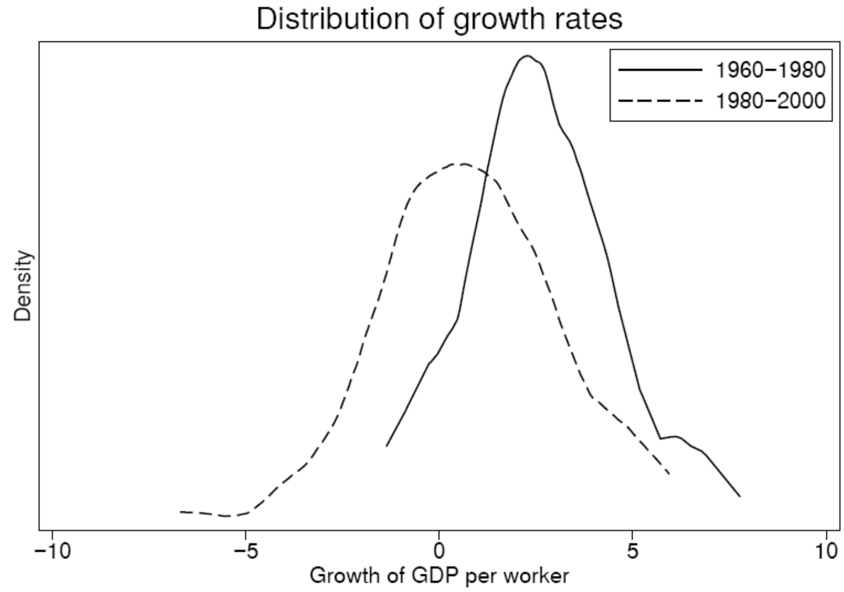


Ας δούμε τώρα το δεύτερο τυποποιημένο δεδομένο δηλ., ότι

SF#2 Οι ρυθμοί οικονομικής μεγέθυνσης διαφέρουν σημαντικά μεταξύ των χωρών.

Το επόμενο διάγραμμα (ίδια πηγή) δείχνει την κατανομή των μέσων ρυθμών μεγέθυνσης των εθνικών οικονομιών σε δύο εικοσαετίες: 1960-80 και 1980-2000. Παρατηρείστε πόσο διαφέρουν μεταξύ τους και ότι οι ρυθμοί μεγέθυνσης ήταν πολύ καλύτεροι την πρώτη εικοσαετία από την δεύτερη. Παρατηρείστε επίσης πόσες οικονομίες είχαν αρνητικό ρυθμό μεγέθυνσης την δεύτερη εικοσαετία.

Figure 6: Density of Growth Rates across Countries



Το επόμενο διάγραμμα (από το βιβλίο του Charles Jones, ο,π.) δείχνει το ΑΕΠ κατά κεφαλή και ανά εργαζόμενο το ποσοστό συμμετοχής στο εργατικό δυναμικό (με το οποίο γίνεται η μετατροπή μεταξύ των δύο προηγουμένων μεγεθών (πως;)), τον μέσο ρυθμό μεγέθυνσης από το 1960 έως το 1997 και τα χρόνια που θα χρειασθεί κάθε οικονομία να διπλασιάσει το σχετικό μέγεθος της. (Θυμηθείτε πως το υπολογίζουμε από την προηγούμενη διάλεξη). Ο Jones χωρίζει τις χώρες σε «πλούσιες», «φτωχές», «οικονομικά θαύματα» και «οικονομικές καταστροφές».

	GDP per capita, 1997	GDP per worker, 1997	Labor force participation rate, 1997	Average annual growth rate, 1960–97	Years to double
"Rich" countries					
U.S.A.	$20,049	$40,834	0.49	1.4	50
Japan	16,003	25,264	0.63	4.4	16
France	14,650	31,986	0.46	2.3	30
U.K.	14,472	29,295	0.49	1.9	37
Spain	10,685	29,396	0.36	3.5	20
"Poor" countries					
China	2,387	3,946	0.60	3.5	20
India	1,624	4,156	0.39	2.3	30
Zimbabwe	1,242	2,561	0.49	0.4	192
Uganda	697	1,437	0.49	0.5	146
"Growth miracles"					
Hong Kong	18,811	28,918	0.65	5.2	13
Singapore	17,559	36,541	0.48	5.4	13
Taiwan	11,729	26,779	0.44	5.6	12
South Korea	10,131	24,325	0.42	5.9	12
"Growth disasters"					
Venezuela	6,760	19,455	0.35	−0.1	−517
Madagascar	577	1,334	0.43	−1.5	−46
Mali	535	1,115	0.48	−0.8	−85
Chad	392	1,128	0.35	−1.4	−48

SOURCE: Author's calculations using Penn World Tables Mark 5.6, an update of Summers and Heston (1991), and the World Bank's Global Development Network Growth Database, assembled by William Easterly and Hairong Yu.

Notes: The GDP data are in 1985 dollars. The growth rate is the average annual change in the log of GDP per worker. A negative number in the "Years to double" column indicates "years to halve."

Ο επόμενος πίνακας αποτελεί επεξεργασία δική μου από το Penn World Table 6.2 και δείχνει ΑΕΠ κ.κ. (2003), μέσο ρυθμό μεγέθυνσης 1960-2003 και πληθυσμό.

Χώρα	**ΑΕΠ / κεφαλή**	**Μέσος ρ.μ. 1960-2003**	**Πληθυσμός (χιλ.)**
Λουξεμβούργο	49.262	3,16%	453
ΗΠΑ	34.875	2,34%	292.617
Νορβηγία	34.011	3,02%	4.575
Χονγκ-Κονγκ	27.658	5,05%	7.394
Σιγκαπούρη	26.999	4,41%	4.609
Αγγλία	26.046	2,18%	59.282
Γαλλία	25.664	2,59%	60.008
Ισπανία	20.644	3,41%	42.144
Ν. Κορέα	17.597	5,96%	47.463
Ελλάδα	15.785	3,14%	11.075
Βενεζουέλα	6.253	0,06%	24.655
Τουρκία	5.633	2,16%	71.252
Κίνα	4.970	5,75%	1.286.975
Ινδία	2.990	2,85%	1.049.700
Ζιμπάμπουε	2.439	0,14%	12.577
Μαλί	1.184	0,93%	11.626
Τσαντ	884	-0,59%	9.253
Μαδαγασκάρη	759	-1,19%	16.980

Οι επόμενοι τρεις πίνακες από τους Durlauf *et al.*, δείχνουν τρία σενάρια:

(1) 15 «οικονομικά θαύματα» (1960-200),

(2) 15 «οικονομικές καταστροφές» (1960-200) και

(3) «καταρρεύσεις του ΑΕΠ κ.κ.» μέσα σε τρία χρόνια. Στο Τσαντ μάλιστα το 1980-3 το ΑΕΠ κ.κ. έπεσε στο μισό!

Table 2: Fifteen Growth Miracles, 1960-2000

Country	Growth 1960-2000	Factor increase
Taiwan	6.25	11.3
Botswana	6.07	10.6
Hong Kong	5.67	9.09
Korea, Republic of	5.41	8.24
Singapore	5.09	7.29
Thailand	4.50	5.83
Cyprus	4.30	5.39
Japan	4.13	5.04
Ireland	4.10	5.00
China	3.99	4.77
Romania	3.91	4.63
Mauritius	3.88	4.58
Malaysia	3.82	4.48
Portugal	3.48	3.93
Indonesia	3.34	3.72

Table 3: Fifteen Growth Disasters, 1960-2000

Country	Growth 1960-2000	Ratio
Peru	0.00	1.00
Mauritania	-0.11	0.96
Senegal	-0.26	0.90
Chad	-0.43	0.84
Mozambique	-0.50	0.82
Madagascar	-0.60	0.79
Zambia	-0.61	0.78
Mali	-0.77	0.74
Venezuela	-0.88	0.70
Niger	-1.03	0.66
Nigeria	-1.21	0.62
Nicaragua	-1.30	0.59
Central African Republic	-1.56	0.53
Angola	-2.04	0.44
Congo, Democratic Rep.	-4.00	0.20

Table 8: Output Collapses

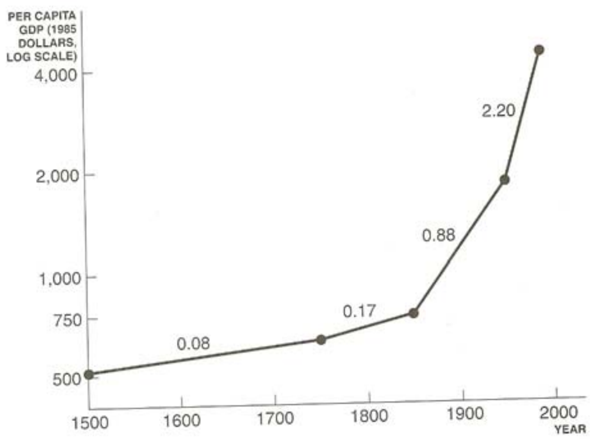
Country	Largest 3-year drop	Dates
Chad	50%	1980-83
Rwanda	47%	1991-94
Angola	46%	1973-76
Romania	37%	1977-80
Dem. Rep. Congo	36%	1992-95
Mauritania	34%	1985-88
Tanzania	34%	1987-90
Mali	34%	1985-88
Cameroon	33%	1987-90
Nigeria	32%	1997-00

This table shows the ten countries with the largest output collapses over a three-year period, using data on GDP per worker between 1960 and the latest available year.

Ας δούμε τώρα το τρίτο τυποποιημένο δεδομένο:

SF#3. Οι ρυθμοί οικονομικής μεγέθυνσης γενικά δεν είναι σταθεροί στον χρόνο

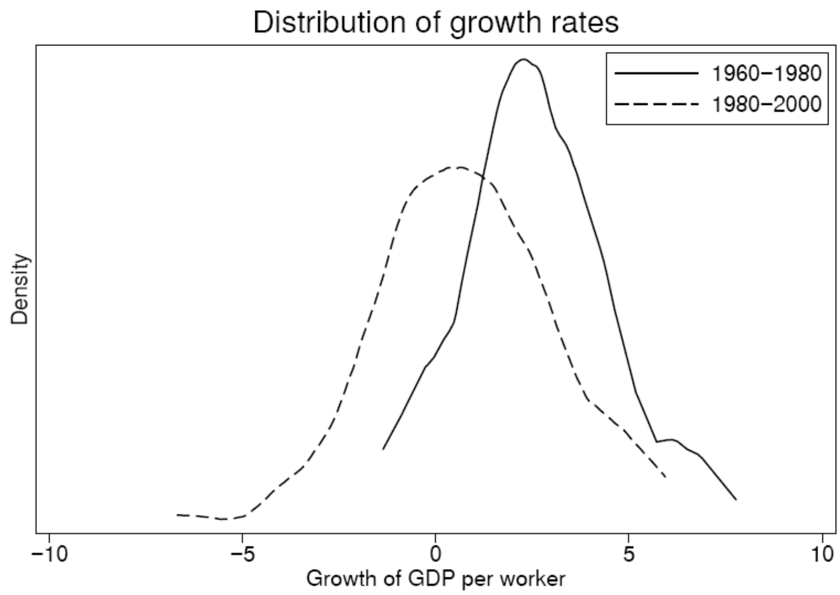
Στο σύνολο της παγκόσμιας οικονομίας οι ρυθμοί μεγέθυνσης ήταν σχεδόν μηδενικοί για το μεγαλύτερο μέρος στην ιστορία αλλά αυξήθηκαν δραματικά στον 20ο αιώνα. Το παρακάτω διάγραμμα από τον Jones που επεξεργάζεται στοιχεία κυρίως από τον Angus Maddison, δείχνει το πώς εξελίχθηκε η παγκόσμια οικονομία σε ρυθμούς μεγέθυνσης από το 1500 και μετά. Στον κάθετο άξονα είναι ΑΕΠ κ.κ. σε δολάρια ΗΠΑ 1985 σε *λογαριθμική μορφή*. Παρατηρείστε ότι παρόλο που είμαστε σε λογαριθμικό μετασχηματισμό η καμπύλη έχει εκθετική μορφή και ότι στο μεγαλύτερο μέρος της η ανθρωπότητα είχε ρυθμούς μεγέθυνσης πολύ κάτω του 1%. Φυσικά τα στοιχεία αυτά πρέπει να αντιμετωπίζονται με εξαιρετική επιφύλαξη.



SOURCE: Computed from Lucas (1998) and Maddison (1995).
Note: The numbers above each line segment are average annual growth rates.

Στις επιμέρους χώρες οι ρυθμοί μεγέθυνσης επίσης μεταβάλλονται στον χρόνο. Ξαναδείχνουμε ένα προηγούμενο διάγραμμα από τους Durlauf *et al.* όπου φαίνεται ότι οι ρυθμοί μεγέθυνσης ήταν πολύ μεγαλύτεροι την εικοσαετία 1960-80 από την εικοσαετία 1980-2000.

Figure 6: Density of Growth Rates across Countries



Τα επόμενα διαγράμματα από τους Durlauf *et al.* δείχνουν τα περί σύγκλισης. Σύμφωνα με τη λογική της σύγκλισης (convergence) θα έπρεπε όσο πιο χαμηλά ξεκινάς τόσο πιο γρήγορα να μεγεθύνεσαι ώστε να φτάσεις τους πιο ανεπτυγμένους. Τα διαγράμματα δείχνουν ως σημεία τις διεθνείς βραχυγραφίες των χωρών (π.χ., GRC για την Ελλάδα) και συγκρίνουν στον κάθετο άξονα το σχετικό ΑΕΠ ανά εργαζόμενο σε σχέση με τις ΗΠΑ (1960 στα δύο πρώτα διαγράμματα και 1980 στο τρίτο) και τον μέσο ρυθμό μεγέθυνσης στον κάθετο άξονα. Τα διαγράμματα αφορούν την τεσσαρακονταετία 1960-200 και τις εικοσαετίες 1960-80 και 1980-2000. Αν ίσχυε η σύγκλιση θα έπρεπε τα σημεία να βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση.

Figure 3: Growth Versus Initial Income: 1960-2000

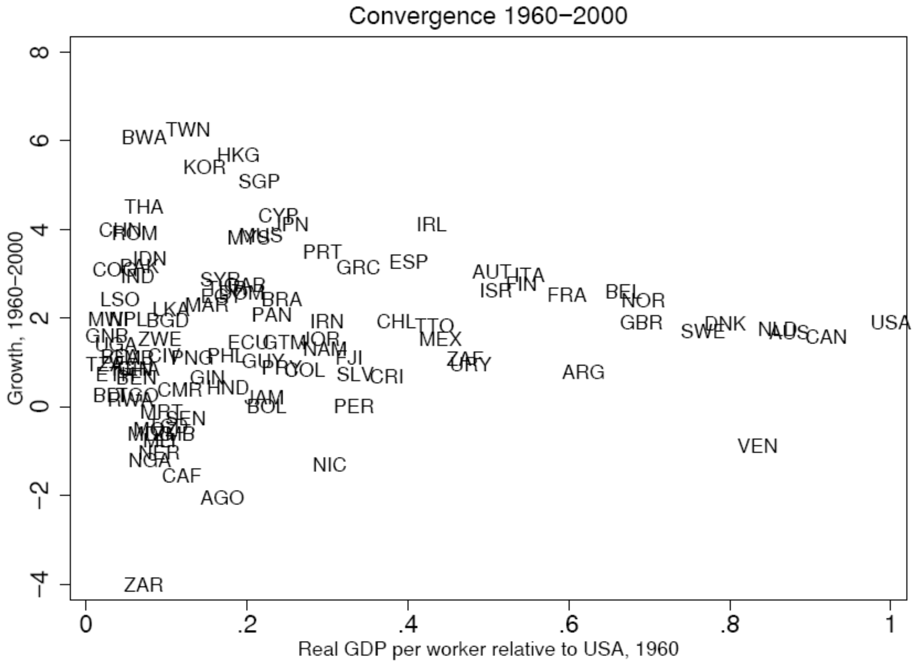


Figure 4: Growth Versus Initial Income 1960-1980

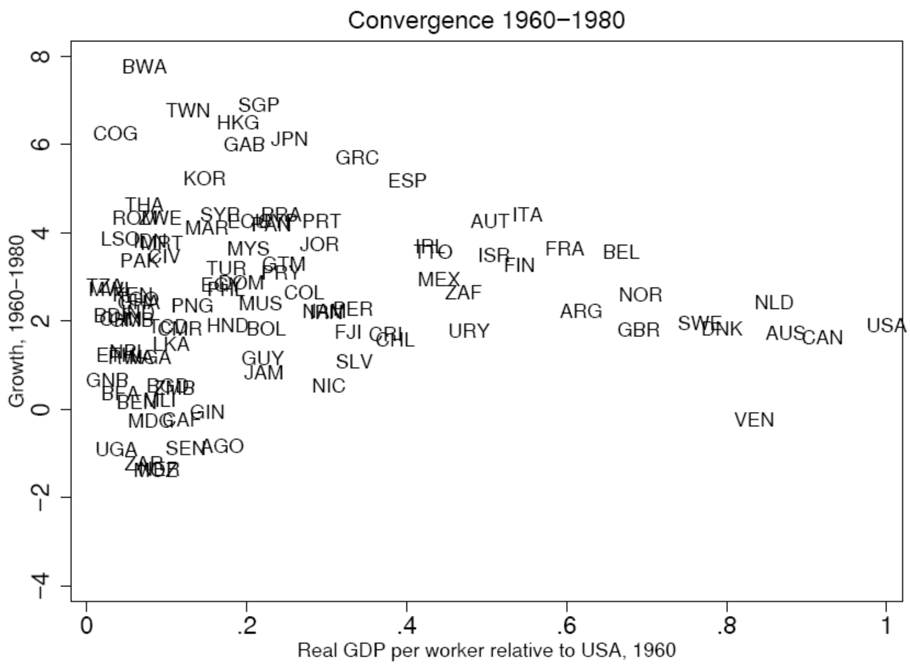
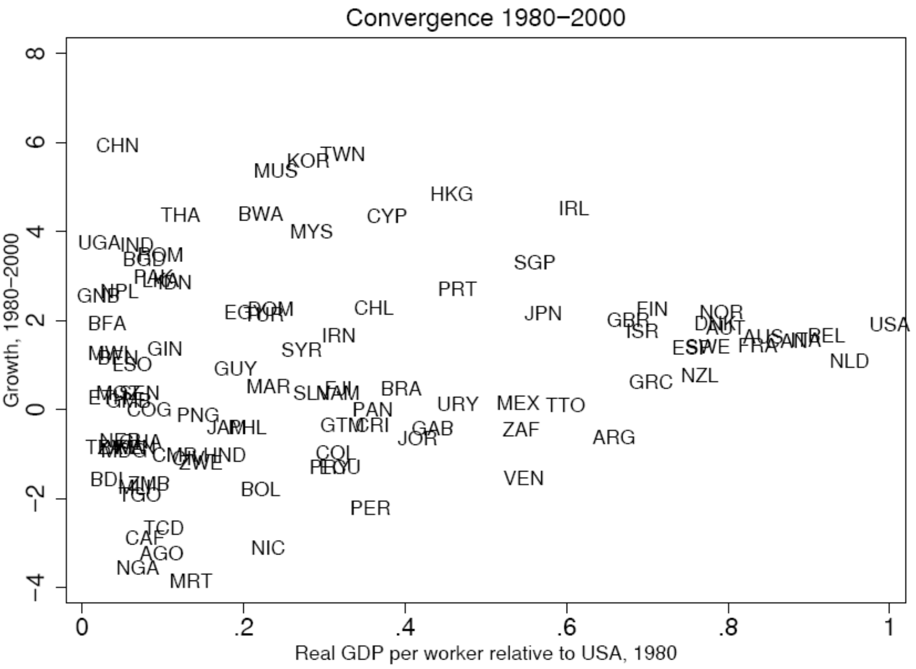
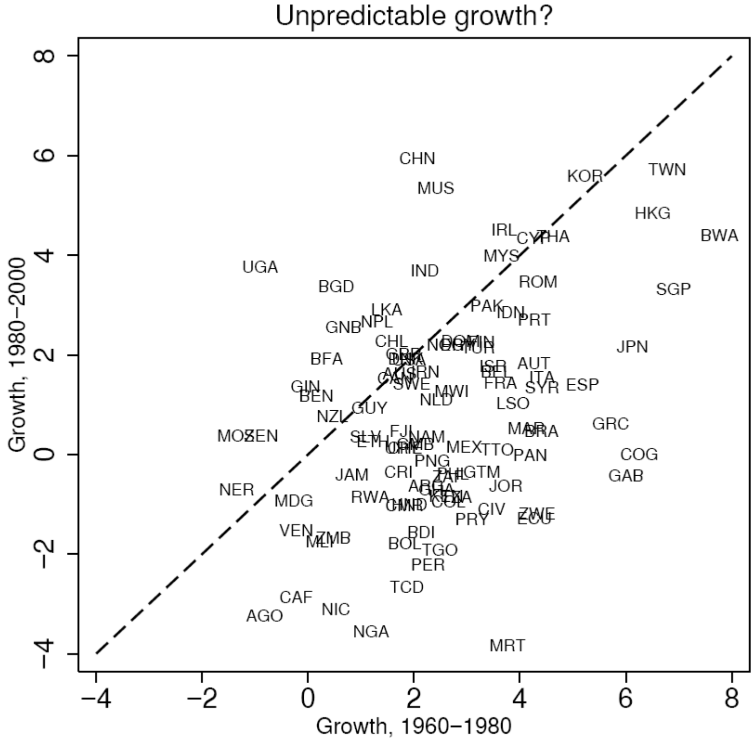


Figure 5: Growth Versus Initial Income: 1980-2000



Στην πραγματικότητα, και όπως προκύπτει από το SF#3 οι ρυθμοί μεγέθυνσης διαφέρουν στον χρόνο. Αν υπήρχε σχέση μεταξύ των ρυθμών μεγέθυνσης στον χρόνο θα έπρεπε στο επόμενο διάγραμμα (πάλι από τους Durlauf *et al.*) να έχουμε όλα τα σημεία πάνω στην ευθεία των 45 μοιρών. Το διάγραμμα δείχνει στον οριζόντιο άξονα τον μέσο ρυθμό μεγέθυνσης το 1960-80 και στον κάθετο τον μέσο ρυθμό μεγέθυνσης το 1980-2000. Παρατηρείστε όμως ότι τα σημεία βρίσκονται σε ένα σύννεφο και όχι πάνω στην ευθεία.

Figure 7: Growth Rates in 1960-1980 versus 1980-2000



Οι επόμενοι πίνακες από την ίδια πηγή συσχετίζουν ρυθμούς μεγέθυνσης διαφόρων χώρων μεταξύ εικοσαετιών και δείχνουν ο πρώτος που βρίσκονται οι διάφορες χώρες στα κελιά ενός πίνακα που έχει ρυθμούς μεγέθυνσης στις δύο εικοσαετίες και ο δεύτερος συντελεστές συσχέτισης μεταξύ ρυθμών μεγέθυνσης στις τέσσερις δεκαετίες από το 1960 έως το 2000 για ολόκληρο το δείγμα και την λέσχη των πλουσίων. Παρατηρείστε ότι για όλο το δείγμα ο συντελεστής συσχέτισης είναι εξαιρετικά χαμηλός.

Table 4: Growth in 1960-1980 and 1980-2000

	G2≤0	0<G2≤1.5	1.5<G2≤3	G2>3
G1<=0	Angola, Central African Republic, DR Congo, Madagascar, Niger, Venezuela	Guinea, Mozambique, Senegal		Uganda
0<G1≤1.5	Jamaica, Mali, Nicaragua, Nigeria, Rwanda, Zambia	Benin, El Salvador, Ethiopia, Guyana, New Zealand	Burkina Faso, Guinea-Bissau, Nepal, Sri Lanka	Bangladesh
1.5<G1≤3	Argentina, Bolivia, Burundi, Cameroon, Chad, Colombia, Costa Rica, Ghana, Honduras, Kenya, Papua New Guinea, Peru, Philippines, South Africa, Tanzania, Togo	Fiji, Gambia, Malawi, Mexico, Namibia, Netherlands, Sweden, Switzerland, Uruguay	Australia, Canada, Denmark, Chile, Dominican Rep., Egypt, Iran, Norway, UK, USA	China, India, Mauritius
G1>3	Ecuador, Gabon, Guatemala, Ivory Coast, Jordan, Mauritania, Panama, Paraguay, Zimbabwe	Brazil, Rep. Congo, France, Greece, Lesotho, Morocco, Spain, Syria, Trinidad and Tobago	Austria, Belgium, Finland, Indonesia, Israel, Italy, Japan, Pakistan, Portugal, Turkey	Botswana, Cyprus, Hong Kong, Ireland, Korea, Malaysia, Romania, Singapore, Taiwan, Thailand

Notes:
- The above table classifies countries according to their annual growth rates over 1960-80 (G1) and over 1980-2000 (G2).

Table 5: Growth Rate Correlations Across Decades

	1960-1970	1970-1980	1980-1990	1990-2000
Whole sample				
Growth 1960-1970	1.00			
Growth 1970-1980	0.16	1.00		
Growth 1980-1990	0.28	0.31	1.00	
Growth 1990-2000	0.11	0.33	0.44	1.00
Rich country group				
Growth 1960-1970	1.00			
Growth 1970-1980	0.73	1.00		
Growth 1980-1990	0.06	0.40	1.00	
Growth 1990-2000	-0.07	0.37	0.61	1.00

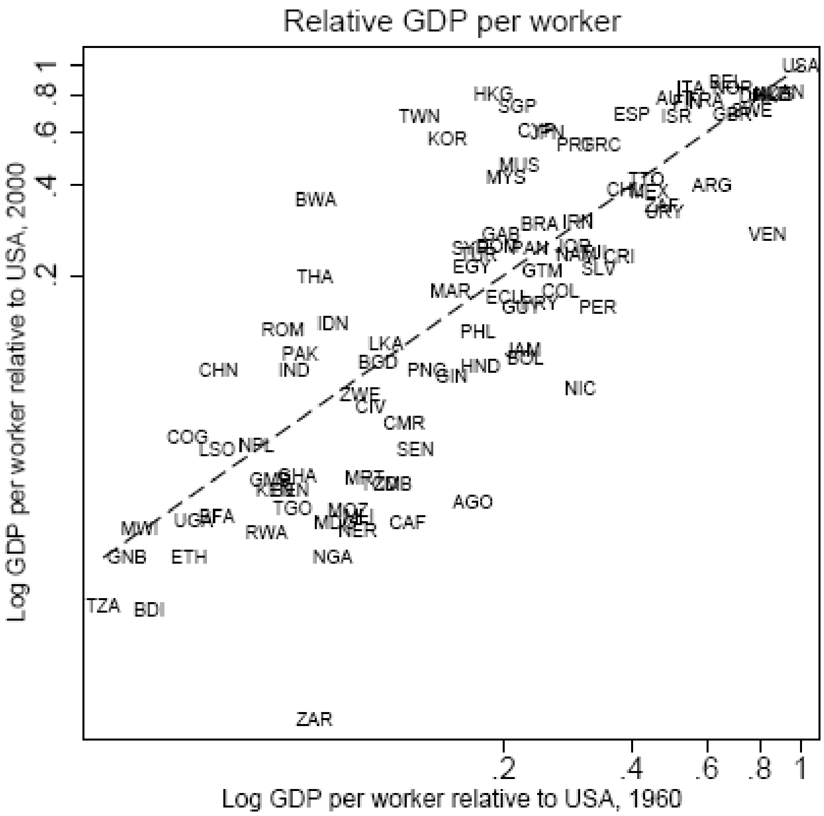
Notes:
- Whole sample is 102 countries. Rich country group is 19 countries.

Η διαφορά που υπάρχει ανάμεσα στους ρυθμούς μεγέθυνσης μαζί με το γεγονός ότι οι ρυθμοί μεγέθυνσης μεταβάλλονται οδηγούν στο τέταρτο τυποποιημένο δεδομένο:

SF#4 Η σχετική θέση μιας χώρας στην παγκόσμια κατανομή των κατά κεφαλήν εισοδημάτων δεν είναι σταθερή.

Το παρακάτω διάγραμμα (Durlauf *et al.*) δείχνει σε λογαριθμική κλίμακα τα σχετικά (ως προς τις ΗΠΑ) ΑΕΠ ανά εργαζόμενο το 1960 και το 2000. Μία διατήρηση της σχετικής θέσης θα σήμαινε ότι οι χώρες θα ήταν συγκεντρωμένες γύρω από την ευθεία των 45. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο εν μέρει.

Figure 2: Output Per Worker: 1960 versus 2000

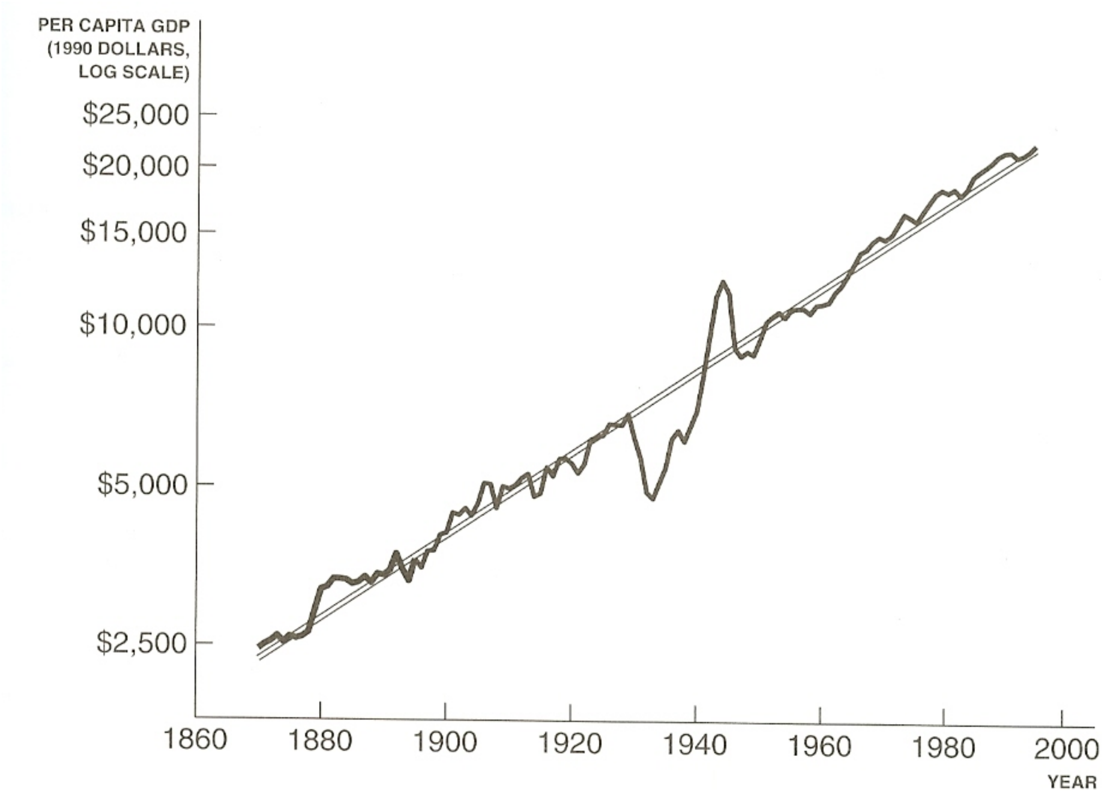


Τέλος το πέμπτο τυποποιημένο δεδομένο αφορά την οικονομία των ΗΠΑ. Συγκεκριμένα:

SF#5 Στις ΗΠΑ τον τελευταίο αιώνα.

1. Η πραγματική απόδοση του κεφαλαίου δεν έχει ανοδική ή πτωτική τάση
2. Τα σχετικά εισοδήματα εργασίας και κεφαλαίου παραμένουν σταθερά
3. Ο μέσος ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν προϊόντος υπήρξε θετικός και σχετικά σταθερός

Το τελευταίο δεδομένο φαίνεται από το επόμενο διάγραμμα (πηγή: Jones) όπου δείχνει το κατά κεφαλή ΑΕΠ των ΗΠΑ από το 1860 μέχρι το 2000 σε δολάρια του 1990 σε λογαριθμική κλίμακα. Ο σχεδιασμός σε λογαριθμική κλίμακα μας επιτρέπει να δούμε ότι γενικά – με εξαίρεση την περίοδο από το κραχ του 1929 μέχρι την μεταπολεμική άνθιση – μπορούμε να εφαρμόσουμε επιτυχώς μία ευθεία στην χρονολογική σειρά που δείχνει την τάση της μεγέθυνσης του κατά κεφαλή ΑΕΠ. Η ύπαρξη της ευθείας δείχνει ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης είναι σταθερός.



SOURCE: Maddison (1995) and author's calculations.

Βιβλιογραφία

2005 International Comparison Program: Tables of final results (2008), Washington D.C.: International Bank for Reconstruction and Development/ The World Bank. Διαθέσιμο στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://siteresources.worldbank.org/ICPINT/Resources/ICP_final-results.pdf

DURLAUF, Steven N., Paul A. JOHNSON & Jonathan R.W. TEMPLE (2005), "Growth Econometrics", στο Philippe Aghion & Steven N. Durlauf (επιμ.): *Handbook of Economic Growth*, τόμος A. Amsterdam: North-Holland, Elsevier.

HESTON, Alan, Robert SUMMERS & Bettina ATEN (2006), *Penn World Table Version 6.2*, Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania, September. Διαθέσιμο στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://pwt.econ.upenn.edu/php_site/pwt_index.php

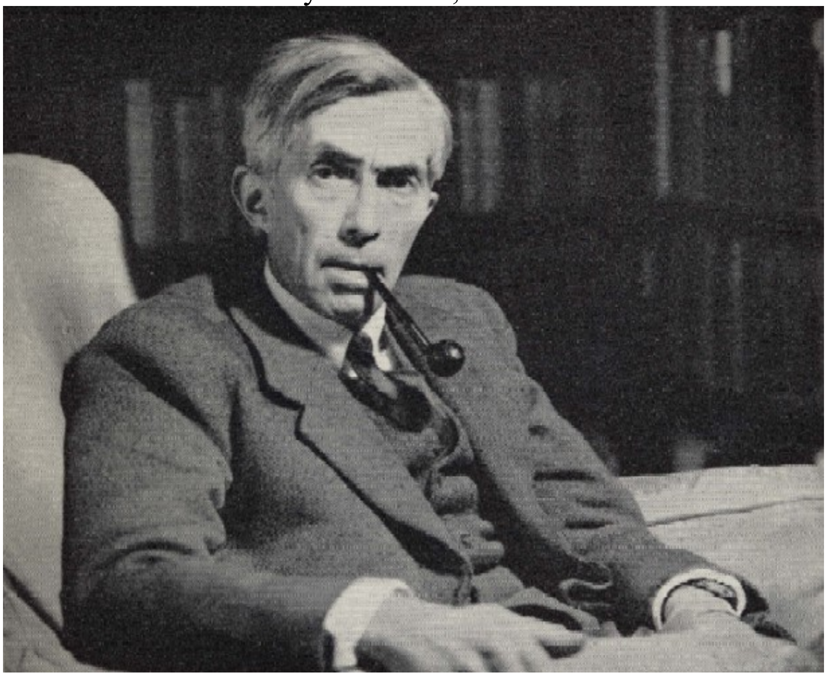
JONES, Charles I. (2002), *Introduction to Economic Growth*, 2η εκδ., New York: W.W. Norton.

WEIL, David N. (2005): *Economic Growth*, Boston, Mass. & London: Addison-Wesley.

ΤΡΙΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

Το υπόδειγμα Harrod[1]

Sir Roy F. Harrod, 1900-1978



R. F. Harrod

1939 "An Essay in Dynamic Theory", *Economic Journal, τ. 49, σσ. 14-33.*

1948 *Towards a Dynamic Economics: Some recent developments of economic theory and their application to policy,* London: Macmillan.

1973 *Economic Dynamics,* London: Macmillan.

R. F. Harrod, "An Essay in Dynamic Theory", *Economic Journal,* 1939

> «Η σημασία αυτού που ακολουθεί δεν πρέπει να κριθεί αποκλειστικά από την ισχύ ή την ευχέρεια των συγκεκριμένων εξισώσεων που προτείνονται. Αφορά κάτι ευρύτερο: μία μέθοδο σκέψης, έναν τρόπο προσέγγισης ορισμένων προβλημάτων. Είναι αναγκαίο να 'σκεφτούμε δυναμικά'».[2]

[1] Το παρόν δεν αποτελεί διάλεξη, αλλά μια αποδελτίωση του σχετικού κεφαλαίου για διδακτική παρουσίαση του εγχειριδίου του Hywell Jones. Διαβάστε προσεκτικά το σχετικό κεφάλαιο και χρησιμοποιείστε τις σημειώσεις αυτές ως ανακεφαλαίωση.

[2] The significance of what follows should not be judged solely by reference to the validity or convenience of the particular equations set forth. It involves something wider: a method of thinking, a way of approach to certain problems. It is necessary to 'think dynamically'

Υπόδειγμα Harrod

Τρεις βασικές υποθέσεις

1. Το επίπεδο του εισοδήματος μιας κοινότητας είναι ο σημαντικότερος προσδιοριστικός παράγοντας της προσφοράς για αποταμίευση
2. Ο ρυθμός αύξησης του εισοδήματος σημαντικός παράγοντας της ζήτησης για αποταμίευση
3. Ζήτηση ίση με προσφορά

Άρα το υπόδειγμα Harrod είναι ένα συναθροιστικό υπόδειγμα πολλαπλασιαστή – επιταχυντή

Συγκεκριμένες Υποθέσεις

1. Αποταμίευση S απλή αναλογική συνάρτηση του εισοδήματος Y

$$S=sY$$

όπου s=μέση και οριακή ροπή προς αποταμίευση

2. Το εργατικό δυναμικό L μεγεθύνεται με σταθερό εξωγενή ρυθμό n

$$\dot{L}/L = n$$

άρα μη μαλθουσιανή ανάπτυξη

3. Δεν υπάρχει τεχνολογική πρόοδος και απόσβεση αποθέματος κεφαλαίου

4. Οι ποσότητες κεφαλαίου K και εργασίας L που απαιτούνται για μια δεδομένη ροη προϊόντος Y δίνονται μονοσήμαντα

$$Y = \min\left[\frac{K}{v}, \frac{L}{u}\right]$$

Εργασία *L*

Αν όλη η εργασία είναι πλήρως απασχολημένη, τότε *οποίο* και αν είναι το απόθεμα κεφαλαίου K, το *μέγιστο επίπεδο προϊόντος* είναι L/u

$$\text{Άρα } \max\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{L}}{L} = n$$

Κεφάλαιο *K*

Ο λόγος κεφαλαίου-προϊόντος v είναι ο λόγος αποθέματος κεφαλαίου προς τη ροή του προϊόντος ή του εισοδήματος

$$K=vY$$

Ισχύει και για προσαυξήσεις $\Delta K=v\Delta Y$

$$\dot{K} = v\dot{Y}$$

Ο *μέσος* λόγος κεφαλαίου-προϊόντος v ισούται με τον *οριακό* λόγο κεφαλαίου-προϊόντος

$$\frac{\dot{K}}{\dot{Y}} = \frac{\Delta K}{\Delta Y} = \frac{K}{Y} = v$$

Δύο ορισμοί του λόγου κεφαλαίου-προϊόντος v

- ***Ορισμός*** (i): Πραγματική προσαύξηση του αποθέματος κεφαλαίου διαιρεμένη με την πραγματική προσαύξηση του προϊόντος. Μετρηθείς ή *ex post* (v)
- ***Ορισμός*** (ii): Προσαύξηση του αποθέματος κεφαλαίου συνδεδεμένη με την προσαύξηση του προϊόντος που απαιτείται από τους επιχειρηματίες ώστε να θεωρούν ότι επένδυσαν την σωστή ποσότητα *ex ante* (v_r)

Εφόσον η απόσβεση είναι μηδενική συνεπάγεται ότι

$$I = \dot{K} \Rightarrow I = v\dot{Y}$$

Εφόσον I=S και S=sY προκύπτει ότι

$$v\dot{Y} = sY$$

Και συνεπώς

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v}$$

Θεμελιώδης εξίσωση

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\ln Y(t) = \int \frac{s}{v} dt = \frac{s}{v} t + Z$$

Υψώνοντας στο e έχουμε

$$Y(t) = \exp\left(\frac{s}{v} t + Z\right) = \exp(Z) \exp\left(\frac{s}{v} t\right) =$$
$$= Y(0) \exp\left(\frac{s}{v} t\right)$$

Ο ρυθμός μεγέθυνσης πρέπει να ισούται με τον λόγο της ροπής προς αποταμίευση προς τον λόγο κεφαλαίου-προϊόντος

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v}$$

Αντίστοιχα

$$I = \dot{K} = S = sY = s\left(\frac{K}{v}\right) \Rightarrow$$

$$\dot{K} = \frac{s}{v}K \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{s}{v} = \frac{\dot{Y}}{Y} \Rightarrow$$

$$K(t) = K(0)\exp\left(\frac{s}{v}t\right)$$

Η θεμελιώδης εξίσωση ως ταυτότητα

Από την θεμελιώδη εξίσωση $\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v}$

Προκύπτει ότι $\frac{\dot{Y}}{Y}v = s$

Ανακαλώντας τον ορισμό (i) του v: $v = \frac{\dot{K}}{\dot{Y}} = \frac{I}{\dot{Y}}$

Η θεμελιώδης εξίσωση γίνεται $\frac{\dot{Y}}{Y}v = \frac{\dot{Y}}{Y}\frac{I}{\dot{Y}} = s = \frac{S}{Y}$

Συμβολίζουμε με G_A τον *πραγματικό ρυθμό μεγέθυνσης του εθνικού εισοδήματος* και έχουμε

$$G_A \equiv s/\mathrm{v}$$

Η θεμελιώδης εξίσωση ορίζουσα τροχιά ισόρροπης μεγέθυνσης

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{s}{v_r}$$

- Από τον ορισμό (ii)
- Συμβολίζουμε με G_W τον *warranted (συστημικό ή επιθυμητό) ρυθμό μεγέθυνσης του εθνικού εισοδήματος* και έχουμε

$$G_W \equiv s/\mathrm{v}_r$$

Το πρώτο πρόβλημα Harrod

$$G_A \leq \frac{\dot{L}}{L} = n$$
$$G_A = G_W = n$$

$$G_A = \frac{s}{v_r} = n$$

Χρυσός Αιώνας

Σταθερή μεγέθυνση με πλήρη απασχόληση είναι ***δυνατή*** αλλά δεν είναι ***πιθανή***

Πρόβλημα ευσταθείας

$$G_A v = s = G_W v_r \Rightarrow$$
$$\frac{G_A}{G_W} = \frac{v_r}{v}$$

- Αν ο *πραγματικός* ρ.μ. υπερβαίνει τον *επιθυμητό* τότε οι επιχειρηματίες θα καταλάβουν ότι η αύξηση του *K* είναι *μικρότερη* από αυτή που επιθυμούν

Αν $G_A > G_W$ τότε $I\uparrow$

Ορίζω ως προσδοκώμενο εισόδημα την περίοδο *t*:
$$Y_t^E$$

Προσδοκώμενο ρυθμό μεγέθυνσης: $G_t^E = \dfrac{Y_t^E - Y_{t-1}}{Y_t^E}$

Και πραγματικό ρυθμό μεγέθυνσης: $G_t = \dfrac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_t}$

Ο πολλαπλασιαστής καθορίζει $Y_t = \dfrac{1}{s} I_t$

Και ο επιταχυντής $I_t = v\left(Y_t^E - Y_{t-1}\right)$

Από όπου προκύπτει

$$Y_t = \frac{v}{s}\left(Y_t^E - Y_{t-1}\right) \Rightarrow$$
$$\frac{Y_t}{Y_t^E} = \frac{v}{s}\left(\frac{Y_t^E - Y_{t-1}}{Y_t^E}\right) = \frac{v}{s} G_t^E$$

$$G_t = 1 - \frac{1 - G_t^E}{G_t^E}\frac{s}{v}$$

Δηλ., αν

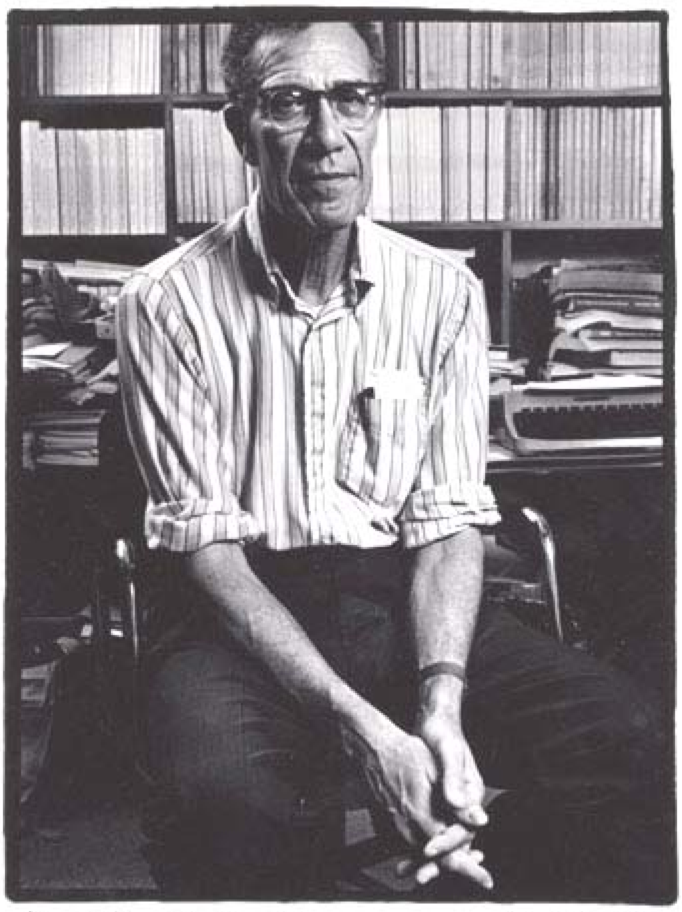
$$G_t^E > s/v \Rightarrow G_t > G_t^E$$
$$G_t^E = s/v \Rightarrow G_t = G_t^E$$
$$G_t^E < s/v \Rightarrow G_t < G_t^E$$

Δεύτερο πρόβλημα Harrod

Οι αποκλίσεις του πραγματικού ρυθμού μεγέθυνσης από τον επιθυμητό όχι μόνο δεν διορθώνονται αλλά είναι και σωρευτικές

ΤΕΤΑΡΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

Το νεοκλασικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Robert Solow[3]



Robert Solow, Nobel Laureate Cambridge, 1987

Το υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Solow (Solow growth model) αποτελεί ουσιαστικά την αφετηρία της νεοκλασικής θεωρίας της μεγέθυνσης. Βασίζεται στο άρθρο του Robert Solow που δημοσιεύθηκε το 1956 στο *Quarterly Journal of Economics* το οικονομικό περιοδικό του πανεπιστημίου του Harvard.[4] Την ίδια χρονιά δημοσιεύθηκε ένα παρεμφερές άρθρο του Trevor Swan στο επιστημονικό περιοδικό *Economic Record*.[5] Για τον λόγον αυτό συχνά θα συναντήσετε την αναφορά στο υπόδειγμα Solow-Swan. Το υπόδειγμα όπως το παρουσιάζουμε εδώ είναι «πλήρες» με την έννοια ότι ενσωματώνει και την τεχνική πρόοδο και την απόσβεση του κεφαλαίου. Συνήθως οι περισσότερες παρουσιάσεις ξεκινούν με την απλούστευση ότι η απόσβεση είναι μηδενική και η τεχνική πρόοδος ανύπαρκτη και στην συνέχεια εισά-

[3] Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν στο βιβλίο του David Romer, *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill, 2001, 2η έκδοση, το οποίο πρόσφατα κυκλοφόρησε και στα ελληνικά.

[4] Robert M. Solow (1956): "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, τόμος 70, Φεβρουάριος, σσ. 65-94.

[5] Trevor W. Swan, (1956): "Economic Growth and Capital Accumulation", *Economic Record*, τόμος 32, Νοέμβριος, σσ. 334-361

γουν αυτές τις έννοιες στο υπόδειγμα. Φυσικά θέτοντας τις αντίστοιχες παραμέτρους ίσες με το μηδέν καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με τα πιο απλά υποδείγματα.

Μεταβλητές
Ας ξεκινήσουμε εισάγοντας τις μεταβλητές μας:

Y = Προϊόν (Output)
K= Κεφάλαιο (Capital). Τόσο το προϊόν όσο και το απόθεμα κεφαλαίου εκφράζονται με τις ίδιες μονάδες. Ουσιαστικά πρόκειται για το ίδιο προϊόν. Το προϊόν που παράγεται μπορεί είτε να καταναλωθεί είτε να επενδυθεί. Για τον λόγο αυτό τα υποδείγματα αυτά ονομάζονται υποδείγματα «σίτου» (corn models) γιατί το σιτάρι μπορεί είτε να το σπείρεις είτε να το καταναλώσεις.[6]
L = Εργασία (Labour). Η μεταβλητή αυτή μπορεί να είναι αριθμός απασχολουμένων ή συνολικές ώρες εργασίας στην οικονομία. Δεδομένου ότι αποτελεί μεταβλητή που εισέρχεται στην συνάρτηση παραγωγής το μέγεθος αυτό είναι διαφορετικό από τον πληθυσμό και συνδέεται με την παραγωγικότητα της οικονομίας. Για τον λόγο αυτό, σε εμπειρικές διερευνήσεις του υποδείγματος Solow χρησιμοποιούμε ΑΕΠ ανά εργάτη και όχι ΑΕΠ κατά κεφαλή. Πάντως ενώ είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός μιας χώρας αυξάνεται με εξωγενή δεδομένο ρυθμό, είναι πιο δύσκολο να κάνουμε την ίδια υπόθεση για το εργατικό δυναμικό. Εδώ υποθέτουμε ότι το εργατικό δυναμικό αυξάνεται σταθερά και εξωγενώς και ότι δεν υπάρχει ανεργία. Υποθέτουμε επίσης ότι όλες οι μονάδες έχουν το ίδιο επίπεδο ειδίκευσης.
A = "Γνώση" ή "Αποδοτικότητα της εργασίας" ("Knowledge" or "effectiveness of labor") Ουσιαστικά περιλαμβάνει κάθε είδους τεχνογνωσία, εκπαίδευση, οργάνωση, θεσμούς ή και ιδεολογία που επηρεάζει την παραγωγικότητα της απλής εργασίας. Θα αναφερθούμε εκτενέστερα στην έννοια της τεχνικής προόδου σε άλλη διάλεξη. Εδώ θεωρείστε την έννοια ως δεδομένη.
t = χρόνος (time)

Συνάρτηση παραγωγής (σ.π.) (Production function)

Ο Solow εισήγαγε την έννοια της συνάρτησης παραγωγής στην οποία μπορείς να υποκαταστήσεις κεφάλαιο σε εργασία. Έτσι ο λόγος κεφαλαίου-προϊόντος που είναι σταθερός και εξωγενώς δεδομένος στο υπόδειγμα Harrod-Domar εδώ είναι μεταβλητός και προσδιορίζεται ενδογενώς στο υπόδειγμα. Ουσιαστικά ο Solow ήθελε να δείξει ότι η υπόθεση του σταθερού λόγου κεφαλαίου-προϊόντος ευθύνεται για τα συμπεράσματα στα οποία οδηγεί το υπόδειγμα Harrod-Domar.[7] Η συνάρτηση παραγωγής που εισάγει ο Solow είναι της μορφής

[6] Η αγγλική λέξη "corn" στο Αμερικανικό και Αυστραλέζικο ιδίωμα σημαίνει «αραβόσιτος». Στα βρετανικά αγγλικά σημαίνει το κύριο δημητριακό μιας περιοχής. Έτσι στην Αγγλία μπορεί να είναι σιτάρι (wheat) και στην Σκωτία βρώμη (oats). Το πρώτο corn model διατυπώθηκε από τον David Ricardo το 1815. Η υπόθεση του ενός αγαθού έχει υποστεί κριτική και για τον λόγο αυτό το αγαθό αυτό έχει αποκληθεί ειρωνικά «πηλός», «πλαστελίνη» ή και «εκτόπλασμα».

[7] Ο Solow και άλλοι υπέθεσαν ότι ο Harrod εργάζεται με μια συνάρτηση παραγωγής τύπου Leontief, δηλ. μια σ.π. του τύπου $Y = \min\left[\frac{K}{v}, \frac{L}{u}\right]$. Ο ίδιος ο Harrod όμως δεν το δέχεται αυτό και θεωρεί ότι κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο για να υπάρχει σταθερός λόγος κεφαλαίου-προϊόντος. Βλ. την συζήτηση στο εγχειρίδιο του Hywell Jones.

$$Y(t) = F\big(K(t), A(t)L(t)\big) \qquad (1)$$

Παρατηρείστε ότι :

1. Ο χρόνος *t* εισέρχεται στην σ.π. *έμμεσα* μέσω των *K, A, L.* Η σ.π. *δεν είναι* της μορφής *F*(*K, L, A, t*)
2. Οι *A* και *L* εισέρχονται πολλαπλασιαστικά ως *AL*[8] (*AL*= αποδοτική εργασία (effective labour))
3. Το προϊόν και το κεφάλαιο είναι το ίδιο αγαθό, το οποίο και καταναλώνεται και επενδύεται. Έχουμε δηλαδή ένα υπόδειγμα σίτου.

Παραδοχές του υποδείγματος

A. Συνάρτηση παραγωγής.
Η συνάρτηση παραγωγής είναι *ομαλώς συμπεριφερόμενη* (well-behaved) και πληροί τους εξής όρους.

A1. ***Σταθερές αποδόσεις κλίμακος*** (constant returns to scale)[9] ως προς *K* και *AL*, δηλ.,

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL) \quad \forall c \geq 0 \qquad (2)$$

Η εξίσωση (2) μας επιτρέπει να εργαστούμε με την εντατική μορφή (*intensive form*) της σ.π. Θέτοντας c=1/AL στην (2) προκύπτει

$$F\left(\frac{K}{AL}, 1\right) = \frac{1}{AL} F(K, AL) \qquad (3)$$

όπου *K*/*AL* είναι κεφάλαιο *ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας*.

---

[8] Η τεχνολογική πρόοδος η οποία εισέρχεται κατ'αυτόν τον τρόπο αποκαλείται αυξητική της εργασίας (*labor augmenting*) ή ουδέτερη κατά Harrod *(Harrod-neutral*). Τυπικά, ουδέτερη κατά Harrod ονομάζεται η πρόοδος εκείνη που τα σχετικά μερίδια των εισροών $K \cdot F_K / L \cdot F_L$ παραμένουν αμετάβλητα για δεδομένο λόγο κεφαλαίου-προϊόντος.. Το αποτέλεσμα ότι η συγκεκριμένη μορφή σ.π. είναι ουδέτερη κατά Harrod οφείλεται στην Joan Robinson και στον Hirofumi Uzawa. Αντίθετα, ουδέτερη κατά Hicks (*Hicks-neutral*) ονομάζεται η πρόοδος εκείνη που ο λόγος των οριακών προϊόντων των εισροών παραμένει αμετάβλητος για δεδομένο λόγο κεφαλαίου-προϊόντος. Βλ. το σχετικό κεφάλαιο στο εγχειρίδιο του Hywell Jones.

Στο υπόδειγμα Solow η υπόθεση για labor-augmenting πρόοδο είναι απαραίτητη για το αποτέλεσμα της σταθερής ισορροπίας, εκτός αν η σ.π. είναι Cobb-Douglas οπότε μπορεί να ερμηνευθεί εν μέρει και ως capital-augmenting (βλέπε Robert J. Barro & Xavier Sala-i-Martin (1995): *Economic Growth*. McGraw-Hill, New York., σ. 54)

[9] Η υπόθεση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής:

(α) η οικονομία είναι αρκετά μεγάλη ώστε έχουν εξαντληθεί τα οφέλη της εξειδίκευσης, αποτελείται, π.χ., από πολλές επιχειρήσεις οι οποίες αν και μικρές σε σχέση με την συνολική οικονομία είναι αρκετά μεγάλες ώστε να έχουν εξαντλήσει τα οφέλη της κλίμακας παραγωγής και

(β) οι μόνοι συντελεστές παραγωγής που είναι σημαντικοί είναι αυτοί που είναι μέσα στην σ.π. Δεν υπάρχει, π.χ., εξάρτηση από την γη έτσι ώστε ένας τριπλασιασμός του κεφαλαίου και της εργασίας να περιορίσει την αποδοτικότητά τους.

Πάντως η υπόθεση των σταθερών αποδόσεων κλίμακας βρίσκεται στην καρδιά της νεοκλασικής θεωρίας.

Ορίζοντας $k = K/AL$, $y = Y/AL$ και $f(k) = F(k,1)$ μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (3) ως

$$y = f(k) \qquad (4)$$

A2. Η εντατική μορφή ικανοποιεί τις συνθήκες $f(0) = 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0$

A3. Επίσης η $f(k)$ εκπληρώνει και τις συνθήκες Inada[10] (Inada conditions) ότι δηλαδή

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \ \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0 \qquad (5)$$

Σημείωση:
Κλασσικό παράδειγμα συνάρτησης που ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις είναι η συνάρτηση Cobb-Douglas:

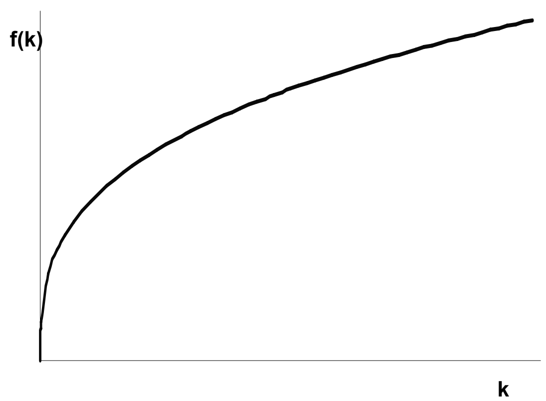
$$F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (6)$$

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι στην συνάρτηση Cobb-Douglas $f(k) = k^{\alpha}$ (7)

Απόδειξη:

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \Rightarrow y = \frac{Y}{AL} = \frac{K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}}{AL} = \frac{K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}}{(AL)^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha}\left(\frac{AL}{AL}\right)^{1-\alpha} = k^{\alpha}$$

Μία τυπική σ.π. που πληροί τους παραπάνω όρους θα έχει την εξής γραφική μορφή[11]



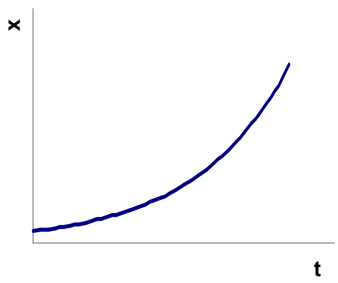
B. Οι αρχικές τιμές [12] των K, L και A, $K(0)$, $L(0)$ και $A(0)$ θεωρούνται δεδομένες, ενώ δεχόμαστε ότι η εργασία και η "γνώση" αυξάνουν με σταθερό ρυθμό

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \qquad (8)$$

[10] Kenichi Inada, (1964): "Some Structural Characteristics of Turnpike Theorems", Review *of Economic Studies*, τόμος, 31 Ιανουάριος, σσ. 43-58.
[11] Το παραπάνω διάγραμμα κατασκευάστηκε με βάση μια συνάρτηση Cobb-Douglas με a=1/3
[12] Όταν δηλαδή t=0.

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g \qquad (9)$$

Που σημαίνει ότι αν $L(0)$, $A(0)$ είναι οι τιμές στην χρονική περίοδο 0, οι τιμές στην στιγμή t θα είναι $L(t) = L(0)e^{nt}, A(t) = A(0)e^{gt}$. Οι εκθετικές αυτές συναρτήσεις έχουν την παρακάτω γραφική μορφή.



Γ. Το προϊόν διαιρείται σε κατανάλωση και επένδυση.
Το ποσοστό που αφιερώνεται σε επένδυση (αποταμίευση) s, ($0<s<1$) είναι *εξωγενώς* δεδομένο και σταθερό.[13]
Μια μονάδα προϊόντος που δαπανάται σε επένδυση δίνει μια μονάδα νέου κεφαλαίου. Το υπάρχον κεφάλαιο υπόκειται σε φυσική απόσβεση με ρυθμό δ. Αρα:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \qquad (10)$$

Δ. Το άθροισμα των n, g και δ είναι θετικό. Οι s, n, g και δ αποτελούν τις εξωγενώς δεδομένες **παραμέτρους** του υποδείγματος.

Με τις παραδοχές αυτές περνάμε στην ανάλυση του υποδείγματος.

Δυναμική ανάλυση του υποδείγματος

Το υπόδειγμα Solow εστιάζει την προσοχή του στην συμπεριφορά της μεταβλητής k δηλ., του κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας. Εξετάζουμε την συμπεριφορά της πρώτης παραγώγου του k ως προς τον χρόνο:

$$\dot{k} = d\left(\frac{K}{AL}\right)\Big/ dt = \frac{\dot{K}(AL) - K(A\dot{L} + \dot{A}L)}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL}\frac{\dot{L}}{L} - \frac{K}{AL}\frac{\dot{A}}{A} \qquad (11)^{14}$$

Από τον ορισμό του k, τις εξισώσεις (8), (9) και (10) προκύπτει ότι

[13] Ο Solow θεωρούσε ότι ένα πραγματικά νεοκλασικό υπόδειγμα πρέπει να έχει ενδογενώς προσδιοριζόμενο ποσοστό αποταμίευσης. Διατήρησε όμως την υπόθεση του σταθερού ποσοστού αποταμίευσης για να μην αποστεί από το υπόδειγμα Harrod.

[14] Η εξίσωση αυτή προκύπτει αυτόματα από τον ορισμό του $k=K/AL$, παραγωγίζοντας ως προς t, και χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγώγισης ότι

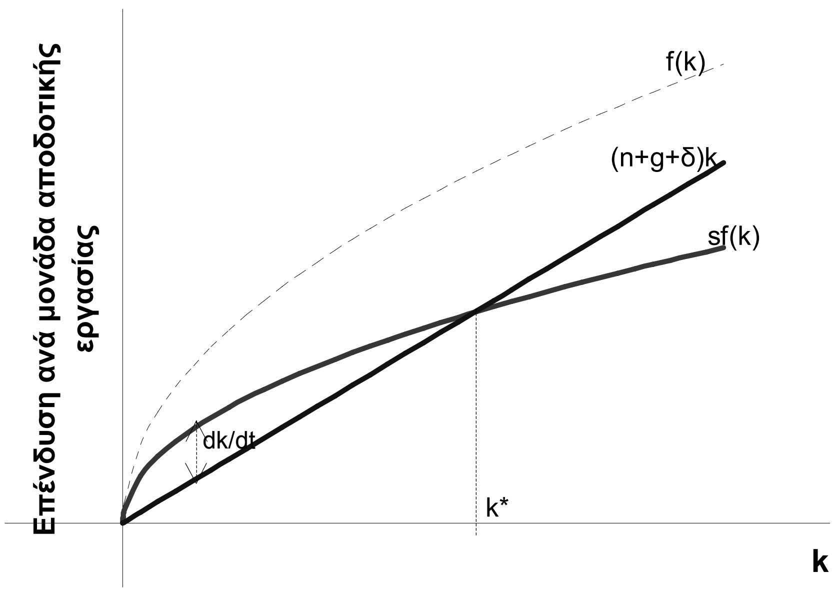
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

$$\dot{k} = \frac{sY - \delta K}{AL} - kn - kg = s\frac{Y}{AL} - \delta\frac{K}{AL} - kn - kg = s\frac{Y}{AL} - k\delta - kn - kg \qquad (12)$$

και από το γεγονός ότι $f(k)=Y/AL$ προκύπτει η θεμελιώδης εξίσωση του υποδείγματος Solow

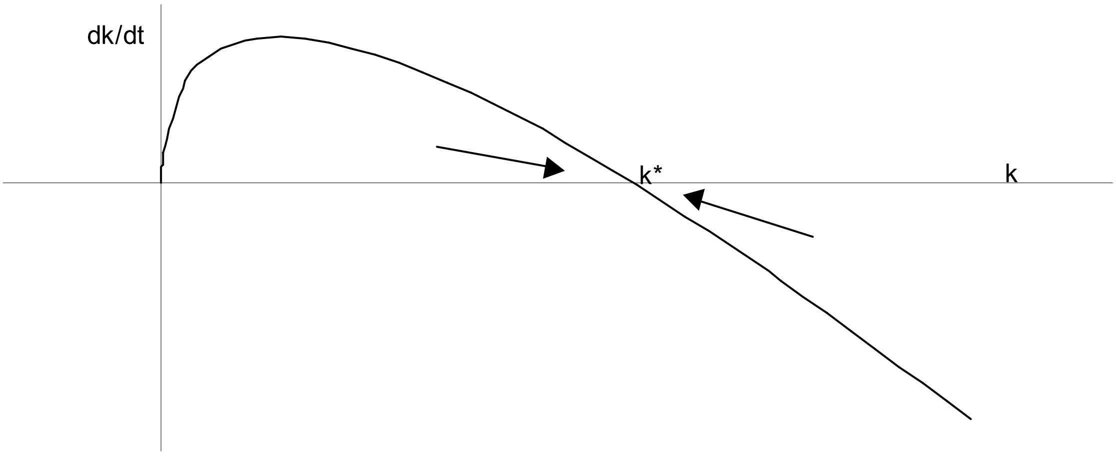
$$\boxed{\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+g+\delta)k(t) \qquad \mathbf{(13)}}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης $sf(k(t))$ είναι η ***πραγματική επένδυση*** (actual investment) ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας. Ο δεύτερος όρος είναι η επένδυση νεκρού σημείου ή ***επένδυση αναπλήρωσης*** (breakeven investment) η επένδυση δηλαδή που απαιτείται για να παραμείνει το *k* στο παρόν επίπεδο[15] Οταν η πραγματική επένδυση είναι μεγαλύτερη από την επένδυση αναπλήρωσης τότε το *k* αυξάνει, αλλιώς μειώνεται. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Μπορούμε να συνοψίσουμε την παραπάνω σχέση με ένα ***διάγραμμα φάσεως*** (phase diagram) που δείχνει την μεταβολή της επένδυσης (dk/dt) σε σχέση με το επίπεδο του κεφαλαίου (και τα δύο μεγέθη ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας).

[15] δ για να αναπληρώσει την απόσβεση, $n+g$ για να αυξήσει το κεφάλαιο Κ κατά το ποσοστό που αυξάνεται η αποδοτική εργασία, εφόσον το *k* είναι ο λόγος *K/AL*.

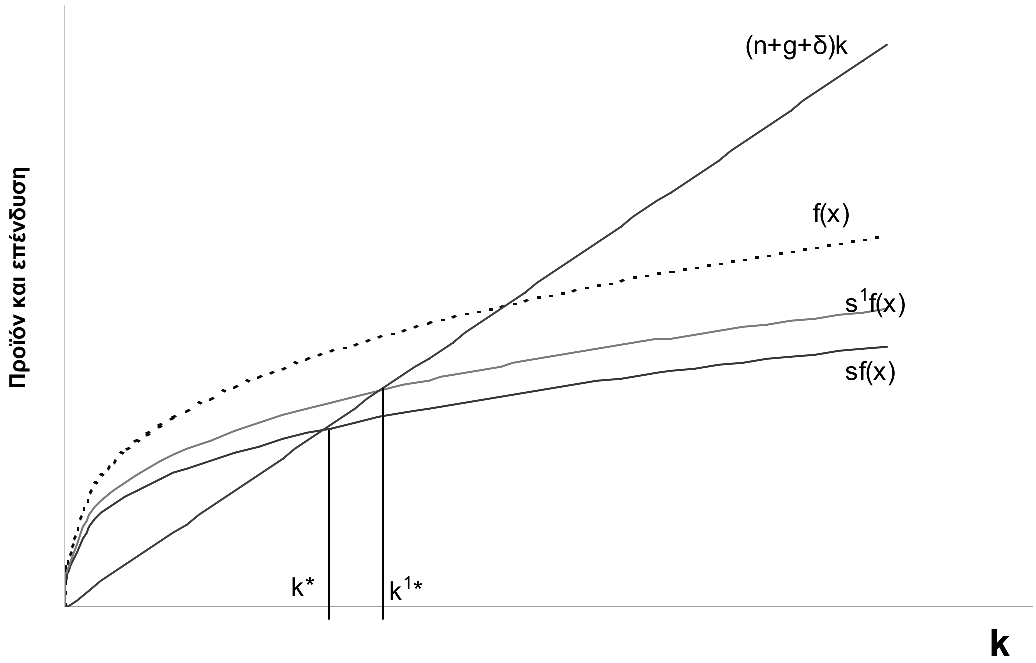


Για οποιοδήποτε επίπεδο κεφαλαίου ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας μικρότερο του k*, εκεί δηλ., όπου $sf(k^*)=(n+g+\delta)k^*$, η οικονομία αυξάνει τις επενδύσεις της μέχρι να επιτευχθεί αυτό το επίπεδο, ενώ για επίπεδα μεγαλύτερα του k* οι επενδύσεις μειώνονται μέχρις ότου το k φθάσει στο επίπεδο ισορροπίας. Δεδομένου ότι το σημείο ισορροπίας της οικονομίας είναι το σημείο όπου το κεφάλαιο ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας παραμένει σταθερό, το ερώτημα είναι πώς εξελίσσονται τα υπόλοιπα μεγέθη στο σημείο ισορροπίας. Η εργασία και η "γνώση", εξ υποθέσεως αυξάνονται με ρυθμούς *n* και *g* αντίστοιχα. Το κεφαλαιακό απόθεμα K, εφόσον είναι εξ ορισμού ίσο προς *ALk* και ο ρυθμός αύξησης του *k* είναι μηδενικός (όταν k=k*), αυξάνεται με ρυθμό g+n,[16] δηλαδή $\dot{K}/K = n + g$. Δεδομένου ότι το κεφάλαιο και η αποδοτική εργασία αυξάνονται με τον ίδιο ρυθμό από την υπόθεση των σταθερών αποδόσεων κλίμακας προκύπτει ότι και το προϊόν Y αυξάνεται με ρυθμό n+g. Τέλος το κεφάλαιο ανά μονάδα εργασίας (K/L) και το προϊόν ανά μονάδα εργασίας (Y/L) αυξάνονται με ρυθμό g.
Αρα, στο υπόδειγμα Solow ανεξάρτητα από ποιο σημείο ξεκινά η οικονομία, τελικά συγκλίνει σε μία *οδό ισόρροπης μεγέθυνσης* (***balanced growth path***) όπου τα κύρια μεγέθη μεγεθύνονται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό.

Η επίπτωση της αύξησης στο ποσοστό αποταμίευσης

Μια αύξηση του s οδηγεί στην αύξηση του k* ισορροπίας. Αυτό είναι προφανές και από το παρακάτω διάγραμμα, όπου μια αύξηση του s σε s^1,οδηγεί σε ένα κεφάλαιο ισορροπίας ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας k^{1*}

[16] Εάν $w = xyz$, και $\dot{x}/x = a,\ \dot{y}/y = b,\ \dot{z}/z = c \Rightarrow \dot{w}/w = a + b + c$



Ας σημειωθεί ότι μια *μόνιμη* αύξηση του ποσοστού αποταμίευσης οδηγεί σε μια προσωρινή άνοδο του ρυθμού αύξησης του προϊόντος ανά εργασία. Το προϊόν ανά εργασία μεταπηδά σε ένα άλλο μονοπάτι (οδό, path) ανάπτυξης παράλληλο με το αρχικό. Αρα η επίπτωση μιας μόνιμης αύξησης του s δεν έχει επίπτωση πάνω στον ρυθμό ανάπτυξης των μεγεθών που καθορίζονται όπως τα περιγράψαμε στην οδό της ισόρροπης μεγέθυνσης.

Επίπτωση στην κατανάλωση

Το πλέον ενδιαφέρον σημείο της επίπτωσης του ποσοστού αποταμίευσης είναι πάνω στην κατανάλωση ισορροπίας δεδομένου ότι αυτό που ενδιαφέρει την ευημερία των νοικοκυριών είναι η μακροπρόθεσμη κατανάλωση. Στο σημείο ισορροπίας όπου $sf(k^*)=(n+g+\delta)k^*$, η κατανάλωση c^* που είναι εξ ορισμού ίση με $f(k)$-$sf(k)$ είναι

$$c^* = f(k) - (n+g+\delta)k^* \qquad (14)$$

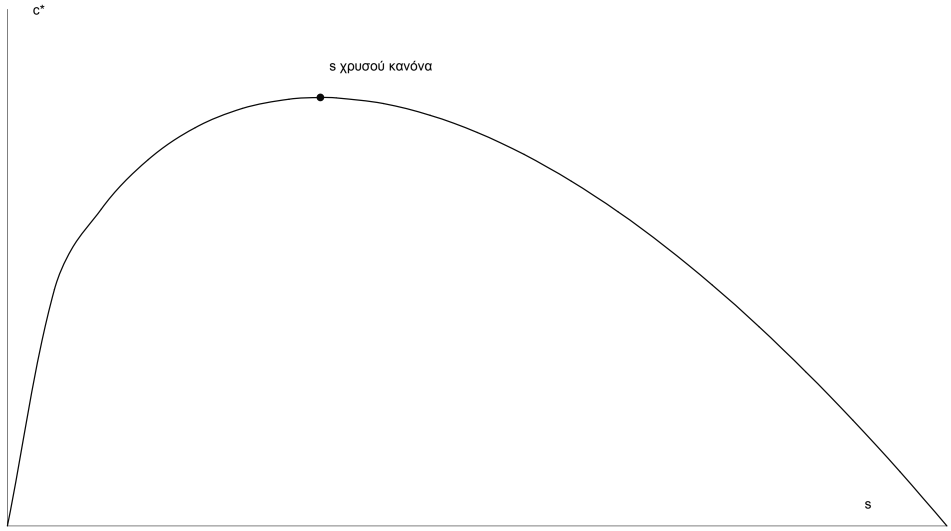
Δεδομένου ότι το k^* εξαρτάται από το s και τις άλλες παραμέτρους του υποδείγματος (n,g,δ) μπορεί να γραφεί ως $k^*=k^*(s,n,g,\delta)$. Αρα, η (14) γίνεται

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*(s,n,g,\delta)) - (n+g+\delta)]\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} \qquad (15)$$

Από την (15) προκύπτει ότι η μεγιστοποίηση της κατανάλωσης ισορροπίας (ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας) γίνεται στο σημείο όπου $f'\left(k^*\right) = (n+g+\delta)$ [17]. Αυτό το σημείο και για το συγκεκριμένο s, είναι γνωστό ως ο **χρυσός κανόνας** (*golden rule*) της μεγέθυνσης. Ας σημειωθεί ότι στο υπόδειγμα Solow δεν υπάρχει εγγύηση

[17] Δεδομένου ότι $\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s}>0$, η μεγιστοποίηση της κατανάλωσης ισορροπίας ως προς s προκύπτει όταν μηδενίζεται ο πρώτος όρος του δεξιού σκέλους της (15)

ότι ο κανόνας αυτός θα ισχύει δεδομένου ότι το *s* είναι εξωγενές. Είναι όμως δυνατόν να υπάρχει ισορροπία όπου το *s* είναι μεγαλύτερο από όσο χρειάζεται για να επιτευχθεί ο χρυσός κανόνας και η οικονομία να υπεραποταμιεύει. Αν το s είναι μικρότερο από το απαιτούμενο για την ισχύ του χρυσού κανόνα, τότε μπορούμε να οδηγηθούμε σε ανώτερο επίπεδο ευημερίας αυξάνοντας το *s*. Προσωρινά όμως θα έχουμε μια μείωση της κατανάλωσης όποτε το συνολικό αποτέλεσμα στην ευημερία εξαρτάται πως οι διαφορετικές γενιές (ή η ίδια γενιά σε διαφορετικές χρονικές περιόδους) αποτιμά την υψηλότερη κατανάλωση στο μέλλον σε σχέση με την μειωμένη κατανάλωση στο παρόν. Την σχέση της κατανάλωσης ισορροπίας c^* με το ποσοστό αποταμίευσης *s*, μπορούμε να την δούμε σχηματικά στο παρακάτω διάγραμμα.



Μακροπρόθεσμη επίδραση στο προϊόν

Η μακροπρόθεσμη επίδραση του *s* στο προϊόν δίνεται από την σχέση[18]

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} \tag{16}$$

Άρα για να βρούμε το αριστερό σκέλος πρέπει να λύσουμε ως προς $\partial k^*/\partial s$. Από την βασική εξίσωση προκύπτει ότι

$$sf(k^*(s,n,g,\delta)) = (n+g+\delta)k^*(s,n,g,\delta) \tag{17}$$

Δεδομένου ότι η εξίσωση αυτή ισχύει για όλες τις τιμές των παραμέτρων s,n,g και δ, αν παραγωγίσουμε και τα δύο σκέλη της εξίσωσης ως προς *s* θα έχουμε.

$$sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) = (n+g+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s} \tag{18}$$

[18] Από τον απλό αλυσιδωτό κανόνα παραγώγισης.

Μεταφέροντας τους όρους και λύνοντας ως προς $\partial k^*/\partial s$ προκύπτει

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} \tag{19}$$

Υποκαθιστώντας την (19) στην (16) προκύπτει

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} \tag{20}$$

Προκειμένου να ερμηνεύσουμε καλύτερα την (20) την μετατρέπουμε σε ελαστικότητα και κάνοντας χρήση της εξίσωσης $sf\left(k^*\right) = \left(n+g+\delta\right)k^*$ η (20) μετασχηματιζεται στην

$$\begin{aligned} \frac{s}{y}\frac{\partial y^*}{\partial s} &= \frac{s}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} \\ &= \frac{(n+g+\delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)[(n+g+\delta) - (n+g+\delta)k^* f'(k^*)/f(k^*)]} \\ &= \frac{k^* f'(k^*)/f(k^*)}{1-[k^* f'(k^*)/f(k^*)]} \end{aligned} \tag{21}$$

Η $k^* f'(k^*)/f(k^*)$ είναι η ελαστικότητα του προϊόντος ως προς το κεφάλαιο, την οποία συμβολίζουμε με $\alpha_K(k^*)$ Άρα η (20) γίνεται

$$\frac{s}{y}\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha_K(k^*)}{1-\alpha_K(k^*)} \tag{22}$$

Εάν οι αγορές είναι ανταγωνιστικές και το κεφάλαιο αμείβεται σύμφωνα με το οριακό του προϊόν $f'(k^*)$, συνολική αμοιβή του κεφαλαίου είναι $k^* f'(k^*)$, το δε μερίδιο της αμοιβής του κεφαλαίου στο προϊόν είναι $k^* f'(k^*)/f(k^*)$ δηλ. η $\alpha_K(k^*)$. Στην συνάρτηση Cobb-Douglas η ελαστικότητα αυτή είναι το α της συνάρτησης.

Η συνάρτηση Cobb-Douglas

Ας διερευνήσουμε τώρα το υπόδειγμα Solow χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cobb-Douglas της μορφής $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$. Όπως δείξαμε παραπάνω η εντατική μορφή της συνάρτησης είναι $y = k^\alpha$.
Άρα η θεμελιώδης εξίσωση Solow (δηλ., η εξίσωση 13) γίνεται:

$$\dot{k} = sk^\alpha - (n+g+\delta)k$$

Το k^* προκύπτει όταν

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+g+\delta)k = 0 \Rightarrow s\left(k^*\right)^{\alpha} = (n+g+\delta)k^* \Rightarrow$$

$$\left(k^*\right)^{1-\alpha} = \frac{s}{n+g+\delta} \Rightarrow$$

$$k^* = \left[\frac{s}{n+g+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Αντίστοιχα, το y^* είναι ίσο με $y^* = \left(k^*\right)^{\alpha} = \left[\frac{s}{n+g+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$

Ποιο είναι το s για το οποίο μεγιστοποιείται η κατανάλωση; Θυμηθείτε ότι ο *χρυσός κανόνας* προϋποθέτει ότι $f'\left(k^*\right) = (n+g+\delta)$.

Εν προκειμένω έχουμε

$$f(k) = k^{\alpha} \Rightarrow f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} \Rightarrow$$

$$f'(k^*) = \alpha\left(k^*\right)^{\alpha-1} =$$

$$= \alpha\left(\left[\frac{s}{n+g+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha-1} =$$

$$= \alpha\frac{n+g+\delta}{s}$$

Άρα από τον χρυσό κανόνα προκύπτει ότι

$$f'\left(k^*\right) = (n+g+\delta) \Rightarrow$$

$$\alpha\frac{n+g+\delta}{s^{XK}} = n+g+\delta \Rightarrow$$

$$s^{XK} = \alpha$$

Λύση κλειστής μορφής υποδείγματος Solow με σ.π. Cobb-Douglas[19]

Παρατηρείστε ότι στο υπόδειγμα Solow η μεγέθυνση είναι σταθερή μόνον όταν έχει επιτευχθεί η κατάσταση ισορροπίας. Όταν ξεκινήσουμε από μία αρχική κατάσταση η μεγέθυνση είναι διαφορετική μέχρι να επιτευχθεί η κατάσταση ισορροπίας. Σε μια συνάρτηση Cobb-Douglas με αρχική κατάσταση $\tilde{y}_0, A_0$, όπου $\tilde{y}_0$ είναι το κατά κεφαλήν ΑΕΠ και A_0 η «γνώση» στην αρχική περίοδο, η εξίσωση που δίνει την μεταβολή του κατά κεφαλήν ΑΕΠ συναρτήσει του χρόνου, $\tilde{y}(t)$, είναι η

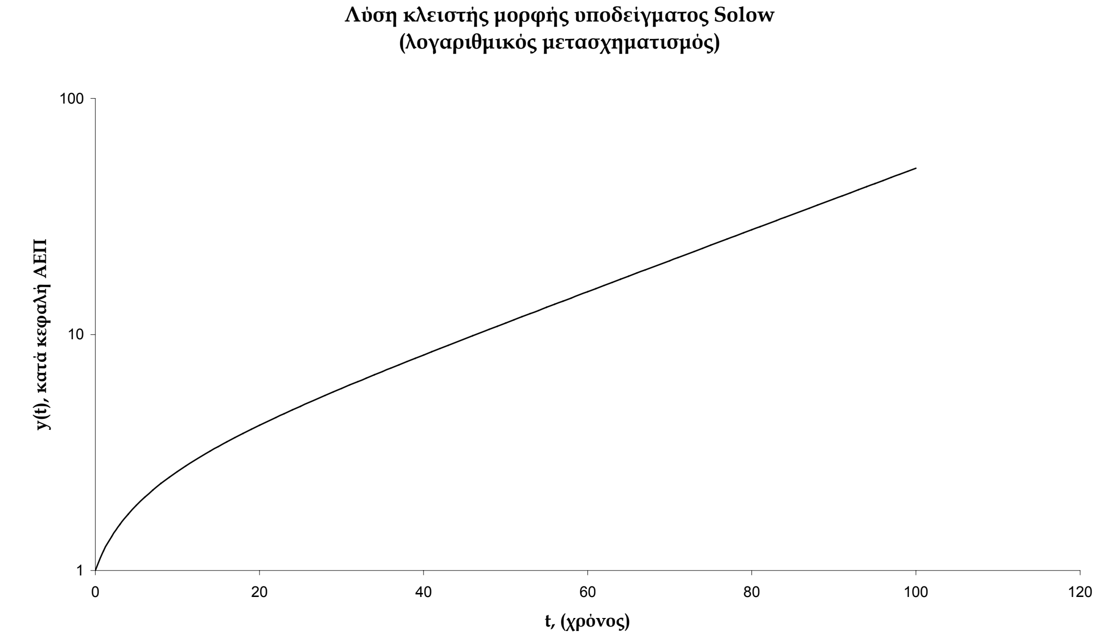
[19] Βλ. Charles I. Jones (2002), *Introduction to Economic Growth*, W.W. Norton, New York, 2η έκδοση, σσ. 50-1. Πιο αναλυτικά βλέπε στα αγγλικά στην ιστοσελίδα http://emlab.berkeley.edu/users/chad/closedform.pdf.

$$\tilde{y}(t)=\left(\frac{s}{n+g+\delta}\left(1-e^{-\lambda t}\right)+\left(\frac{y_0}{A_0}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}e^{-\lambda t}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A(t)$$

Όπου $\lambda=(1-\alpha)(n+g+\delta)$. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται «λύση κλειστής μορφής υποδείγματος Solow» (closed-form solution of the Solow model). Παρατηρείστε ότι όταν $t=0$ τότε $e^{-\lambda t}=1$ και $1-e^{-\lambda t}=0$, άρα και $y(0)=y_0$. Όταν, αντίθετα $t=\infty$, τότε $\tilde{y}(t)=\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}A(t)$.

Σημειώστε ότι εφόσον $y(t)=\frac{\tilde{y}(t)}{A(t)}=\frac{Y(t)}{A(t)L(t)}$, το $y(t)$ για $t=\infty$ είναι ίσο με $y^*=\left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ που είναι η σταθερή κατάσταση με συνάρτηση Cobb-Douglas.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται πως εξελίσσεσαι το $\tilde{y}(t)$ σε λογαριθμικό μετασχηματισμό. Παρατηρείστε ότι μετά από κάποιες περιόδους μεγεθύνεται με σταθερό ρυθμό ίσο με *g*, η λογαριθμική παράσταση δηλ., γίνεται ευθεία, αλλά τις πρώτες περιόδους προσαρμόζεται σταδιακά στην σταθερή κατάσταση.



Σημείωση. Όλα τα διαγράμματα έχουν γίνει με Microsoft Excel. Χρησιμοποιήθηκε μια συνάρτηση Cobb-Douglas με α=1/3 και παραμέτρους υποδείγματος s,s[1],n,g,δ, $\tilde{y}_0, A_0$ ίσες με 70%, 80%, 5%, 3%, 3%, 1 και 1 αντίστοιχα

ΠΕΜΠΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

Το νεοκλασικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης των Ramsey-Cass-Koopmans[20]

Frank Plumpton Ramsey, 1903-1930

Εισαγωγή

Στην ανάλυση του μονοτομεακού υποδείγματος «σίτου» (corn model) του Solow είχαμε υποθέσει ότι το ποσοστό αποταμίευσης είναι εξωγενώς δεδομένο. Σε ένα όμως αμιγώς νεοκλασικό υπόδειγμα το ποσοστό αποταμίευσης πρέπει να προκύπτει από τις αποφάσεις των οικονομικών δρώντων. Ο λόγος που ο Solow το εξέλαβε ως δεδομένο ήταν κυρίως ότι ήθελε να κάνει κριτική στο υπόδειγμα Harrod καταδεικνύοντας ότι τα αποτελέσματά του τελευταίου οφείλονται – όπως νόμιζε – στο γεγονός ότι ο Harrod υπέθετε έναν σταθερό λόγο κεφαλαίου-προϊόντος. Ως εκ τούτου διατήρησε τις υπόλοιπες υποθέσεις του Harrod σταθερές και εισήγαγε την υπόθεση της νεοκλασικής συνάρτησης παραγωγής.

Το υπόδειγμα που θα εξετάσουμε σε αυτήν την διάλεξη εισάγει την έννοια της συνάρτησης χρησιμότητας του νοικοκυριού και εξάγει ενδογενώς το ποσοστό αποταμίευσης. Στην μορφή που θα το αναπτύξουμε, το υπόδειγμα χρονολογείται από το 1965 με δύο άρ-

[20] Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν στο βιβλίο του David Romer, *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill, 2001, 2η έκδοση, το οποίο πρόσφατα κυκλοφόρησε μεταφρασμένο στα ελληνικά από τις εκδόσεις τυπωθήτω.

θρα των David Cass[21] και Tjalling C. Koopmans[22] Προηγήθηκε όμως το 1928 ένα εντυπωσιακό άρθρο στο επιστημονικό περιοδικό *Economic Journal,* εξαιρετικά πρωτοποριακό για την εποχή του, από τον νεαρό Frank Ramsey[23] με τίτλο «Μια μαθηματική θεωρία της αποταμίευσης»,[24] το οποίο διαφέρει αρκετά από αυτό που θα εξετάσουμε εδώ.[25]

Το υπόδειγμα που θα εξετάσουμε εδώ διαφέρει από το υπόδειγμα Solow στο ότι η μακροοικονομική ισορροπία προκύπτει από αποφάσεις που παίρνουν οι οικονομικοί δρώντες (agents) – επιχειρήσεις και νοικοκυριά – σε μικροοικονομικό επίπεδο. Ετσι, το ποσοστό αποταμίευσης δεν δίνεται εξωγενώς, αλλά προκύπτει από την οικονομική απόφαση των νοικοκυριών που μεγιστοποιούν την χρησιμότητά τους με δεδομένο τον εισοδηματικό περιορισμό.[26] Βρισκόμαστε σε έναν τέλειο νεοκλασικό κόσμο. Υποθέτουμε πάλι, όπως και στο υπόδειγμα Solow ότι η εργασία και η «αποδοτικότητα της εργασίας» μεγεθύνονται με σταθερό εξωγενώς δεδομένο ρυθμό. Ανταγωνιστικές επιχειρήσεις, όλες ίδιες μεταξύ τους, προσλαμβάνουν εργάτες μισθώνουν κεφάλαιο και πωλούν προϊόν σε αγορές συντελεστών παραγωγής και προϊόντος σε συνθήκες τέλειου ανταγωνισμού. Ενας συγκεκριμένος αριθμός νοικοκυριών, ίδια μεταξύ τους, κατέχουν όλο το κεφάλαιο της οικονομίας, παρέχουν όλη την εργασία, καταναλώνουν και αποταμιεύουν. Η οικονομία λειτουργεί στο συναθροιστικό επίπεδο και είναι μονοτομεακή. Το παραγόμενο προϊόν και το κεφάλαιο είναι το ίδιο. Ένα χαρακτηριστικό του υποδείγματος είναι ότι **ο χρονικός ορίζοντας είναι άπειρος** (*infinite time horizon models*) και η μεγιστοποίηση της χρησιμό-

[21] David Cass, (1965): “Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation”, *Review of Economic Studies*, 32, (July), σσ. 233-240.

[22] Tjalling C Koopmans,. (1965): “On the Concept of Optimum Economic Growth”, στο *The Economic Approach to Development Planning*. North-Holland, Amsterdam. Ο Koopmans πήρε το βραβείο Nobel στην οικονομική επιστήμη (μαζί με τον L.V. Kantorovitch) το 1975 για την συμβολή του στον γραμμικό προγραμματισμό και την θεωρία της activity analysis. Στην απονομή του βραβείου αναφέρεται και η συνεισφορά του που εξετάζουμε εδώ. (βλέπε, Assar Lindbeck (ed.) (1992*): Nobel Lectures: Economic Sciences 1969-1980*. Nobel Foundation, World Scientific, Singapore, σσ. 215-6.)

[23] Frank Plumpton Ramsey (1902-1930)¨ Λαμπρός μαθηματικός και φιλόσοφος που πέθανε στα 28 του χρόνια. Φίλος των Keynes, Sraffa και Wittgenstein, άφησε τρεις σημαντικές συμβολές στην οικονομική επιστήμη, η πιο σημαντική είναι αυτή που εξετάζουμε εδώ. Στο παράρτημα έχω μεταφράσει τον επικήδειο του Keynes στην *Economic Journal*. Βλέπε το άρθρο του Peter Newman “Frank Plumpton Ramsey” στο J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman (eds.) (1987): *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, Macmillan, London (εφεξής *Palgrave*)

[24] F.P. Ramsey, (1928): “A Mathematical Theory of Saving”, *Economic Journal*, 38 (December), σσ.543-559. Βλέπε επίσης το άρθρο του David M. Newberry, “The Ramsey Model” στο *Palgrave.*

[25] Το αρχικό άρθρο του Ramsey δεν υπέθετε ξεχωριστούς καταναλωτές που μεγιστοποιούν την χρησιμότητα τους, αλλά έναν «κοινωνικό προγραμματιστή» που προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει μια αρνητική συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας. Υποθέτει ότι υπάρχει ένα σημείο μέγιστης κοινωνικής ευημερίας (Bliss point) και προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει διαχρονικά τις αποκλίσεις από αυτό. Δεν υποθέτει ότι υπάρχει δυνατότητα χρονικής προτίμησης – όλες οι γενεές έχουν την ίδια βαρύτητα. Ψάχνει να βρει το άριστο μονοπάτι για το οποίο η κοινωνία επηρεάζοντας το ποσοστό αποταμίευσης θα φθάσει στο σημείο μέγιστης ευημερίας. Το μονοπάτι είναι άριστο με την έννοια ότι οι θυσίες που χρειάζονται να γίνουν είναι οι ελάχιστες δυνατές. Ο Ramsey διατύπωσε την θεωρία του προσπαθώντας να εξετάσει μια παρατήρηση του Pigou, καθηγητή τότε στο Cambridge, ότι οι γενεές είναι μυωπικές ως προς την μεγιστοποίηση της ευημερίας των επομένων γενεών και αποταμιεύουν λιγότερο από όσο πρέπει. Η χρήση του λογισμού των μεταβολών (calculus of variations) από τον Ramsey ήταν μαθηματικά πολύ προχωρημένη. Μπορείτε να διαβάσετε για το αρχικό άρθρο του Ramsey στην ιστοσελίδα του History of Economic Thought Website

http://cepa.newschool.edu/het/essays/growth/optimal/ramseygr.htm

[26] Πάντως και ο Solow στο αρχικό του υπόδειγμα (1956) προσπάθησε να δείξει ότι η ισορροπία μπορεί να είναι το αποτέλεσμα αποφάσεων που λαμβάνονται στο μικροοικονομικό επίπεδο. Όπως όμως διδάσκομε το υπόδειγμα η διάσταση αυτή χάνεται.

τητας γίνεται για όλη την (άπειρη) ζωή (lifetime) των νοικοκυριών.[27] Ας ξεκινήσουμε λοιπόν με τις παραδοχές του υποδείγματος.

Παραδοχές

Επιχειρήσεις

Υπάρχει μεγάλος[28] αριθμός ιδίων επιχειρήσεων. Ολες έχουν την ίδια συνάρτηση παραγωγής $Y = F\left(K, AL\right)$, η οποία εκπληρώνει όλες τις συνθήκες που αναφέρθηκαν στο υπόδειγμα Solow[29]. Τα σύμβολα είναι τα ίδια: *Y*, προϊόν, *K*, κεφάλαιο, *L*, μονάδες εργασίας, *A*, «αποδοτικότητα της εργασίας». Οι επιχειρήσεις λαμβάνουν το *A* εξωγενώς δεδομένο, προσλαμβάνουν εργασία και νοικιάζουν κεφάλαιο και πωλούν προϊόν σε ανταγωνιστικές αγορές. Στόχος τους είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, επειδή όμως είναι σε ανταγωνιστικό περιβάλλον και έχουν σταθερές αποδόσεις κλίμακας όλο το προϊόν δαπανάται σε αμοιβές συντελεστών παραγωγής και τα κέρδη είναι μηδενικά. Αν υπήρχαν κέρδη θα πήγαιναν στα νοικοκυριά. Το *A*, η «αποδοτικότητα της εργασίας» (όπως και στο υπόδειγμα Solow) αυξάνεται με σταθερό ρυθμό *g*.[30] Προκειμένου να απλουστεύσουμε τα πράγματα θεωρούμε ότι το κεφάλαιο δεν υπόκειται σε φυσική απόσβεση (δηλαδή δ=0)[31]

Νοικοκυριά

Υπάρχει δεδομένος αριθμός ίδιων νοικοκυριών. Συμβολίζουμε με *H* τον (σταθερό) αριθμό των νοικοκυριών στην οικονομία. *L* είναι ο αριθμός των ατόμων/εργατών/κεφαλαιούχων στην οικονομία που είναι όλα μέλη νοικοκυριών. Το L αυξάνει με εξωγενώς δεδομένο σταθερό ρυθμό *n*. Δηλ., $\hat{L} = \dot{L}/L = n$. Άρα, ο αριθμός των μελών κάθε νοικοκυριού στην χρονική στιγμή *t* είναι $L\left(t\right)/H$.[32] Κάθε μέλος προσφέρει μία μονάδα εργασίας στην χρονική στιγμή t. Το νοικοκυριό νοικιάζει (εκμισθώνει) στις επιχειρήσεις όλο το κεφάλαιο που κατέχει. Εφόσον το συνολικό κεφάλαιο στην οικονομία είναι *K*, το νοικοκυριό κάθε χρονική στιγμή διαθέτει κεφάλαιο $K\left(t\right)/H$, ενώ το *αρχικό του κεφάλαιο* την στιγμή $t = 0$, είναι $K\left(0\right)/H$. Το νοικοκυριό διαιρεί το εισόδημα που εισπράττει από την εργασία των μελών του και τις προσόδους του κεφαλαίου μεταξύ κατανάλωσης και αποταμίευσης, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει την χρησιμότητά του *U* για όλη την διάρκεια της άπειρης ζωής του.

$$U = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u\left(C\left(t\right)\right) \frac{L\left(t\right)}{H} dt \qquad (1)$$

---

[27] Για τις επιχειρήσεις αυτό δεν έχει τόση σημασία γιατί η μεγιστοποίηση του κέρδους γίνεται ανά πάσα χρονική στιγμή.

[28] ‘Μεγάλος’ σημαίνει αρκετά μεγάλος ώστε να υπάρχει τέλειος ανταγωνισμός. Θα μπορούσε να είναι μία μοναδική επιχείρηση που να συμπεριφέρεται ανταγωνιστικά.

[29] Δηλαδή, σταθερές αποδόσεις κλίμακος, πρώτη παράγωγος θετική, δεύτερη αρνητική, συνθήκες Inada.

[30] Δηλ., $\hat{A} = \dot{A}/A = g$, όπου *g* εξωγενώς δεδομένο.

[31] Το δ είναι ο συντελεστής απόσβεσης στο υπόδειγμα Solow.

[32] Τα νοικοκυριά ζούν επ’ άπειρον. Αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι και τα μέλη τους ζούν επ’ άπειρον. Αρκεί μόνο ο αριθμός να αυξάνεται με ρυθμό *n*, που είναι η διαφορά γεννήσεων-θανάτων-μετανάστευσης.

όπου $C(t)$ είναι *η κατανάλωση κάθε μέλους του νοικοκυριού στην στιγμή t*, $u\big(C(t)\big)$ είναι η *στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας* στην στιγμή *t*, (*instantaneous utility function*[33]) Τέλος, το *ρ*, είναι ένας *συντελεστής προεξόφλησης* ή χρονικής προτίμησης, που δείχνει πόσο το άτομο αποτιμά την μέλλουσα σε σχέση με την παρούσα κατανάλωση.

Εξήγηση της εξίσωσης (1)

Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τι σημαίνει αυτή συνάρτηση *U*. Το νοικοκυριό έχει *ανά πάσα στιγμή t*, την στιγμιαία χρησιμότητα $u\big(C(t)\big)$ για το σύνολο των μελών του $L(t)/H$. Υποθέτουμε ότι η στιγμιαία χρησιμότητα του νοικοκυριού είναι το άθροισμα των στιγμιαίων χρησιμοτήτων των μελών του, είναι δηλ., $u\big(C(t)\big)L(t)/H$. Η κατανάλωση όμως στην χρονική στιγμή t_1 δεν έχει το ίδιο βάρος με αυτήν της χρονικής στιγμή t_2 (όπου $t_1 < t_2$) γιατί η κατανάλωση στο παρόν είναι προτιμότερη από την ίδια κατανάλωση στο μέλλον. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι το νοικοκυριό δίνει μικρότερη βαρύτητα στην κατανάλωση των μελλοντικών γενεών, (προτιμώ να καταναλώσω εγώ μια μονάδα αγαθού από ότι το εγγόνι μου) ή στην μελλοντική κατανάλωση του ίδιου ατόμου (προτιμώ να καταναλώσω σήμερα μια μονάδα αγαθού από αύριο.) Ο τρόπος να εκφράσουμε αυτή την διαφορετική αποτίμηση γίνεται μέσω της προεξόφλησης. Ο συντελεστής προεξόφλησης *ρ* δεν αποτελεί επιτόκιο. Δηλώνει μια υποκειμενική αποτίμηση της σχέσης μεταξύ παρούσας και μέλλουσας κατανάλωσης, αλλά παρά την υποκειμενικότητά του θεωρείται σταθερός ανεξάρτητα από την χρονική περίοδο (δηλαδή, είναι ο ίδιος μεταξύ χρονικής στιγμής t και t+1, και t+s και t+s+1) και ισχύει για όλα τα άτομα στην οικονομία. Όσο μεγαλύτερο είναι το ρ τόσο μεγαλύτερη βαρύτητα δίνεται στο παρόν. Η προεξόφληση αυτή γίνεται με τον τύπο $e^{-\rho t}$. Άρα τελικά το νοικοκυριό μεγιστοποιεί την προεξοφλημένη σε παρούσα αξία στιγμιαία χρησιμότητα των μελών για όλες τις χρονικές στιγμές από την αρχική στιγμή (t=0) μέχρι το άπειρο. Το γεγονός αυτό το εκφράζουμε με το ολοκλήρωμα από μηδέν έως άπειρο.

Εξήγηση του τύπου προεξόφλησης $e^{-\rho t}$.

Ο τύπος αυτός μας δίνει την προεξόφληση με συντελεστή – ή επιτόκιο – *ρ*, με *συνεχή ανατοκισμό*. Αν υποθέσουμε ότι τοκίζουμε μια χρηματική μονάδα με ετήσιο επιτόκιο *ρ*, τότε μετά από ένα χρόνο το ποσό θα είναι (1+*ρ*). Αντίστοιχα μια χρηματική μονάδα ένα χρόνο αργότερα ισοδυναμεί με 1/(1+ρ) μονάδες σήμερα. Αν με το ίδιο επιτόκιο ανατοκίζω δύο φορές το χρόνο, μία χρηματική μονάδα ένα χρόνο μετά θα γίνει $(1+\rho/2)^2$. Δηλαδή, στο τέλος του εξαμήνου (με μισό επιτόκιο, ρ/2) κεφαλαιοποιούνται τόκοι ρ/2, άρα το ποσό γίνεται (1+ρ/2) το οποίο και τοκίζεται για το υπόλοιπο εξάμηνο για να γίνει $(1+\rho/2)^2$. Γενικά, αν ο ανατοκισμός γίνεται *ν* φορές τον χρόνο ο τύπος θα είναι $(1+\rho/\nu)^{\nu}$. Όταν το $\nu \to \infty$, τότε το όριο αυτής της ακολουθίας είναι e^{ρ}, όπου e είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων. Δηλαδή, $\lim_{\nu\to\infty}(1+\rho/\nu)^{\nu} = e^{\rho}$ [Θυμηθείτε από την άλγεβρα ότι $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$.] Μετά την παρέλευση χρόνου *t*, συνεχή ανατοκισμό και επιτόκιο *ρ* για

[33] Ορισμένες φορές αναφέρεται ως *ophelimity* ή *felicity function*. Η στιγμιαία χρησιμότητα εξαρτάται *μόνο* από την κατανάλωση της χρονικής στιγμής *t*. Ούτε και αυτή η υπόθεση είναι αθώα. Σημαίνει ότι η χρησιμότητα που αποκομίζω από την κατανάλωση είναι ίδια είτε είμαι 20 χρονών είτε 70 και ότι όλοι έχουμε την ίδια συνάρτηση χρησιμότητας.

μια μονάδα χρόνου, μια χρηματική μονάδα γίνεται $e^{\rho t}$ Άρα, μια χρηματική μονάδα μετά από χρόνο t, έχει παρούσα αξία $1/e^{\rho t} = e^{-\rho t}$, που παρουσιάζεται ως όρος στην εξίσωση (1)

Για να διευκολύνουμε την ανάλυση του υποδείγματος χρησιμοποιούμε μια εξειδικευμένη συνάρτηση χρησιμότητας, γνωστής και ως συνάρτηση σταθερής σχετικής αποστροφής του κινδύνου (Constant Relative Risk Aversion, CRRA)

$$u\left(C(t)\right) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta > 0, \quad \rho - n - (1-\theta)g > 0 \qquad (2)$$

Το μέτρο της σχετικής αποστροφής του κινδύνου (Relative Risk Aversion) ορίζεται ως $-C u''(C)/u'(C)$. Από την (2) προκύπτει ότι- $-C u''(C)/u'(C) = \theta$ [34]

Εξήγηση της CRRA συνάρτησης χρησιμότητας

Στην μικροοικονομική θεωρία επιλογής υπό συνθήκες αβεβαιότητας ενδιαφερόμαστε να δούμε κατά πόσον η επιλογή ενός «στοιχήματος» που αποτελείται από δύο συνδυασμούς αγαθών είναι προτιμότερη από την μαθηματική ελπίδα του στοιχήματος. Δηλαδή, αν έχουμε τους συνδυασμούς αγαθών C_1 και C_2, όπου $C_1 < C_2$, άρα και $u(C_1) < u(C_2)$, και το «στοίχημα» είναι ο συνδυασμός C_1 με πιθανότητα *p* και ο συνδυασμός C_2 με πιθανότητα (1-*p*), αν η χρησιμότητα του στοιχήματος $pu(C_1)+(1-p)u(C_2)$ είναι μικρότερη από την χρησιμότητα της μαθηματικής του ελπίδας $u(pC_1+(1-p)C_2)$ τότε το άτομο αποστρέφεται τον κίνδυνο. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση χρησιμότητας είναι κοίλη όπως στο διάγραμμα 1 του παραρτήματος 2. Αυξήσεις, δηλαδή της κατανάλωσης οδηγούν σε αναλογικά μικρότερες αυξήσεις τις χρησιμότητας. Το μέτρο της σχετικής αποστροφής του κινδύνου $-C u''(C)/u'(C)$ είναι γνωστό και ως Pratt-Arrow σχετική αποστροφή του κινδύνου.[35] Αν το μέτρο αυτό παραμένει σταθερό σημαίνει ότι αν το μέγεθος του στοιχήματος αυξάνεται η διάθεση να γίνει αποδεκτό αυξάνει αναλογικά με την αύξηση του πλούτου - δηλαδή του επιπέδου της κατανάλωσης του ατόμου.

Στο υπόδειγμα που εξετάζουμε δεν υπάρχει αβεβαιότητα. Η συνάρτηση όμως που χρησιμοποιούμε μας δείχνει μέσω του θ, πόσο αυξάνει η χρησιμότητα ανάλογα με την αύξηση της κατανάλωσης. Για τον λόγο αυτό, πολλοί συγγραφείς προτιμούν να ονομάζουν αυτήν την συνάρτηση χρησιμότητας *σταθεράς διαχρονικής ελαστικότητας υποκατάστασης* (*constant*

---

[34] Θυμηθείτε ότι

$$u'(C) \equiv \frac{\partial u(C)}{\partial C} = \frac{\partial \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}}{\partial C} = \frac{1-\theta}{1-\theta} C^{1-\theta-1} = C^{-\theta}$$

$$u''(C) \equiv \frac{\partial^2 u(C)}{\partial C} = \frac{\partial C^{-\theta}}{\partial C} = -\theta C^{-\theta-1}$$

$$-Cu''(C)/u'(C) = -\frac{C \cdot (-\theta C^{-\theta-1})}{C^{-\theta}} = -\frac{-\theta C^{-\theta}}{C^{-\theta}} = \theta$$

[35] Για μια μαθηματική ανάλυση του θέματος βλέπε Akira Takayama, (1994): *Analytical Methods in Economics*. Harvester Wheatsheaf, κεφάλαιο 5. Τα κλασσικά κείμενα είναι J.W. Pratt, (1964): “Risk Aversion in the Small and in the Large”, *Econometrica*, 32 (January/February), σσ. 132-36 και K.J Arrow, (1965): *Aspects in the Theory of Risk-Bearing*. Yrjö Jahnsson Lectures, Yrjö Jahnsson Sattio, Helsinski. Η ιστορία της ανάλυσης του κινδύνου στην χρησιμότητα προηγείται του Adam Smith. Η κλασσική ανάλυση είναι του Daniel Bernoulli στην Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολης το 1738, *Specimen theoriae novae de mensura sortis*. (Δείγμα της νέας θεωρίας μέτρησης της τύχης), όπου αναφέρεται και το γνωστό St. Petersburg’s paradox. Βλέπε τα λήμματα “Bernoulli, Daniel”, “Expected Utility and Mathematical Expectation”, “The Expected Utility Hypothesis”, στο *Palgrave:* O Frank Ramsey είχε επίσης σημαντική συμβολή στον χώρο (Βλ. “Ramsey, Frank Plumpton” στο *Palgrave*)

intertemporal elasticity of substitution, CIES).[36] Τι μας χρειάζεται μια συνάρτηση αυτής της μορφής; Μας βοηθάει να περιορίσουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης. Μπορεί το άτομο να προτιμά το σήμερα από το αύριο ως προς την κατανάλωσή του, αλλά δεν μεταφέρει όλη την κατανάλωσή του στο σήμερα διότι διαδοχικές ίσες αυξήσεις της κατανάλωσης οδηγούν σε διαδοχικά μικρότερες αυξήσεις της χρησιμότητάς. Προτιμώ ένα παγωτό σήμερα από ένα παγωτό αύριο, αλλά δεν προτιμώ τρία παγωτά σήμερα από δύο παγωτά σήμερα και ένα αύριο. Αν το θ είναι μηδέν, το άτομο είναι ουδέτερο απέναντι στον κίνδυνο, και διαδοχικές ίσες αυξήσεις της κατανάλωσης οδηγούν σε διαδοχικά ίσες αυξήσεις της χρησιμότητά και η σχέση κατανάλωσης χρησιμότητας είναι γραμμική. Αν το θ είναι μονάδα τότε $C^{1-\theta}\big/\left(1-\theta\right)=\ln C$[37]. Στο διάγραμμα 2 του παραρτήματος 3 φαίνεται η σχέση κατανάλωσης χρησιμότητας για διάφορες τιμές του θ.

Συμπεριφορά των δρώντων

Επιχειρήσεις

Η συμπεριφορά των επιχειρήσεων είναι απλή. Σε κάθε χρονική στιγμή απασχολούν τους συντελεστές παραγωγής κεφάλαιο και εργασία, τους πληρώνουν τα οριακά τους προϊόντα και πωλούν το προϊόν που προκύπτει. Δεδομένου ότι έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακας και ανταγωνιστικές αγορές, οι επιχειρήσεις έχουν μηδενικά κέρδη.

Θυμηθείτε από το υπόδειγμα Solow ότι το οριακό προϊόν του κεφαλαίου είναι f'(k)[38]. f(•) είναι η εντατική μορφή της συνάρτησης παραγωγής. Επειδή οι αγορές είναι ανταγωνιστικές το κεφάλαιο αμείβεται με το οριακό του προϊόν. Και επειδή δεν υπάρχει απόσβεση η πραγματική απόδοση του κεφαλαίου είναι η αμοιβή του ανά χρονική μονάδα. Ετσι το πραγματικό επιτόκιο της οικονομίας στην στιγμή t είναι:

$$r(t)=f'(k(t)) \qquad (3)$$

Το οριακό προϊόν μιας μονάδας αποδοτικής εργασίας είναι ίσο με το προϊόν ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας μείον την αμοιβή του κεφαλαίου[39] είναι ίσο δηλαδή με $\mathrm{f(k)-kf'(k)}$

Συνεπώς, ο πραγματικός μισθός ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας είναι:

$$w(t)=f(k(t))-k(t)f'(k(t)) \qquad (4)$$

---

[36] Μπορεί επίσης να δειχτεί ότι η ελαστικότητα υποκατάστασης κατανάλωσης μεταξύ δύο χρονικών περιόδων είναι 1/θ.

[37] Αφαιρέστε από την $C^{1-\theta}\big/\left(1-\theta\right)$ το $1\big/\left(1-\theta\right)$ το οποίο δεν επηρεάζει την συμπεριφορά της χρησιμότητας. Η συνάρτηση γίνεται τώρα $\left(C^{1-\theta}-1\right)\big/\left(1-\theta\right)$. Χρησιμοποιείστε τον κανόνα του de l'Hôpital:

$$\lim_{\theta\to1}\left(C^{1-\theta}-1\right)=\lim_{\theta\to1}\left(1-\theta\right)=0\Rightarrow\lim_{\theta\to1}\left[\left(C^{1-\theta}-1\right)\big/\left(1-\theta\right)\right]=\lim_{\theta\to1}\left(C^{1-\theta}-1\right)'\Big/\lim_{\theta\to1}\left(1-\theta\right)'=$$
$$=\lim_{\theta\to1}\left(C^{1-\theta}\ln C\right)\Big/\lim_{\theta\to1}\left(-1\right)=\ln C$$

[38] Θυμηθείτε ότι

$$F(K,AL)=ALf(K/AL),\ \partial F(K/AL)\Big/\partial K=ALf'(K/AL)\frac{\partial(K/AL)}{\partial K}=ALf'(K/AL)(1/AL)=f'(k)$$

[39] Εφόσον οι επιχειρήσεις εξαντλούν το προϊόν στις αμοιβές των παραγωγικών συντελεστών, το προϊόν f(k) που παράγεται ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας πρέπει να μοιραστεί σε κεφάλαιο και αποδοτική εργασία. Από αυτό οι επιχειρήσεις πληρώνουν το οριακό προϊόν f'(k) σε όλες τις μονάδες κεφαλαίου που αντιστοιχούν σε μια μονάδα αποδοτικής εργασίας, δηλαδή k (k=K/AL). Αρα η συνολική αμοιβή του κεφαλαίου ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας είναι kf'(k). Επομένως η αμοιβή κάθε μονάδας αποδοτικής εργασίας είναι f(k)-kf'(k).

Εφόσον το οριακό προϊόν της εργασίας (όχι της αποδοτικής εργασίας) είναι $A\partial F(K, AL)/\partial AL$ το εισόδημα από μισθούς κάθε εργάτη στην χρονική στιγμή t είναι A(t)w(t).[40]

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης του νοικοκυριού

Εισοδηματικός περιορισμός

Το αντιπροσωπευτικό νοικοκυριό λαμβάνει την διαδρομή των αμοιβών του κεφαλαίου και της εργασίας στον χρόνο ως δεδομένα. Ο *εισοδηματικός του περιορισμός* (*budget constraint*) είναι ότι η παρούσα αξία της κατανάλωσής του στην διάρκεια της ζωής του δεν μπορεί να υπερβεί την παρούσα αξία των εισοδημάτων από εργασία και την αξία του αρχικού κεφαλαίου που κατέχει.

Προκειμένου να γράψουμε την ανισότητα του εισοδηματικού περιορισμού πρέπει πρώτα να αντιμετωπίσουμε το γεγονός ότι το πραγματικό επιτόκιο r(t) με το οποίο και γίνεται η αναγωγή σε παρούσα αξία (προεξόφληση) των οικονομικών μεγεθών μεταβάλλεται στον χρόνο. Έτσι ορίζουμε με. $R(t) \equiv \int_{\tau=0}^{t} r(\tau)d\tau$. Μια μονάδα αγαθού που επενδύεται στον χρόνο μηδέν αποδίδει (t) $e^{R(t)}$ μονάδες στον χρόνο t. Αν, π.χ., το επιτόκιο ήταν σταθερό $\bar{r}$, τότε το R(t) είναι απλά $\bar{r}t$.[41]

Ο εισοδηματικός περιορισμός αποτελείται από δύο σκέλη (α) την παρούσα αξία της κατανάλωσης και (β) την παρούσα αξία των εισοδημάτων από εργασία και το αρχικό κεφάλαιο.

Αριστερό σκέλος

Εφόσον κάθε μέλος καταναλώνει C(t) κάθε χρονική στιγμή. και τα μέλη του νοικοκυριού είναι L(t)/H, η συνολική κατανάλωση την στιγμή t είναι C(t)L(t)/H. Προεξοφλώντας με τον συντελεστή $e^{-R(t)}$, δηλαδή το αντίστροφο της απόδοσης του κεφαλαίου μέχρι την στιγμή t, και ολοκληρώνοντας για όλη την διάρκεια της ζωής του νοικοκυριού προκύπτει το πρώτο σκέλος της ανισότητας (5)

Δεξιό σκέλος

Εφόσον το συνολικό κεφάλαιο της οικονομίας είναι K(t) την στιγμή t, και ο αριθμός των νοικοκυριών H, και είναι όλα ίδια, το κάθε νοικοκυριό ξεκινά με αρχικό κεφάλαιο K(0)/H. Το εισόδημα από εργασία ανά μέλος είναι A(t)w(t) - θυμηθείτε ότι κάθε μέλος προσφέρει μια μονάδα απλής εργασίας κάθε στιγμή - και επειδή κάθε νοικοκυριό έχει L(t)/H μέλη, το εισόδημα από εργασία του νοικοκυριού κάθε στιγμή t είναι A(t)L(t)/H. Προεξοφλώντας και ολοκληρώνοντας το εισόδημα για όλη την ζωή του νοικοκυριού σε παρούσα αξία δίνεται από τον δεύτερο όρο του δεξιού σκέλους της (5)[42]

[40] Το οριακό προϊόν της αποδοτικής εργασίας είναι $\frac{\partial F(K,AL)}{\partial AL}$. Άρα το οριακό προϊόν της (απλής) εργασίας είναι $\frac{\partial F(K,AL)}{\partial AL}\frac{\partial AL}{\partial L} = A\frac{\partial F(K,AL)}{\partial AL}$. Κάθε εργάτης αμείβεται με μισθό w(t) για κάθε μονάδα αποδοτικής εργασίας που 'κατέχει'. Επειδή όμως έχει A(t) μονάδες αποδοτικής εργασίας αμείβεται με μισθό A(t)w(t).

[41] Σκεφθείτε ότι έχω καταθέσει ένα κεφάλαιο στην τράπεζα με συνεχή ανατοκισμό, αλλά το επιτόκιο αλλάζει συνεχώς. "Πως θα μπορούσα να υπολογίσω το κεφάλαιο συν τόκους που θα πάρω μετά από περίοδο t;" Το R(t) δίνει την απάντηση σε αυτό το ερώτημα. Επειδή το ολοκλήρωμα καλύπτει από την χρονική στιγμή 0 μέχρι την στιγμή t, το R(t) δεν είναι το ισοδύναμο με το μέσο επιτόκιο που ισχύει, δεν πολλαπλασιάζεται δηλαδή με τον χρόνο. Αν θέλαμε κάτι τέτοιο θα διαιρούσαμε το R(t) με το t

[42] Για να βεβαιωθείτε ότι κατανοήσατε τον εισοδηματικό περιορισμό απαντήσατε το ερώτημα, "γιατί η απόδοση των αποταμιεύσεων δεν μπαίνει σαν όρος στην (5);"

Εισοδηματικός περιορισμός

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} C(t) \frac{L(t)}{H} dt \leq \frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} A(t) w(t) \frac{L(t)}{H} dt \qquad (5)$$

Όπως και στο υπόδειγμα Solow, είναι ευκολότερο να δουλέψουμε με την εντατική μορφή των μεγεθών, δηλαδή εκφρασμένα σε μονάδες αποδοτικής εργασίας. Αν ορίσουμε την κατανάλωση κάθε μέλους ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας c(t)=C(t)/A, και θυμηθούμε τον ορισμό του κεφαλαίου ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας k(t)=K(t)/[A(t)L(t)] και αντικαταστήσουμε τις εξισώσεις αυτές στην (5) προκύπτει ότι[43]:

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) \frac{A(t)L(t)}{H} dt \leq k(0) \frac{A(0)L(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} w(t) \frac{A(t)L(t)}{H} dt \qquad (6)$$

Δεδομένου ότι[44] $A(t)L(t)=A(0)L(0)e^{(n+g)t}$ μπορώ να αντικαταστήσω αυτή την εξίσωση στην (6) και διαιρώντας και τα δύο σκέλη με A(0)L(0)/H, προκύπτει ο εισοδηματικός περιορισμός σε εντατική μορφή: $\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) e^{(g+n)t} dt \leq k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} w(t) e^{(g+n)t} dt$

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} c(t) e^{(g+n)t} dt \leq k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} w(t) e^{(g+n)t} dt \qquad (7)$$

Τεχνική σημείωση.
Επειδή είναι δύσκολο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στην (7) μπορούμε να εκφράσουμε τον εισοδηματικό περιορισμό σε όρους της συμπεριφοράς στο όριο (limiting behavior) του κεφαλαίου που κατέχει το νοικοκυριό. Έτσι μπορούμε να δούμε την συμπεριφορά της οικονομίας στο όριο. Μεταφέροντας όλους τους όρους της ανισότητας (6) από το ένα σκέλος και ενοποιώντας τα ολοκληρώματα, έχουμε – κάνοντας χρήση του γεγονότος ότι k(0)A(0)L(0)=K(0).

$$\frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)} \left[w(t) - c(t) \right] A(t) \frac{L(t)}{H} dt \geq 0 \qquad (8)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε το ολοκλήρωμα από t=0 έως t=∞ ως όριο. Έτσι η (8) γίνεται:

$$\lim_{s \to \infty} \left[\frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{s} e^{-R(t)} \left[w(t) - c(t) \right] A(t) \frac{L(t)}{H} dt \right] \geq 0 \qquad (9)$$

Παρατηρήσατε ότι στον χρόνο s το κεφάλαιο του νοικοκυριού είναι[45]:

$$\frac{K(s)}{H} = e^{R(s)} \frac{K(0)}{H} + \int_{t=0}^{s} e^{R(s)-R(t)} [w(t) - c(t)] \frac{A(t)L(t)}{H} dt \qquad (10)$$

Η παράσταση στην (10) είναι $e^{R(s)}$ φορές η παράσταση στην (9) Άρα μπορούμε να γράψουμε τον εισοδηματικό περιορισμό απλά ως:

[43] Προσέξτε ότι την κατανάλωση C(t) την διαιρώ μόνο με A, ενώ το κεφάλαιο K(t) με AL για να προκύψουν τα c(t) και k(t). Αυτό συμβαίνει γιατί η κατανάλωση είχε οριστεί ανά άτομο, ενώ το κεφάλαιο είναι το συνολικό κεφάλαιο της οικονομίας

[44] Εφόσον $A(t)=A(0)e^{gt}$ και $L(t)=L(0)e^{nt}$. Οι ίδιοι τύποι ισχύουν και στο υπόδειγμα Solow.

[45] Ο πρώτος όρος του δεξιού σκέλους $e^{R(s)} \frac{K(0)}{H}$ είναι η συνεισφορά του αρχικού κεφαλαίου στην περίοδο 0. Η αποταμίευση στην περίοδο t είναι [w(t)-c(t)]A(t)L(t) που μπορεί να είναι και αρνητική. Ο όρος $e^{R(s)-R(t)}$ δείχνει πως η αξία των αποταμιεύσεων μεταβάλλεται από s σε t. (με το $e^{-R(t)}$ προεξοφλώ και με το $e^{R(s)}$ φέρνω την αξία στην στιγμή s.)

$$\lim_{s\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-R(s)}\,\frac{K(s)}{H}\right]\geq 0 \qquad (11)$$

Με αυτόν το τρόπο ο εισοδηματικός περιορισμός λέει ότι τα περιουσιακά στοιχεία των νοικοκυριών δεν μπορεί να είναι αρνητικά στο όριο. Εφόσον δε, το K(s) είναι ευθέως ανάλογο[46] με το $k(s)e^{(n+g)s}$, μπορούμε να γράψουμε την (11) ως.

$$\lim_{s\to\infty}\left[e^{-R(s)}e^{(n+g)s}k(s)\right]\geq 0 \qquad (12)$$

Η έκφραση αυτή έχει και μια άλλη σημασία. Σημαίνει ότι παρόλο που το νοικοκυριό ζεί επ'άπειρο δεν μπορεί να μεταφέρει άπειρα χρέη στο μέλλον. Αν μπορούσε να το κάνει αυτό θα κατανάλωνε σήμερα όσο ήθελε με χρέωση στο άπειρο. Αποκλείονται δηλαδή, περιπτώσεις 'πυραμίδας' ή σχημάτων Ponzi (Ponzi schemes.)[47]. Στην (12) φαίνεται καλύτερα και η σχέση του επιτοκίου δανεισμού με τις παραμέτρους αύξησης της αποδοτικής εργασίας. Βλέπε και Robert J. Barro & Xavier Sala-i-Martin (1995): *Economic Growth*. McGraw-Hill, New York.

Αντικειμενική συνάρτηση[48]

Ας εξετάσουμε τώρα την συνάρτηση χρησιμότητας του νοικοκυριού. Η στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας δίνεται από την (2). Από τον ορισμό της κατανάλωσης ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας [$c(t)\equiv C(t)/A(t)$] και από την εξίσωση αύξησης του A, $A(t)=A(0)e^{gt}$ μπορούμε να γράψουμε την u(t) σε απλοποιημένους όρους:

$$\begin{aligned}\frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} &= \frac{[A(t)c(t)]^{1-\theta}}{1-\theta}\\ &= \frac{[A(0)e^{gt}]^{1-\theta}c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\\ &= A(0)^{1-\theta}e^{(1-\theta)gt}\,\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\end{aligned} \qquad (13)$$

Κάνοντας χρήση της (13) και του γεγονότος ότι $L(t)=L(0)e^{nt}$, η συνάρτηση χρησιμότητας για την διάρκεια ζωής του νοικοκυριού (αντικειμενική συνάρτηση) (1) γίνεται:

[46] $K(s)=k(s)A(s)L(s)=k(s)A(0)e^{gs}\,L(0)e^{ns} = A(0)L(0)\,k(s)e^{(n+g)s}$ Το A(0)L(0) είναι σταθερό άρα τα μεγέθη είναι ευθέως ανάλογα.

[47] Πυραμίδα ή Σχήμα Ponzi είναι μια απάτη με την μορφή επενδυτικών υπηρεσιών όπου οι επενδύσεις των τελευταίων συμμετεχόντων, χρησιμοποιούνται για να πληρώσουν τεχνητά υψηλό μέρισμα στους προηγούμενους επενδυτές δημιουργώντας έτσι πολύ ελκυστικές αποδόσεις και προσέλευση νέων επενδυτών…. Κάποτε φυσικά το σχήμα 'σκάει' με τον δημιουργό του πολύ μακριά (αν είναι τυχερός) ή στην φυλακή (αν είναι άτυχος). Κάτι τέτοιο έγινε πριν λίγα χρόνια σε διάφορες χώρες του πρώην υπαρκτού σοσιαλισμού με κλασικό παράδειγμα την γειτονική μας Αλβανία. Αντίστοιχα – αλλά χωρίς συνήθως οικονομικό κόστος – είναι και τα γράμματα 'που φέρνουν τύχη' αν τα στείλεις σε άλλους 10 φίλους. Στις ΗΠΑ ο Bernie Madoff ομολόγησε πρόσφατα (3/2009) ότι είχε οργανώσει ένα σχήμα Ponzi αποσπώντας πάνω από 50 δισεκατομμύρια δολάρια!

[48] Με τον όρο 'αντικειμενική συνάρτηση' (objective function) εννοούμε την συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε, εν προκειμένω την συνάρτηση χρησιμότητα για την διάρκεια ζωής του νοικοκυριού.

$$U=\int_{t=0}^{\infty}e^{-\rho t}\frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\frac{L(t)}{H}dt=$$
$$=\int_{t=0}^{\infty}e^{-\rho t}\left[A(0)^{1-\theta}e^{(1-\theta)gt}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}\right]\frac{L(0)e^{nt}}{H}dt=$$
$$=A(0)^{1-\theta}\frac{L(0)}{H}\int_{t=0}^{\infty}e^{-\rho t}e^{(1-\theta)gt}e^{nt}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt=$$
$$=B\int_{t=0}^{\infty}e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt,\quad B=A(0)^{1-\theta}\frac{L(0)}{H},\ \beta=\rho-n-(1-\theta)g \qquad (14)$$

Από την (2) προκύπτει ότι η παράμετρος β είναι θετική.[49]

Μεγιστοποίηση.

Το πρόβλημα του νοικοκυριού είναι η επιλογή του c(t) ώστε να μεγιστοποιήσει την (14) με δεδομένο τον εισοδηματικό περιορισμό. Παρόλον ότι πρόκειται για επιλογή του c για κάθε χρονική στιγμή, είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε παραδοσιακές μαθηματικές τεχνικές μεγιστοποίησης για την ανάλυση του προβλήματος[50]. Δεδομένου ότι η οριακή χρησιμότητα του νοικοκυριού είναι πάντα θετική η ανισότητα του εισοδηματικού περιορισμού στην μεγιστοποίηση γίνεται ισότητα.

Μπορούμε λοιπόν χρησιμοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση (14) και τον εισοδηματικό περιορισμό (7) να καταστρώσουμε την μεγιστοποιητέα συνάρτηση Lagrange:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}&=B\int_{t=0}^{\infty}e^{-\beta t}\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}dt\\&+\lambda\left[k(0)+\int_{t=0}^{\infty}e^{-R(t)}w(t)e^{(g+n)t}dt-\int_{t=0}^{\infty}e^{-R(t)}e^{(g+n)t}c(t)\,dt\right]\end{aligned} \qquad (15)$$

Το νοικοκυριό επιλέγει άπειρα c, ένα για κάθε στιγμή t. Για κάθε ατομικό c(t) η συνθήκη πρώτης τάξεως είναι[51]:

$$Be^{-\beta t}c(t)^{-\theta}=\lambda e^{-R(t)}e^{(n+g)t} \qquad (16)$$

Για να κατανοήσουμε την σημασία της (16) πάρτε τους (φυσικούς) λογαρίθμους των δύο σκελών.[52]

---

[49] Τα B και β, δεν είναι νέοι παράμετροι, είναι συναρτήσεις των παραμέτρων του υποδείγματος.. Απλά μας επιτρέπουν να γράψουμε πιο συνοπτικά την U

[50] Η παρακάτω ανάλυση δεν έχει την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα. Όσοι ενδιαφέρονται για μια αυστηρότερη αντιμετώπιση ας ανατρέξουν στους Robert J. Barro & Xavier Sala-i-Martin (1995): *Economic Growth*. McGraw-Hill, New York. Χρειάζεται όμως γνώση της θεωρίας calculus of variations και του θεωρήματος Pontryagin.

[51] Θυσιάζοντας κάποια μαθηματική αυστηρότητα, αφαιρέστε τα ολοκληρώματα και τα διαφορικά, παραγωγίστε ως προς c(t) τις παραστάσεις και εξισώστε την L (για κάθε χρονική στιγμή) με το μηδέν. Ο πρώτος και δεύτερος όρος μέσα στην παρένθεση έχουν μηδενική παράγωγο γιατί δεν περιέχουν το c(t). Ο τρίτος όρος στην παρένθεση είναι το c(t) πολλαπλασιασμένο με όρους που δεν το περιέχουν, άρα η παράγωγος του είναι το γινόμενο αυτών των όρων δηλαδή $\lambda e^{-R(t)}e^{(n+g)t}$. Η παράγωγος του πρώτου όρου της L είναι $Be^{-\beta t}c(t)^{-\theta}$

(διότι, $\frac{\partial Be^{-\beta t}c^{1-\theta}/(1-\theta)}{\partial c}=\frac{Be^{-\beta t}}{1-\theta}\frac{\partial c^{1-\theta}}{\partial c}=\frac{Be^{-\beta t}}{1-\theta}(1-\theta)c^{-\theta}=Be^{-\beta t}c^{-\theta}$)

[52] Υπενθυμίζω βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων: *ln*(xy)=*ln*x+*ln*y, *ln*(e ^{x})=x

$$\ln B - \beta t - \theta \ln c(t) = \ln \lambda - R(t) + (n+g)t \quad (17)$$

Και εφόσον η (17) ισχύει για κάθε t θα ισχύει ότι και οι παράγωγοι των σκελών ως προς t, είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή[53],

$$-\beta - \theta \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = -r(t) + (n+g) \qquad (18)$$

Λύνοντας ως προς $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$ και ενθυμούμενοι ότι $\beta = \rho - n - \left(1-\theta\right) g$, έχουμε

Εξίσωση Euler

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= \frac{r(t) - n - g - \beta}{\theta} \\ &= \frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta} \end{aligned} \qquad (19)}$$

Για να κατανοήσουμε την (19), παρατηρήσατε ότι εφόσον η κατανάλωση ανά άτομο C(t) ισούται με c(t)A(t), ο ρυθμός αύξησης της είναι ίσος με τον ρυθμό αύξησης της c(t) που δίνεται από την (19) συν τον ρυθμό αύξησης του A, g. Άρα ο ρυθμός αύξησης της C(t) είναι ίσος με [r(t)-ρ]/θ[54] Άρα η (19) μας λέει ότι η κατανάλωση ανά άτομο αυξάνεται εάν η πραγματική απόδοση είναι μεγαλύτερη από τον βαθμό που τα νοικοκυριά προεξοφλούν την μελλοντική κατανάλωση, και μειώνεται αν συμβαίνει το αντίθετο. Όσο μικρότερο είναι το θ, όσο λιγότερο δηλαδή, μεταβάλλεται η οριακή χρησιμότητα με την μεταβολή της κατανάλωσης, τόσο μεγαλύτερη είναι η μεταβολή της κατανάλωσης στην ανταπόκριση που έχει στην διαφορά του πραγματικού επιτοκίου με τον ρυθμό προεξόφλησης.
Η (19) είναι γνωστή και ως εξίσωση Euler.
Η εξίσωση αυτή περιγράφει πως το c συμπεριφέρεται στον χρόνο με δεδομένο το c(0). Αν το c δεν ακολουθεί την (19) το νοικοκυριό μπορεί να επαναδιατάξει την κατανάλωση του μεγιστοποιώντας την χρησιμότητά του για όλη του την ζωή χωρίς να επηρεάσει την παρούσα αξία των δαπανών του. Η επιλογή του c(0) καθορίζεται από τον περιορισμό ότι η παρούσα αξία της κατανάλωσης σε όλη την ζωή του νοικοκυριού ισούται με τον αρχικό πλούτο συν την παρούσα αξία των μελλοντικών αποδοχών. Αν η c(0) επιλεγεί χαμηλή, τότε οι καταναλωτικές δαπάνες στην οδό που περιγράφεται από την (19) δεν εξαντλούν τον πλούτο όλης της ζωής, άρα κάποιο άλλο υψηλότερο μονοπάτι (path) είναι εφικτό. Αν το c(0) είναι πολύ ψηλό, τότε το μονοπάτι δεν είναι εφικτό αφού χρησιμοποιεί περισσότερο πλούτο από τον διαθέσιμο.

[53] Θυμηθείτε ότι d*ln*x/dx=1/x, άρα $\frac{d \ln c(t)}{dt} = \frac{d \ln c(t)}{dc(t)} \frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{c(t)} \dot{c}(t) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$ και ότι $R\left(t\right) \equiv \int_{\tau=0}^{t} r\left(\tau\right) d\tau$. Η παράγωγος σταθεράς είναι φυσικά μηδέν.

[54] $\frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta} + g = \frac{r(t) - \rho - \theta g + \theta g}{\theta} = \frac{r(t) - \rho}{\theta}$

Παράρτημα 1

Μεταβλητές και παράμετροι του υποδείγματος Ramsey

Μεταβλητές

$Y(t)$ = Προϊόν (Output)
$K(t)$ = Κεφάλαιο (Capital). Το συνολικό κεφάλαιο της οικονομίας.
$L(t)$ = Εργασία (Labor) Η συνολική εργασία της οικονομίας, δηλαδή ο συνολικός αριθμός μελών των νοικοκυριών
$A(t)$ = "Γνώση" ή "Αποδοτικότητα της εργασίας" ("Knowledge" or "effectiveness of labor") Αρα A(t)L(t) η συνολική αποδοτική εργασία (effective labor) της οικονομίας
$C(t)$ = Κατανάλωση ανά μέλος νοικοκυριού
$r(t)$ = επιτόκιο, αμοιβή μονάδας κεφαλαίου
$w(t)$ = μισθός ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας
U = χρησιμότητα (utility) της συνολικής ζωής του νοικοκυριού
$u(t)$ = στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας (instantaneous utility function)
$R(t)$ = απόδοση κεφαλαίου από την αρχική στιγμή έως την στιγμή t.
t = χρόνος (time) Αρχική στιγμή t=0.

Μεταβλητές σε εντατική μορφή
y = $Y(t)/[A(t)L(t)]$ προϊόν ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας
k = $K(t)/[A(t)L(t)]$ κεφάλαιο ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας
c = $C(t)/A(t)$ κατανάλωση ανά μονάδα αποδοτικής εργασίας

Παράμετροι
n = ρυθμός αύξησης εργασίας
g = ρυθμός αύξησης γνώσης
ρ = συντελεστής προεξόφλησης
θ = παράμετρος συνάρτησης χρησιμότητας Constant Relative Risk Aversion
H = αριθμός νοικοκυριών στην οικονομία

Παράρτημα 2

John Maynard Keynes (1933): *Essays in Biography*, London, Macmillan.
[Τόμος X, στην έκδοση των απάντων του Keynes (Collected Works), από την Royal Economic Society και τον Macmillan το 1972, κεφάλαιο 29]

Ο RAMSEY ΩΣ ΟΙΚΟΝΟΜΟΛΟΓΟΣ[55]

Ο θάνατος στην ηλικία των είκοσι έξι ετών του Frank Ramsey, Fellow[56] στο King's College στο Cambridge, πρώην υπότροφου του Winchester και του Κολεγίου Trinity, γιου του Προέδρου του Magdalene[57], υπήρξε μια βαριά απώλεια για την καθαρή Οικονομική Θεωρία, παρόλο που τα κύρια ενδιαφέροντά του ήταν η Φιλοσοφία και η Μαθηματική Λογική. Από πολύ νεαρή ηλικία, γύρω στα δεκάξι, θαρρώ, το πρόωρα ανεπτυγμένο μυαλό έδειξε έντονο ενδιαφέρον για τα οικονομικά προβλήματα. Οικονομολόγοι που ζούσαν στο Cambridge είχαν συνηθίσει από την εποχή που ήταν προπτυχιακός φοιτητής να δοκιμάζουν τις θεωρίες τους στην κοφτερή κόψη των κριτικών και λογικών του ικανοτήτων. Αν είχε τραβήξει τον ευκολότερο δρόμο που του έδειχνε η κλίση του, δεν είμαι βέβαιος ότι δεν θα είχε ανταλλάξει τις βασανιστικές ασκήσεις των βασικών αρχών της σκέψης και της ψυχολογίας - όπου το μυαλό κυνηγάει την ουρά του -με τα απολαυστικά μονοπάτια του δικού μας πιο ευχάριστου κλάδου των ηθικών επιστημών, όπου η θεωρία και τα γεγονότα, η ενορατική φαντασία και η πρακτική κρίση, αναμιγνύονται με έναν τρόπο οικείο στον ανθρώπινο νού.

Οταν κατέβαινε από τα βραχώδη ύψη που ήταν συνηθισμένος, πάλι ζούσε χωρίς προσπάθεια σε μια ατμόσφαιρα πιο αραιή από εκείνη που συνηθίζουν να αναπνέουν οι περισσότεροι οικονομολόγοι, και χειριζόταν τον τεχνικό εξοπλισμό της επιστήμης μας με την άνετη χάρη κάποιου που είναι συνηθισμένος σε κάτι πολύ πιο δύσκολο. Αλλά άφησε πίσω του σε έντυπη μορφή (ξέχωρα από τα φιλοσοφικά κείμενά του) μόνο δύο μαρτυρίες των δυνάμεων του - τα άρθρα που δημοσιεύτηκαν στην *Economic Journal*: "Συμβολή στην Θεωρία της Φορολογίας" (A Contribution to the Theory of Taxation) τον Μάρτιο του 1927 και την "Μαθηματική Θεωρία της Αποταμίευσης" (A Mathematical Theory of Saving) τον Δεκέμβριο του 1928. Το τελευταίο αυτό άρθρο είναι, νομίζω, μια από τις πιο αξιοθαύμαστες συνεισφορές στα μαθηματικά οικονομικά που έγιναν ποτέ, τόσο ως προς την εγγενή σημασία και δυσκολία του θέματός του, την δύναμη και κομψότητα των τεχνικών μεθόδων που χρησιμοποίησε, όσο ως προς την εναργή καθαρότητα της διαύγασης με την οποία ο αναγνώστης αισθάνεται το μυαλό του συγγραφέα να προσεγγίζει το θέμα του. Το άρθρο είναι τρομακτικά δύσκολο να διαβαστεί από έναν οικονομολόγο, αλλά δεν είναι καθόλου δύσκολο να εκτιμήσει κανείς πώς η επιστημονική και η αισθητική ποιότητα συνδυάζονται μέσα του.

Η απώλεια του Ramsey, είναι λοιπόν, για τους φίλους του, για τους οποίους η προσωπική του ποιότητα συνδυαζόταν αρμονικότατα με την διανοητική του δύναμη, κάτι που θα πάρει πολύ καιρό να ξεχάσουν. Η πληθωρική Johnson[58]ιανή φιγούρα του, το αυθόρμητο

[55] Από την *Economic Journal,* Μάρτιος 1930

[56] Fellow, μέλος ακαδημαϊκού ιδρύματος κυρίως Κολεγίου. (σημείωση του μεταφραστή, Ν.Θ)

[57] King's, Trinity, Magdalene (προφέρεται Μώντλιν), Κολέγια του Πανεπιστημίου του Cambridge. Ο Keynes ήταν και αυτός Fellow του King's College. Το Winchester είναι αγγλικό public school όπως το Eaton και το Harrow(σ.τ.μ.)

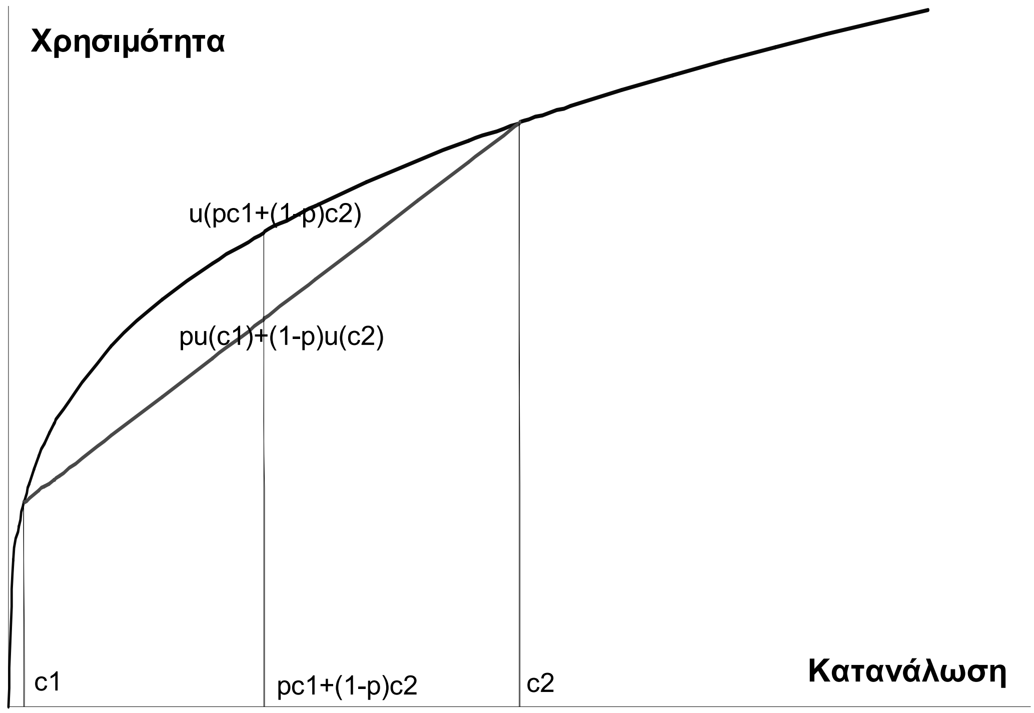
[58] Ο Keynes αναφέρεται στον Dr. Samuel Johnson, επιφανή λόγιο του 18ου αιώνα, συντάκτη του πρώτου ουσιαστικά λεξικού της αγγλικής γλώσσας. Το σωματικό βάρος του Ramsey, όπως και του Johnson, ήταν πάνω από το optimal growth path ("17 stones," περίπου 110 κιλά κατά δήλωσή του). (σ.τ.μ.)

γάργαρο γέλιο του, η απλότητα των αισθημάτων του και αντιδράσεών του, που κάποτε σε μισό-τρόμαζαν και καμιά φορά ήταν σχεδόν σκληρά με την ευθύτητα και κυριολεξία τους, η τιμιότητα του μυαλού και της καρδιάς του, η μετριοφροσύνη του, και η εκπληκτική ευχερής αποτελεσματικότητα της διανοητικής του μηχανής που άλεθε σταθερά πίσω από τους φαρδιούς κροτάφους του και το πλατύ γελαστό του πρόσωπο, χάθηκαν για μας στην ακμή της υπεροχής του και προτού δρέψει τον θέρο της ζωής και του έργου του.

Μάρτιος 1930

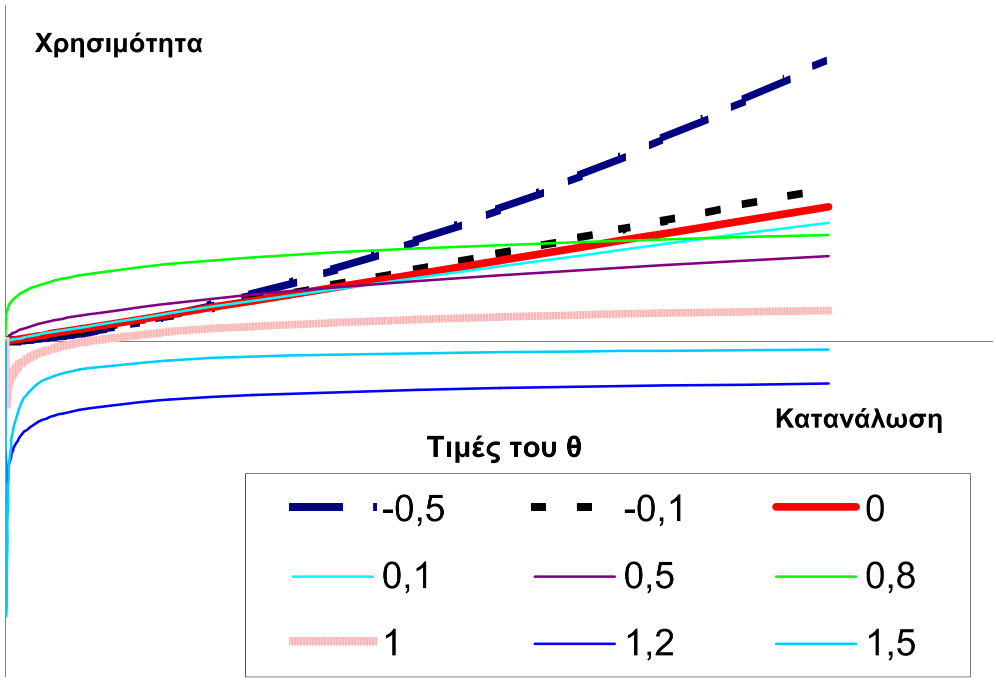
Παράρτημα 3

Διάγραμμα 1
Αβεβαιότητα και συνάρτηση χρησιμότητας



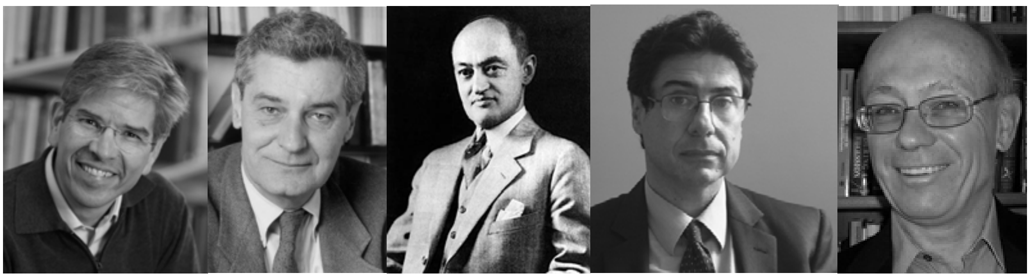
Διάγραμμα 2

CRRA συνάρτηση χρησιμότητας για διαφορετικές τιμές του θ



ΕΚΤΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
Ενδογενής μεγέθυνση

Οι σημειώσεις αυτές βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στο εγχειρίδιο των Wendy Carlin και David Soskice, *Macroeconomics: Imperfections, Institutions and Policies*, Oxford University Press, 2006 στο άρθρο του R.E. Lucas "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, τόμος 22 (1988), σσ. 3-42 και στα άρθρα των Charles Jones και Philippe Aghion & Peter Howitt στο Philippe Aghion & Steven N. Durlauf (επιμ.): *Handbook of Economic Growth*, τόμος A. Amsterdam: North-Holland, Elsevier, 2005.



Paul Romer, Robert Lucas, Joseph A. Schumpeter, Philippe Aghion, Peter Howitt

Στο υποδείγματα εξωγενούς μεγέθυνσης, κυρίως στο μονοτομεακό νεοκλασικό υπόδειγμα Solow, ο ρυθμός μεγέθυνσης δίνεται εξωγενώς. Αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του πληθυσμού (εργατικού δυναμικού) L είναι n, τότε ο ρυθμός μεγέθυνσης (σταθερής κατάστασης) του προϊόντος (Y) και του κεφαλαίου (K) είναι και αυτός n, ενώ ο ρυθμός μεγέθυνσης των αντίστοιχων κατά κεφαλήν μεγεθών είναι μηδενικός. Άρα το υπόδειγμα Solow δεν μπορεί να εξηγήσει την μεγέθυνση των κατά κεφαλήν μεγεθών *σε κατάσταση ισορροπίας*, χωρίς να κάνει επιπλέον υποθέσεις.[59] Υποθέτει λοιπόν ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής $Y(t) = F\big(K(t), A(t)L(t)\big)$ όπου $A(t)$ είναι η τεχνολογία η οποία αυξάνει την παραγωγικότητα της εργασίας και θεωρεί αυτήν την τεχνολογία εξωγενώς δεδομένη με σταθερό ρυθμό μεγέθυνσης $a = \dot{A}/A$. Τότε στο υπόδειγμα Solow ο ρυθμός μεγέθυνσης σε ισορροπία των κατά κεφαλήν μεγεθών y και k είναι ίσος με a, δηλ., $g_y = g_k = a$.

Αυτό όμως δεν μπορεί να εξηγήσει γιατί σήμερα ο ρυθμός ανάπτυξης είναι τόσο μεγαλύτερος από ότι πριν από 200 χρόνια ή γιατί οι χώρες του ΟΟΣΑ έχουν τόσο μεγαλύτερο κατά κεφαλήν εισόδημα από τις λιγότερο ανεπτυγμένες χώρες. Η μόνη εξήγηση στο πλαίσιο του υποδείγματος Solow είναι ότι υπάρχει διαφορά στην τεχνολογία ή στην *Συνολική Παραγωγικότητα των Συντελεστών Παραγωγής* (Total

[59] Τονίζω το «*σε κατάσταση ισορροπίας*», διότι το υπόδειγμα Solow είναι συμβατό με διαφορετικούς ρυθμούς μεγέθυνσης εκτός κατάστασης ισορροπίας. Όσο περισσότερο απέχει μια οικονομία από την κατάσταση ισορροπίας τόσο ταχύτερα μεγεθύνεται προς αυτή.

Ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν κεφαλαίου προκύπτει από την εξίσωση Solow $\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k \Rightarrow g_k = \dot{k}/k = s\,f(k)/k - (\delta + n)$ και ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν εισοδήματος είναι $g_y = \dot{y}/y = \sigma_K\, g_k$ όπου σ_K είναι το ποσοστό αμοιβής του κεφαλαίου στο ΑΕΠ.

Factor Productivity ή TFP). Γιατί όμως διαφέρει αυτή σε διάφορες περιόδους ή χώρες; Αν οι διαφορές οφείλονται σε διαφορές στις καινοτομίες, δεν είναι σαφές γιατί αυτές οι τελευταίες διαφέρουν. Οι καινοτομίες είναι αποτέλεσμα αποφάσεων που παίρνουν τα οικονομικά υποκείμενα. Πρόκειται δηλ., για *οικονομικές αποφάσεις* οι οποίες πρέπει να μπορεί να εξηγηθούν από την οικονομική θεωρία.[60] Ούτε, εξ άλλου, είναι εύλογο να θεωρηθεί ότι η τεχνολογική πρόοδος είναι ανεξάρτητη από τα υπόλοιπα μεγέθη του υποδείγματος, όπως και ιδιαίτερα, το απόθεμα κεφαλαίου. Παράλληλα, στο υπόδειγμα Solow, οι φθίνουσες αποδόσεις του κεφαλαίου έχουν ως αποτέλεσμα ο ρυθμός μεγέθυνσης σε ισορροπία να είναι ανεξάρτητος από το ποσοστό αποταμίευσης, γεγονός που φαίνεται αντίθετο με την οικονομική διαίσθηση.

Η νεοκλασική οικονομική θεωρία αρκετά νωρίς προσπάθησε να ενσωματώσει στα υποδείγματα μεγέθυνσης μία συνάρτηση η οποία να εξαρτά τον ρυθμό τεχνολογικής προόδου από τις άλλες μεταβλητές του υποδείγματος, αλλά μόνον από το τέλος της δεκαετίας του 1980 άρχισαν τα υποδείγματα αυτά, τα λεγόμενα *υποδείγματα ενδογενούς μεγέθυνσης* (endogenous growth models) [ή *Νέα Θεωρία της Μεγέθυνσης* (New Growth Theory)] να αναπτύσσονται συστηματικά, ιδίως ύστερα από την συνεισφορά του Paul Romer.[61] Αυτό που είναι παράξενο είναι ότι η νεοκλασική θεωρία με τα υποδείγματα αυτά ξαναγυρνά μετά από αιώνες στους κλασικούς της πολιτικής οικονομίας και ιδιαίτερα τον Adam Smith ο οποίος στον *Πλούτο των Εθνών* το 1776 ξεκίναγε με την προσπάθεια να εξηγήσει την μεγέθυνση των εθνικών οικονομιών μέσα από τις βελτιώσεις στην παραγωγικότητα της εργασίας που συνεπάγεται ο καταμερισμός της εργασίας. Πρόκειται δηλ., για «παλιό κρασί σε νέα ασκιά».[62]
Στις σημειώσεις αυτές θα ξεκινήσουμε με το πιο χαρακτηριστικό υπόδειγμα της ενδογενούς μεγέθυνσης, το λεγόμενο υπόδειγμα *AK*. Η ονομασία του οφείλεται στο γεγονός ότι βασίζεται πάνω σε μια συνάρτηση παραγωγής η οποία δεν είναι η τυπική νεοκλασική αλλά συναρτά το προϊόν με γραμμικό τρόπο από το κεφάλαιο, υποθέτει δηλαδή ότι $Y_t = AK_t$ όπου το A είναι μια σταθερά. Ας εξετάσουμε λοιπόν αυτήν το βασικό υπόδειγμα.

Το υπόδειγμα *AK*

Στο υπόδειγμα αυτό δεν έχουμε πλέον την υπόθεση των φθινουσών αποδόσεων του κεφαλαίου. Αντίθετα, όπως είπαμε, θεωρούμε ότι η συνάρτηση παραγωγής έχει την εξής μορφή:

$$Y_t = AK_t \qquad (1)$$

Η παράμετρος A είναι μια σταθερά που συμβολίζει το επίπεδο της τεχνολογίας και είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο. Υποθέτουμε όπως και στο υπόδειγμα Solow ότι το ποσοστό αποταμίευσης είναι σταθερό και ίσο με s, και ότι η απόσβεση εί-

[60] Larry E. Jones & Rodolfo E. Manuelli, "Neoclassical Models of Endogenous Growth: The Effects of Fiscal Policy, Innovation and Fluctuations", στο Philippe Aghion και Steven N. Durlauf (επιμ.), *Handbook of Economic Growth*, τόμος A. Amsterdam: Elsevier, 2005.

[61] "Increasing Returns and Long-Run Growth", *Journal of Political Economy*, τόμος 94, τεύχος 5 (Οκτ. 1986), σσ. 1002-1037 και "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, τόμος 98, τεύχος 5, "Part 2: The Problem of Development: A Conference on the Institute for the Study of Free Enterprise Systems". (Οκτ.. 1990), σσ. S71-102. Βλ. επίσης και του ιδίου "The Origins of Endogenous Growth", *Journal of Economic Perspectives*, τόμος 8, τεύχος 1 (χειμώνας 1994), σσ. 3-22

[62] Βλ. ιδιαίτερα το άρθρο των Heinz Kurz και Neri Salvadori, "The 'New' Growth Theory: Old Wine in New Goatskins", στο F. Coricelli, M. Di Matteo & F. H. Hahn (επιμ.), *New Theories in Growth and Development*, London: Macmillan, 1998.

ναι ίση με δK, όπου δ είναι ένας σταθερός συντελεστής απόσβεσης (οικονομικής απαξίωσης) του κεφαλαίου. Το υπόδειγμα είναι βεβαίως και αυτό μονοτομεακό και το παραγόμενο προϊόν είναι το ίδιο με το κεφάλαιο. Ό,τι αποταμιεύεται επενδύεται άμεσα και η καθαρή επένδυση $(I = \dot{K})$ δηλαδή η προσθήκη στο απόθεμα κεφαλαίου είναι η αποταμίευση μείον την απόσβεση. Η αποταμίευση είναι βεβαίως sY.
Η εξίσωση της συσσώρευσης του κεφαλαίου είναι συνεπώς η ακόλουθη.

$$\begin{aligned} &\dot{K} = sY - \delta K = sAK - \delta K = K(sA - \delta) \Rightarrow \\ &g_K \equiv \frac{\dot{K}}{K} = sA - \delta \end{aligned} \qquad \text{υπόδειγμα } AK \quad (2)$$

Όπου g_K είναι ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου.

Θυμηθείτε ποια ήταν η αντίστοιχη εξίσωση στο υπόδειγμα του Solow.

$$\dot{K} = sF(K, L) - \delta K$$

Στην δε περίπτωση της συνάρτησης Cobb-Douglas $Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$ η εξίσωση αυτή ήταν

$$\begin{aligned} &\dot{K} = sK^{\alpha} L^{1-\alpha} - \delta K \Rightarrow \\ &g_K \equiv \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{L^{1-\alpha}}{K^{1-\alpha}} - \delta \end{aligned} \qquad \text{υπόδειγμα Solow}$$

Παρατηρείστε ότι ενώ ο ρυθμός μεγέθυνσης είναι σταθερός και εξαρτάται από το s στο υπόδειγμα AK, στο υπόδειγμα Solow το g_K μειώνεται όσο αυξάνει το κεφάλαιο,[63] άρα μακροπρόθεσμα ένα υψηλότερο s δεν έχει μόνιμη επίπτωση πάνω στον ρυθμό μεγέθυνσης. Αντίθετα στο υπόδειγμα AK μια αύξηση του ποσοστού αποταμίευσης, του επιπέδου της τεχνολογίας και μια μείωση του συντελεστή απόσβεσης όλα αυξάνουν τον ρυθμό μεγέθυνσης. Σε αντίθεση με το υπόδειγμα Solow επίσης δεν έχουμε ενδιαφέροντα αποτελέσματα μετάβασης. Ενώ στο υπόδειγμα Solow μια μεταβολή του s αυξάνει προσωρινά τον ρυθμό μεγέθυνσης για να τον επαναφέρει στο επίπεδο ισορροπίας,[64] στο υπόδειγμα AK μια μεταβολή του s μεταβάλλει άμεσα και στιγμιαία τον ρυθμό μεγέθυνσης. Αυτό σημαίνει ότι στο υπόδειγμα AK δεν υπάρχει

---

[63] $\frac{\partial g_K}{\partial K} = (\alpha - 1)sK^{\alpha} L^{1-\alpha} < 0$

[64] Θυμηθείτε ότι στην εντατική μορφή το υπόδειγμα Solow έχει $\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k \Rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta)$. Το υπόδειγμα ισορροπεί όταν $\dot{k} = 0$ και τότε το k^* είναι αυτό για το οποίο ισχύει $sf(k^*) = (n+\delta)k^*$. Για $s' > s$ θα έχουμε ότι $k^{*\prime} > k^*$ αλλά ο κατά κεφαλήν ρυθμός μεγέθυνσης σε ισορροπία είναι μηδενικός. Μέχρι όμως να ισορροπήσει ο ρυθμός μεγέθυνσης θα είναι $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta) = s'\left[\frac{f(k)}{k} - \frac{f(k^{*\prime})}{k^{*\prime}}\right]$

σύγκλιση. Δυο χώρες που έχουν τις ίδιες παραμέτρους (A, s, δ) θα εξακολουθήσουν να μεγεθύνονται με τον ίδιο ρυθμό.

Το υπόδειγμα *AK* δεν είναι πλήρες. Στην πραγματικότητα τα αποτελέσματά του εμπεριέχονται στην βασική του παραδοχή, δηλ. την υπόθεση των σταθερών αποδόσεων κλίμακας ως προς το κεφάλαιο. Τα περισσότερα υποδείγματα ενδογενούς μεγέθυνσης προσπαθούν να εξηγήσουν γιατί δεν υπάρχουν φθίνουσες αποδόσεις ως προς το κεφάλαιο. Μπορούμε να διακρίνουμε τρεις βασικές εξηγήσεις:
(α) την επίπτωση της γνώσης στην συσσώρευση κεφαλαίου, (β) την συσσώρευση του ανθρώπινου κεφαλαίου και (γ) την δραστηριότητα έρευνας και ανάπτυξης.

Α. Η επίπτωση της γνώσης στην συσσώρευση του κεφαλαίου.
Τα υποδείγματα δίνουν έμφαση στην έννοια των παραπροϊόντων της γνώσης (knowledge spillover). Τέτοια είναι η περίπτωση όταν μια καινοτομία ή μια βελτίωση που λαμβάνει χώρα σε μία επιχείρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί από μία άλλη επιχείρηση χωρίς η τελευταία να πρέπει να την πληρώσει, στο ακέραιο τουλάχιστον. Έχουμε δηλαδή τεχνολογικές εξωτερικές οικονομίες κλίμακας. Τα spillovers λειτουργούν ως η μηχανή της μεγέθυνσης. Μπορεί να εξηγηθεί έτσι το γεγονός ότι οι οικονομίες μεγεθύνονται περισσότερο από όσο θα ανέμενε κανείς από την μεγέθυνση του κεφαλαίου και της εργασίας. Επίσης η έννοια των εξωτερικών οικονομιών κλίμακας μας επιτρέπει να εργασθούμε με δύο διαφορετικές συναρτήσεις παραγωγής: μία στο επίπεδο της επιχείρησης και μία στο επίπεδο της οικονομίας.

Ήδη από το 1962 ο Marvin Frankel διερευνώντας τον ρόλο των διαφορετικών συναρτήσεων παραγωγής στην μεγέθυνση παρατηρούσε ότι η χρήση της συνάρτησης παραγωγής Cobb-Douglas στην μεγέθυνση έχει την «ατυχή συνέπεια ότι η αύξηση της παραγωγικότητας λαμβάνει χώρα ανεξάρτητα από το απόθεμα κεφαλαίου. [...] Αυτή η προσαρμογή της συνάρτησης Cobb-Douglas στο πλαίσιο της θεωρίας της μεγέθυνσης συνεπάγεται την θυσία μιας ικανοποιητικής εξήγησης της ίδιας της μεγέθυνσης». Από την άλλη μεριά, εξετάζοντας υποδείγματα με συνάρτηση παραγωγής *AK* παρατηρούσε ότι «Οι οικονομολόγοι βρίσκουν αυτά τα υποδείγματα ελκυστικά επειδή δίνουν έμφαση στην συσσώρευση του κεφαλαίου ως «μηχανής της μεγέθυνσης» - μια έμφαση που έχει βαθιές ρίζες στην οικονομική σκέψη – και επειδή δίνουν ρεαλιστικά και ικανοποιητικά αποτελέσματα.» Αυτό που απασχολούσε τους νεοκλασικούς οικονομολόγους ήταν ότι στο επίπεδο της ατομικής επιχείρησης δεν μπορούσαν να ξεχάσουν την μικροοικονομική τους θεωρία της κατανομής και της διανομής του εισοδήματος που βασίζεται πάνω σε συναρτήσεις παραγωγής τύπου Cobb-Douglas. Η λύση που πρότεινε ο Frankel ήταν η εξής:
Κάθε ξεχωριστή επιχείρηση μέσα στην οικονομία έχει μια συνάρτηση παραγωγής τύπου Cobb-Douglas.

$$Y_i = K_i^{\alpha}\left(AL_i\right)^{1-\alpha}$$

όπου ο δείκτης i συμβολίζει κάθε επιχείρηση ($i = 1, 2, \ldots$). Σε αντίθεση όμως με τα υποδείγματα εξωγενούς ανάπτυξης, ο Frankel μετέτρεψε το A από έναν εξωγενή συντελεστή παραγωγικότητας σε μια μεταβλητή που εξαρτάται από το επίπεδο της συσσώρευσης του κεφαλαίου στην οικονομία συνολικά. Παρά το γεγονός ότι το Α εξαρτάται από το κεφάλαιο, στο επίπεδο της συνάρτησης παραγωγής της ατομικής επιχείρησης εισέρχεται πολλαπλασιαστικά με την εργασία ως AL_i. Αυτό μπορεί να εκφράζει το γεγονός ότι η τεχνολογική γνώση εκφράζεται στην αύξηση της δεξιότητας στο μικροοικονομικό επίπεδο της επιχείρησης αυξάνοντας την παραγωγικότητα της εργασίας. Στην πραγματικότητα όμως, μια αύξηση της ποιότητας του κεφαλαίου ή της οργάνωσης της παραγωγής μπορεί κάλλιστα να φαίνεται στο επίπεδο της παραγωγικότητας της εργασίας: η παραγωγικότητα του εργαζόμενου μπορεί να αυξάνεται επειδή εργάζεται με έναν καλύτερο υπολογιστή ή ένα αναβαθμισμένο λογισμικό. Εξ άλλου, σε μια συνάρτηση παραγωγής Cobb-Douglas το πως ενσωματώνουμε την τεχνολογία είναι μάλλον θέμα προτίμησης αφού η πραγματική μαθηματική μορφή της συνάρτησης δεν μεταβάλλεται.[65]

Σε κάθε περίπτωση το A δίνεται ως συνάρτηση του συνολικού κεφαλαίου της οικονομίας $K = \sum_i K_i$ από την εξίσωση:

$$A = A_0 K^{\eta}$$

όπου το η είναι μια θετική σταθερά. Η γνώση δηλαδή λειτουργεί ως δημόσιο αγαθό: δεν μπορεί κάποιος να αποκλειστεί από την χρήση του και η χρήση που κάνει ο ένας δεν αποκλείει την χρήση του άλλου. Μια κλασική περίπτωση στην βιβλιογραφία μιας τέτοιας συνάρτησης είναι η έννοια της «μάθησης μέσα από την πράξη» (learning-by-doing). Η αύξηση της παραγωγής βελτιώνει την παραγωγικότητα της εργασίας. Ο Kenneth J. Arrow μάλιστα σε ένα κλασικό άρθρο του που δημοσιεύθηκε και αυτό το 1962 δημιούργησε ένα υπόδειγμα μεγέθυνσης που βασιζόταν πάνω σε αυτήν την ιδέα. Ένα παράδειγμα που ανέφερε ο Arrow από την αεροναυπηγική βιομηχανία ήταν ότι ο χρόνος εργασίας που χρειάζεται για την κατασκευή του κελύφους ενός αεροσκάφους είναι αντίστροφος της κυβικής ρίζας των αεροσκαφών που έχουν παραχθεί.

Συνεπώς, στο επίπεδο της οικονομίας η συνάρτηση παραγωγής γίνεται

$$Y = K^{\alpha}\left(AL\right)^{1-\alpha} = K^{\alpha}\left(A_0 K^{\eta} L\right)^{1-\alpha} = A_0^{\,1-\alpha} K^{\alpha+\eta(1-\alpha)} L^{1-\alpha}$$

Έχουμε τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Στο επίπεδο της ατομικής επιχείρησης η συνάρτηση παραγωγής έχει σταθερές αποδόσεις κλίμακας και φθίνουσες αποδόσεις στο κεφάλαιο, εφόσον κάθε επιχείρηση λαμβάνει το *A* ως δεδομένο.
2. Στο επίπεδο της οικονομίας η συνάρτηση παραγωγής έχει αύξουσες αποδόσεις κλίμακας αφού $\alpha + \eta(1-\alpha) + (1-\alpha) > 1$.
3. Το μέγεθος των επιπτώσεων της γνώσης στην συσσώρευση του κεφαλαίου εξαρτάται από την παράμετρο η. Αν είναι μεγαλύτερη της μονάδος οι αποδόσεις της συσσώρευσης του κεφαλαίου ως προς την συσσώρευση της γνώσης είναι σταθερές, αν $\eta < 1$ τότε είναι φθίνουσες και αν $\eta > 1$ είναι αύξουσες.

Αν $\eta = 1$ τότε το υπόδειγμα είναι ενδογενούς μεγέθυνσης τύπου *AK*

Είναι φανερό ότι αν $\eta = 1$ τότε $Y = A_0^{\,1-\alpha} K L^{1-\alpha}$, δηλαδή αν οι αποδόσεις της συσσώρευσης του κεφαλαίου ως προς την συσσώρευση της γνώσης είναι σταθερές , τότε η συνολική οικονομία μπορεί να περιγραφεί με το υπόδειγμα ΑΚ. Έτσι έχουμε ένα

[65] Παρατηρείστε ότι θα μπορούσα να ξαναγράψω την $Y_i = K_i^{\alpha}\left(AL_i\right)^{1-\alpha}$ ως $Y_i = \left(A_K K_i\right)^{\alpha}\left(A_L L_i\right)^{1-\alpha} = \left(A_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha} A_L^{\,1-\alpha} K_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha} = A^{1-\alpha} K_i^{\alpha} L_i^{1-\alpha}$

υπόδειγμα ενδογενούς ανάπτυξης το οποίο είναι συμβατό με την νεοκλασική συνάρτηση παραγωγής στο επίπεδο της ατομικής επιχείρησης.

Αν $\eta < 1$ έχουμε μεν ενδογενή τεχνική πρόοδο αλλά όχι ενδογενή μεγέθυνση.
Αν $\eta < 1$ η μεγέθυνση δεν εξαρτάται μεν από το *s*, όπως στο υπόδειγμα *AK*, αλλά αυξάνει το κατά κεφαλήν προϊόν. Ξαναγράφουμε την συνάρτηση παραγωγής της οικονομίας και αναζητούμε τον κοινό ρυθμό μεγέθυνσης προϊόντος και κεφαλαίου. Με άλλα λόγια, από την συνάρτηση παραγωγής $Y = A_0^{1-\alpha} K^{\alpha+\eta(1-\alpha)} L^{1-\alpha}$ λογαριθμίζοντας και παραγωγίζοντας έχουμε

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \left[\alpha + \eta(1-\alpha)\right]\frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L} \Rightarrow$$
$$g_Y = \left[\alpha + \eta(1-\alpha)\right] g_K + (1-\alpha) n$$

Εξισώνοντας το g_Y με το g_K έχουμε [66]

$$g_Y = g_K = \left[\alpha + \eta(1-\alpha)\right] g_Y + (1-\alpha) n \Rightarrow$$
$$g_Y \left[(1-\alpha) - \eta(1-\alpha)\right] = (1-\alpha) n \Rightarrow$$
$$g_Y = \frac{n}{1-\eta}$$

Άρα ο ρυθμός μεγέθυνσης του *κατά κεφαλήν προϊόντος* είναι[67]

$$g_y = g_Y - n = \frac{n}{1-\eta} - n = \frac{\eta}{1-\eta} n$$

Η περίπτωση αυτή διαφέρει τόσο από την περίπτωση του υποδείγματος Solow στο οποίο ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν προϊόντος είναι μηδενικός χωρίς τεχνική πρόοδο ή ίσος με τον ρυθμό μεγέθυνσης της εξωγενούς τεχνικής προόδου x, όσο και από την περίπτωση του υποδείγματος *AK* της ενδογενούς ανάπτυξης όπου ο ρυθμός μεγέθυνσης εξαρτάται από το ποσοστό αποταμίευσης. Παρουσιάζει όμως το παράδοξο ότι εξαρτάται θετικά από τον ρυθμό αύξησης του πληθυσμού, γεγονός που κάνει το υπόδειγμα αυτό ακατάλληλο για την εξήγηση των φαινομένων της μεγέθυνσης σε ξεχωριστές οικονομίες.

Β. Συσσώρευση ανθρώπινου κεφαλαίου.

Ένας άλλος τρόπος με τον οποίο μπορεί να εξηγηθεί η ενδογενής μεγέθυνση είναι με την εισαγωγή της έννοιας του ανθρώπινου κεφαλαίου. Το τυπικό υπόδειγμα εδώ οφείλεται στον Νομπελίστα Robert E. Lucas (1988)[68]. Στο υπόδειγμα αυτό νοείται ως ανθρώπινο κεφάλαιο, το οποίο συμβολίζομε με h_t, το γενικό επίπεδο δεξιότητας

---

[66] Υπενθυμίζω ότι γενικά $g_X \equiv \hat{X} \equiv \frac{\dot{X}}{X}$ και ότι $\frac{\dot{L}}{L} = n$

[67] Υπενθυμίζω ότι $y = Y/L$ και ότι γενικά αν $x = y/z \Rightarrow g_x = g_y - g_z$

[68] Robert E. Lucas, Jr., "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, 22 (1988), 3-42.

ενός εργάτη που του επιτρέπει να είναι παραγωγικότερος με την εξής έννοια: ένας εργάτης με ανθρώπινο κεφάλαιο h_t παράγει όσο δύο εργάτες με ανθρώπινο κεφάλαιο $h_t/2$. Η θεωρία του ανθρωπίνου κεφαλαίου επίσης εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο κάθε άτομο αποφασίζει να κατανείμει τον χρόνο του μεταξύ του να παράγει και να αποκτήσει ανθρώπινο κεφάλαιο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ένα άτομο αφιερώνει ποσοστό u_t ($0 \le u_t \le 1$) του χρόνου του για να παράγει και ποσοστό $1-u_t$ για την απόκτηση ανθρώπινου κεφαλαίου. Χρειαζόμαστε επίσης μια θεωρία που να δείχνει πως συσσωρεύεται το ανθρώπινο κεφάλαιο. Ας υποθέσουμε επίσης ότι υπάρχει μια «τεχνολογία» συσσώρευσης του ανθρώπινου κεφαλαίου της μορφής $\dot{h}_t = h_t^{\zeta} G(1-u_t)$, όπου $G(1-u_t)=0$ όταν $u_t = 1$ δηλαδή το ανθρώπινο κεφάλαιο δεν αυξάνει όταν δεν επενδύουμε χρόνο στην απόκτησή του. Ο Lucas παρατήρησε ότι αν υποθέσουμε ότι $\zeta < 1$, τότε το υπόδειγμά μας δεν διαφέρει από εκείνο του Solow, απλά το κάνει πιο περίπλοκο. Αυτό συμβαίνει διότι και σε αυτήν την περίπτωση θα εξακολουθήσουμε να έχουμε φθίνουσες αποδόσεις στο κεφάλαιο. Χρησιμοποιώντας εμπειρικά στοιχεία από τους οικονομολόγους του ανθρώπινου κεφαλαίου[69] θεώρησε ότι η συσσώρευση του ανθρώπινου κεφαλαίου μπορεί να προσεγγισθεί από μια εξίσωση του τύπου:

$$\dot{h}_t = c h_t (1-u_t)$$

Αν δηλαδή αφιερώσουμε όλο μας τον χρόνο αποκτώντας ανθρώπινο κεφάλαιο – όταν δηλ., $u_t = 0$ – τότε το ανθρώπινο κεφάλαιο μεγεθύνεται με μέγιστο ρυθμό $g_h = \dot{h}/h = c$. Αν υποθέσουμε ότι το u_t παραμένει σταθερό και ίσο με u τότε ο ρυθμός μεγέθυνσης του ανθρώπινου κεφαλαίου είναι ίσος με

$$g_h = \dot{h}/h = c\left(1-u\right)$$

Ας εκφράσουμε τώρα την συνάρτηση παραγωγής στην εντατική της μορφή:

$$y_t = Ak_t^{\alpha}\left(u_t h_t\right)^{1-\alpha}$$

Γιατί επιλέξαμε αυτήν την μορφή; Αν η αρχική συνάρτηση παραγωγή ήταν της μορφής $Y_t = AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$, τώρα με την υπόθεση του ανθρώπινου κεφαλαίου κάνουμε δύο παραδοχές: πρώτον, ότι δεν αφιερώνεται όλος ο διαθέσιμος χρόνος στην παραγωγή αλλά μόνον το ποσοστό u_t. Δεύτερον, ότι η εργασία είναι πιο παραγωγική επειδή εμπεριέχει ανθρώπινο κεφάλαιο. Άρα δεν έχουμε απλά εργασία L_t, αλλά ειδικευμένη εργασία $h_t L_t$. Το ανθρώπινο κεφάλαιο κατά κεφαλήν εμφανίζεται δηλ. πολλαπλασιαστικά στις φυσικές μονάδες εργασίας. Κατά συνέπεια στην συνάρτηση παραγωγής αντικαθιστούμε το L_t με $u_t h_t L_t$ και έχουμε $Y_t = AK_t^{\alpha}\left(u_t h_t L_t\right)^{1-\alpha}$. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της προηγούμενης εξίσωσης με L_t για να το φέρω στην *εντατική* μορφή έχω $y_t = Ak_t^{\alpha}\left(u_t h_t\right)^{1-\alpha}$. [Η αντίστοιχη εξίσωση χωρίς ανθρώπινο κεφάλαιο θα ήταν δηλ. $y_t = Ak_t^{\alpha}$]. Φυσικά αν το u_t είναι σταθερό η συνάρτηση παραγωγής είναι η $y_t = Ak_t^{\alpha}\left(uh_t\right)^{1-\alpha}$. Αυτήν μπορούμε να την ξαναγράψουμε ως εξής:

$$y_t = \underbrace{Au^{1-\alpha}}_{\Lambda}\underbrace{k_t^{\alpha} h_t^{1-\alpha}}_{\kappa_t} = \Lambda \kappa_t$$

[69] Ιδιαίτερα το άρθρο του Sherwin Rosen, "A Theory of Life Earnings", *Journal of Political Economy*, 84 (1976), 545-567-

Με άλλα λόγια επανα-ορίζουμε το $Au^{1-\alpha}$ ως μία σταθερά *Λ*, και το $k_t^{\alpha}h_t^{1-\alpha}$ ως «κεφάλαιο» με την διευρυμένη έννοια του όρου, ώστε να περιλαμβάνει φυσικό και ανθρώπινο κεφάλαιο. Άρα βλέπουμε ότι μπορούμε να μετατρέψουμε το υπόδειγμά μας σε ένα υπόδειγμα ενδογενούς μεγέθυνσης.

Ας δούμε τώρα την λεγόμενη «εξίσωση Solow» του υποδείγματος μας, την εξίσωση δηλ., συσσώρευσης του κατά κεφαλήν φυσικού κεφαλαίου. Έχουμε:

$$\dot{k}_t = s\left[Ak_t^{\alpha}(uh_t)^{1-\alpha}\right] - (\delta + n)k$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι το κεφάλαιο κατά κεφαλήν αυξάνεται κατά το ποσοστό του προϊόντος που αποταμιεύεται μείον το κατά κεφαλήν κεφάλαιο που χρειάζεται για να αναπληρώσει την απόσβεση (με συντελεστή *δ*) και την αύξηση του πληθυσμού (ο οποίος μεγεθύνεται με εξωγενή σταθερό ρυθμό *n*). Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με k_t προκύπτει ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν φυσικού κεφαλαίου.

$$g_k \equiv \frac{\dot{k}_t}{k_t} = s\left[Ak_t^{\alpha-1}(uh_t)^{1-\alpha}\right] - (\delta + n) = sAu^{1-\alpha}\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha-1} - (\delta + n) = s\Lambda\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\alpha-1} - (\delta + n)$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι αν πρόκειται να υπάρξει μεγέθυνση σταθερή κατάστασης κατά την οποία η μεγέθυνση του κεφαλαίου να είναι σταθερή όρος k_t/h_t πρέπει να είναι σταθερός. Αυτό θα συμβεί μόνον αν το κατά κεφαλήν φυσικό κεφάλαιο *k* και το κατά κεφαλήν ανθρώπινο κεφάλαιο *h* μεγεθύνονται με τον ίδιο ρυθμό. Αυτό όμως σημαίνει ότι $g_k = g_h$. Αλλά ο ρυθμός μεγέθυνσης του ανθρωπίνου κεφαλαίου είναι ήδη γνωστός από την εξίσωση $g_h = \dot{h}/h = c(1-u)$.

Ο Lucas μάλιστα προσθέτει ότι το ανθρώπινο κεφάλαιο μπορεί να έχει και άλλη μια επίδραση εντελώς ξεχωριστή από εκείνη της ενδογενούς μεγέθυνσης: μπορούμε να έχουμε και spillovers από το ανθρώπινο κεφάλαιο. Έχουμε δηλ., και εξωτερικότητες στο ανθρώπινο κεφάλαιο. Μπορεί η παραγωγικότητά μου να μην εξαρτάται μόνο από το δικό μου ανθρώπινο κεφάλαιο, αλλά και από το συνολικό ανθρώπινο κεφάλαιο της οικονομίας. Στην περίπτωση αυτή θα προσθέταμε έναν επιπλέον όρο στην συνάρτηση παραγωγής της οικονομίας, έστω $\bar{h}^{\phi}$, όπου η παύλα συμβολίζει ότι για τον κάθε ατομικό οικονομικό δρώντα, το μέσο ανθρώπινο κεφάλαιο στην οικονομία θεωρείται δεδομένο και το *φ* συμβολίζει το μέγεθος του spillover.

Έρευνα και Ανάπτυξη (Research and Development).

Μια από τις βασικές αντιρρήσεις στο υπόδειγμα Solow είναι ότι η τεχνική πρόοδος προκύπτει σαν αποτέλεσμα συνειδητής και στοχευμένης οικονομικής δραστηριότητας, Η τεχνική πρόοδος, σε μια καπιταλιστική οικονομία είναι, σε κάποιο μεγάλο βαθμό τουλάχιστον, αποτέλεσμα των καινοτομιών των επιχειρήσεων. Η ιδέα αυτή δεν είναι νέα στα οικονομικά. Ο Joseph A. Schumpeter (1883-1950) ο Αυστριακός οικονομολόγος και μετέπειτα καθηγητής στο Harvard είχε αναπτύξει την ιδέα αυτή σε ένα έργο του με τίτλο «Η θεωρία της οικονομικής ανάπτυξης» από το 1934. Για τον Schumpeter ο καπιταλισμός δεν προχωράει μέσα από τον επιχειρηματία τύπου Walras ο οποίος δεν έχει «ούτε κέρδος, ούτε ζημιά» και ο οποίος απλά βελτιστοποιεί τις ποσότητες των εισροών για να πετύχει το άριστο οικονομικό αποτέλεσμα. Αυτό είναι ουσιαστικά η δουλειά ενός manager. Ο πραγματικός επιχειρηματίας είναι αυτός που ανοίγει νέους δρόμους και υιοθετεί καινοτομίες στον χώρο της παραγωγής και των αγορών, οι οποίες του επιτρέπουν να απολαύσει υπερ-κανονικά κέρδη. Αυτό συμβαίνει διότι για ένα χρονικό διάστημα τουλάχιστον, μέχρι δηλαδή να λήξει η άδεια ευρεσιτεχνίας του ή οι ανταγωνιστές του να μπορέσουν να υιοθετήσουν ή και να υπερκεράσουν τις μεθόδους του, ο επιχειρηματίας έχει μονοπώλιο. Από αυτήν την σκοπιά το μονοπώλιο, όχι μόνο δεν είναι ο «κακός» της υπόθεσης ο οποίος δημιουργεί στρεβλώσεις στην τέλεια ανταγωνιστική αγορά και δρα εις βάρος των καταναλωτών, αλλά ο «ήρωας», ο Προμηθέας, ο οποίος ναι μεν δρα για το δικό του συμφέρον, αλλά ταυτόχρονα είναι αυτός που φέρνει την τεχνική πρόοδο. Στο σενάριο αυτό, δεν υπάρχει ισορροπία και αρμονία. Οι καινοτομίες, όταν εφαρμόζονται, καταστρέφουν μέρος του παλιού - ή το περιθωριοποιούν και το υποχρεώνουν να πουλήσει με αυξημένο κόστος. Υπάρχει μια θύελλα διαρκούς καταστροφής, (gale of perennial destruction) η οποία ωθεί την οικονομία προς τα εμπρός. Σύμφωνα με τον Schumpeter οι καινοτομίες είναι πέντε βασικών κατηγοριών:[70]

1. Η εισαγωγή ενός νέου αγαθού – δηλ. ενός αγαθού με το οποίο οι καταναλωτές δεν είναι εξοικειωμένοι – ή μιας νέας ποιότητας ενός αγαθού.
2. Η εισαγωγή μιας νέας μεθόδου παραγωγής, δηλ., μιας μεθόδου η οποία δεν έχει πρακτικά δοκιμαστεί στον αντίστοιχο βιομηχανικό κλάδο, η οποία δεν είναι απαραίτητο να βασίζεται πάνω σε μία επιστημονικά νέα ανακάλυψη, και η οποία μπορεί να έγκειται σε μια νέα μέθοδο εμπορικής διαχείρισης του αγαθού
3. Το άνοιγμα μιας νέας αγοράς, δηλ. μιας αγοράς στην οποία ο συγκεκριμένος βιομηχανικός κλάδος της υπό εξέταση χώρας δεν έχει εισέλθει ακόμα, ανεξάρτητα από το εάν ή όχι η αγορά αυτή προϋπήρχε.
4. Η κατάκτηση μιας νέας πηγής προμήθειας πρώτων ή ημικατειργασμένων υλών, πάλι ανεξάρτητα από το εάν η πηγή αυτή προϋπήρχε ή δημιουργήθηκε εκ νέου.
5. Η νέα οργάνωση ενός κλάδου, όπως η δημιουργία μονοπωλιακής θέσης, π.χ., μέσω της δημιουργίας ενός τραστ (γερμ. Vertrustung) ή διάλυση μιας μονοπωλιακής θέσης.

Η συζήτηση γύρω από τον ρόλο της καινοτομίας στην οικονομική μεγέθυνση είναι σαφώς πιο ενδιαφέρουσα από αυτήν που θα ακολουθήσει εδώ. Σκοπός μας είναι απλά να ενσωματώσουμε τις ιδέες του Schumpeter σε μια σχετικά απλοϊκή μορφή σε ένα υπόδειγμα ενδογενούς μεγέθυνσης.

Έτσι η πρώτη παρατήρηση που θα κάνουμε είναι ότι σε αυτού του τύπου τα υποδείγματα δίνουμε σημασία στο γεγονός ότι η τεχνική πρόοδος περνά μέσα από καινοτομίες οι οποίες μπορεί να έχουν το χαρακτηριστικό της μη αντιπαλότητας (non rivalry) αλλά διατηρούν την δυνατότητα αποκλεισμού. (excludability). Θυμηθείτε ότι οι περισσότερες ιδέες έχουν και μη αντιπαλότητα και μη δυνατότητα αποκλεισμού. Όταν χρησιμοποιώ τον διαφορικό λογισμό – ο οποίος αναπτύχθηκε από τον Νεύτωνα και τον Leibniz τον 17ο αιώνα – η χρήση που του κάνω δεν εμποδίζει και έναν άλλο να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο. Ούτε μπορώ να βάλω κάποιον να πληρώσει για την

[70] Joseph A. Schumpeter, *The Theory of Economic Development: An Inquiry into Profits, Capital, Credit, Interest, and the Business Cycle.* Translated from the German by Redvers Opie, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1962, στην σ. 66. Η μετάφραση έγινε από την 4η γερμανική έκδοση του 1934: *Theorie der wirtschaftlichen Entwicklung: Eine Untersuchung über Unternehmergewinn, Kapital, Kredit, Zins und den Konjukturzyklus*, Duncker & Humblot, Berlin. Στην 9η έκδοση του 1997 [επανέκδοση αυτής του 1934] το χωρίο είναι στις σσ. 100-1. Η 1η έκδοση ήταν το 1911.

χρήση της μεθόδου (non rivalry, non excludability). Αντίθετα, όταν χρησιμοποιώ τις υπηρεσίες του δικηγόρου μου ή του γιατρού μου, η ώρα που μου διαθέτει είναι ώρα που δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιος άλλος. Αν επίσης δεν καταβάλω την αμοιβή του δεν θα έχω τις υπηρεσίες του (rivalry and excludability). Αν πάλι αναπτύξω ένα λογισμικό ή ένα νέο φάρμακο και έχω τα πνευματικά δικαιώματα σε αυτό, έχω το φαινόμενο των καινοτομιών που περιγράφει ο Schumpeter. Η παραγωγή της επόμενης κόπιας του λογισμικού ή του επόμενου χαπιού έχει σχεδόν αμελητέο κόστος, αλλά η κατοχή των πνευματικών δικαιωμάτων σε αυτό μου επιτρέπει να αποκλείσω όποιον δεν θέλει να πληρώσει για να το αποκτήσει. Αυτό δημιουργεί αύξουσες αποδόσεις κλίμακας διότι ενώ το αρχικό κόστος της ανάπτυξης είναι πολύ μεγάλο η παραγωγή της επόμενης μονάδας έχει πολύ μικρό (οριακό) κόστος, ενώ το μέσο κόστος είναι φθίνον. Οι αύξουσες αποδόσεις κλίμακας δημιουργούν τις προϋποθέσεις για μια μη ανταγωνιστική αγορά.
Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η παραγωγή των καινοτομιών δεν είναι ουρανοκατέβατη. Προϋποθέτει την δέσμευση πόρων της κοινωνίας για έρευνα και ανάπτυξη (R&D). Άρα έχουμε «παραγωγή» δύο τύπων: καινοτομιών και αγαθών.

Μια απόπειρα λοιπόν δημιουργίας ενός υποδείγματος που ενσωματώνει την καινοτομία είναι στην πιο απλή του μορφή η διαίρεση του εργατικού δυναμικού (L) σε αυτούς που παράγουν το τελικό αγαθό (L^Y)και στους ερευνητές που παράγουν καινοτομίες (L^R). Το συνολικό εργατικό δυναμικό μεγεθύνεται με ρυθμό n, $\left(\dot{L}/L = n\right)$και οι ερευνητές με ρυθμό $\dot{L}^R/L^R = n^R$. Η συνάρτηση παραγωγής του τελικού αγαθού είναι της μορφής Cobb-Douglas:

$$Y_t = K_t^{\alpha}\left(A_t L_t^Y\right)^{1-\alpha}$$

Η παραγωγή καινοτομιών λαμβάνει μια γενική μορφή που εξαρτάται από το υπάρχον απόθεμα ιδεών και από τον αριθμό των ερευνητών.

$$\dot{A}_t = cA_t^{\eta} L_t^R$$

Η συνάρτηση αυτή μας λέει ότι η παραγωγή νέων καινοτομιών είναι ανάλογη του αριθμού των «ερευνητών», δηλ., των εργαζομένων στην έρευνα και ανάπτυξη, και σχετίζεται με το απόθεμα των ιδεών/καινοτομιών. (Το c είναι απλά ένας συντελεστής αναλογικότητας) Η κρίσιμη παράμετρος σε αυτήν την εξίσωση είναι το η.

1. $\eta < 0$. Αν το η είναι αρνητικό αυτό σημαίνει ότι το απόθεμα των ιδεών επιδρά αρνητικά στις νέες καινοτομίες, ως εάν να υπάρχει ένας δεδομένος αριθμός καινοτομιών που είναι να ανακαλυφθούν και έχουμε «ψαρέψει» τις περισσότερες. Είναι σαν να υπάρχουν 100 ψάρια στην λίμνη και όσα περισσότερα έχουμε ψαρέψει τόσα λιγότερα μας μένει να πιάσουμε. Φαίνεται όμως παράξενο, ειδικά στην παραγωγή των ιδεών, ότι όσα περισσότερα ξέρουμε, τόσα λιγότερα ανακαλύπτουμε.
2. $\eta = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση το υπάρχον «απόθεμα» ιδεών δεν επηρεάζει την παραγωγή νέων. Οι νέες ιδέες παράγονται απλά από τον αριθμό των «ερευνητών», δηλ. $\dot{A}_t = cL_t^R$

Αν τώρα ισχύει ότι $0 < \eta$ αυτό σημαίνει ότι οι νέες ιδέες επισωρεύονται πάνω στις παλιές. Ο Ισαάκ Νεύτων είχε πει κάποτε ότι «ό,τι πέτυχα το πέτυχα στέκοντας πάνω στις πλάτες των γιγάντων». Εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι «ιστάμενη στις πλάτες των γιγάντων» η παραγωγή νέας γνώσης έχει φθίνουσες, σταθερές και αύξουσες αποδόσεις κλίμακας.

3. $0 < \eta < 1$. Φαίνεται όπως θα δούμε πιο κάτω η πλέον εύλογη παραδοχή. Η προηγούμενη γνώση έχει θετική επίδραση στις νέες καινοτομίες, αλλά οι αποδόσεις είναι φθίνουσες.
4. $\eta = 1$. Ήταν η παραδοχή που έκαναν τα πρώτα υποδείγματα στον χώρο όπως αυτό του Romer.[71] Έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακας στην παραγωγή νέων ιδεών και αυτό αποτελεί παράγοντα ενδογενούς μεγέθυνσης.
5. $\eta > 1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε αύξουσες αποδόσεις στην γνώση. Εδώ το υπόδειγμα υποθέτει μια επιταχυνόμενη αύξηση στις καινοτομίες που είναι μάλλον υπερβολικό.

Συνήθως στην βιβλιογραφία εξετάζονται δύο περιπτώσεις η $\eta = 1$ και η $0 < \eta < 1$ ως οι πλέον εύλογες. Ας δούμε πρώτα την υπόθεση Romer, δηλ. ότι $\eta = 1$. Τότε η εξίσωση παραγωγής καινοτομιών γίνεται

$$\dot{A}_t = cA_t L_t^R \Rightarrow g_A \equiv \frac{\dot{A}_t}{A_t} = cL_t^R$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνικής προόδου εξαρτάται από τον αριθμό των «ερευνητών»: όσο αυξάνουν οι εργαζόμενοι στην Έρευνα & Ανάπτυξη τόσο αυξάνει και ο ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνικής προόδου. Αυτό θα οδηγούσε σε αποτελέσματα τα οποία είναι μάλλον αντίθετα με την εμπειρική παρατήρηση. Δεδομένου ότι το L^R αυξάνει, θα έπρεπε να αυξάνει αντίστοιχα και ο *ρυθμός* μεγέθυνσης της τεχνικής προόδου πράγμα που θα οδηγούσε σε «εκρηκτικά» αποτελέσματα. Κάτι τέτοιο είναι δύσκολο να το αποδεχθούμε. Όπως παρατήρησε ο Charles Jones[72] είναι πιο εύλογο να υποθέσουμε ότι $0 < \eta < 1$. Τότε η εξίσωση παραγωγής καινοτομιών γίνεται

$$\dot{A}_t = cA_t^{\eta} L_t^R \Rightarrow g_A \equiv \frac{\dot{A}_t}{A_t} = cA_t^{\eta-1} L_t^R$$

Αν υπάρχει μια οδός ισόρροπης μεγέθυνσης σε αυτήν την περίπτωση οι ρυθμοί μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν προϊόντος, κεφαλαίου και τεχνικής προόδου πρέπει να είναι ίσοι. Άρα ισχύει ότι $g_y = g_k = g_A$, αλλά για να ισχύει αυτό θα πρέπει επίσης να ισχύει ότι ο λόγος $L_t^R / A_t^{1-\eta}$ να είναι σταθερός. Πρέπει δηλ. να ισχύει ότι $g_{L^R} = n^R = g_{A^{1-\eta}} = (1-\eta) g_A$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ο αριθμός των ερευνητών παραμένει σταθερός σε σχέση με τον συνολικό πληθυσμό δηλαδή ότι $L_t^R / L = σταθ$ τότε συνεπάγεται ότι $n^R = n$ τότε έχουμε ότι $n = (1-\eta) g_A \Rightarrow g_A = \frac{n}{1-\eta}$, δηλ. ότι

$$g_y = g_A = \frac{n}{1-\eta}$$

[71] Paul M. Romer "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, 98 (1990), σσ. S71-S102.

[72] Βλ. την συμβολή του "Growth and Ideas" στο Philippe Aghion και Steven N. Durlauf (επιμ.), *Handbook of Economic Growth*, τόμος A. Amsterdam: Elsevier, 2005, διαθέσιμο από την ιστοσελίδα του στην διεύθυνση http://elsa.berkeley.edu/users/chad/handbook200.pdf . Το αρχικό του άρθρο ήταν το "R&D-Based Models of Economic Growth", *Journal of Political Economy*, 103 (1995), σσ. 759-784.

Δηλ. ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνικής προόδου – και όχι ο ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνικής προόδου (ή ιδεών) κατά κεφαλήν - είναι ανάλογος του ρυθμού μεγέθυνσης του πληθυσμού.

Το υπόδειγμα όμως αυτό που μόλις εξετάσαμε θυμίζει το υπόδειγμα των knowledge spillovers και δεν ενσωματώνει την βασική ιδέα του Schumpeter ότι είναι η μονοπωλιακή θέση που οφείλεται στην καινοτομία που καθορίζει την μεγέθυνση. Εξ άλλου υποθέσαμε ότι ο λόγος των «ερευνητών» προς το εργατικό δυναμικό είναι σταθερός, ενώ στην πραγματικότητα σε ένα οικονομικό υπόδειγμα οφείλουμε επίσης να εξηγήσουμε πως καθορίζεται αυτός ο λόγος. Πως, με άλλα λόγια αποφασίζεται ποιοι πόροι θα διατεθούν για έρευνα και ανάπτυξη.

Σουμπετεριανά υποδείγματα μεγέθυνσης

Μια σημαντική απόπειρα δημιουργίας υποδειγμάτων μεγέθυνσης Σουμπετεριανού τύπου οφείλεται στους Aghion και Howitt. Το βασικό τους σύγγραμμα *Endogenous Growth Theory* (1998) περιλαμβάνει ένα τέτοιο υπόδειγμα. Εδώ θα εργασθούμε με ένα πιο απλουστευμένο υπόδειγμα (2005) που έγινε όπως γράφουν και οι ίδιοι με σκοπό την διδασκαλία του σε δευτεροετείς φοιτητές.[73] Στο υπόδειγμα αυτό η οικονομία μας αποτελείται από τρεις κλάδους: δύο παραγωγικούς και ένα κλάδο Έρευνας και Ανάπτυξης. Ο πρώτος παραγωγικός κλάδος παράγει το τελικό καταναλωτικό αγαθό και διέπεται από μια οργάνωση αγοράς η οποία είναι αυτή του τέλειου ανταγωνισμού. Ο δεύτερος παραγωγικός κλάδος παράγει ένα ενδιάμεσο (κεφαλαιουχικό) αγαθό με το οποίο παράγεται το τελικό αγαθό. Οι καινοτομίες λαμβάνουν χώρα μόνο στον κλάδο του ενδιάμεσου αγαθού και σε αυτόν η μορφή αγοράς είναι μονοπωλιακή. Κάνουμε την απλουστευτική υπόθεση ότι το τελικό αγαθό παράγεται μόνο από το ενδιάμεσο αγαθό m με μια συνάρτηση παραγωγής της μορφής:

$$Y = Am^{\alpha}$$

Το α είναι θετικό και μικρότερο της μονάδας. Το A είναι μια παράμετρος παραγωγικότητας και αντανακλά την ποιότητα του ενδιάμεσου αγαθού. Κάθε βελτίωση στην ποιότητα του m που οφείλεται σε καινοτομία η οποία αυξάνει το A. Η βασική υπόθεση που γίνεται είναι ότι κάθε νέα καινοτομία αυξάνει το A σε γA, όπου το γ είναι μια σταθερή παράμετρος μεγαλύτερη της μονάδας$(\gamma > 1)$. Αν δηλαδή, έχουν γίνει n καινοτομίες στην οικονομία μετά από n περιόδους, τότε ισχύει ότι

$$A_{n+1} = \gamma A_n$$

Η υπόθεση αυτή ουσιαστικά μας δημιουργεί σταθερές αποδόσεις κλίμακας απαραίτητες για την ενδογενή μεγέθυνση στο υπόδειγμά μας.

Αν το τελικό αγαθό παράγεται χωρίς εργασία, το ενδιάμεσο αγαθό αντίθετα παράγεται με μία πολύ απλή συνάρτηση παραγωγής η οποία μετασχηματίζει μία μονάδα εργασίας παραγωγής του ενδιάμεσου αγαθού σε μία μονάδα ενδιαμέσου αγαθού. $m = m$. Το πρώτο (αριστερό) m είναι μονάδες ενδιάμεσου αγαθού και το δεύτερο (δεξιό) m είναι μονάδες παραγωγικής εργασίας στον κλάδο του ενδιάμεσου αγαθού. Το συνολικό εργατικό δυναμικό της οικονομίας κατανέμεται μεταξύ αυτών που παράγουν το ενδιάμεσο αγαθό και σε αυτούς που εργάζονται στον τομέα της Έρευνας και Ανάπτυξης. Ας συμβολίσουμε την εργασία στον τομέα της Έρευνας και Ανάπτυξης με q. Υποθέτουμε ότι μια μονάδα εργασίας στην Έρευνα και Ανάπτυξη οδηγεί

[73] Philippe Aghion & Peter Howitt, *Endogenous Growth Theory*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1988 και "Growth with Quality Improvement Innovations. An Integrated Framework" στο P. Aghion & S. Durlauf (επιμ.), *Handbook of Economic Growth*, τόμος A, North-Holland, Amsterdam, 2005.

σε μια καινοτομία με πιθανότητα λ.[74] Άρα αν επενδυθούν q μονάδες εργασίας στην Έρευνα και Ανάπτυξη οι καινοτομίες που θα προκύψουν θα είναι λq.
Έχουμε λοιπόν την συνολική εργασία στην «οικονομία» μας ίση με

$$L = m + q$$

Είπαμε ότι στον κλάδο του τελικού αγαθού η αγορά είναι τελείως ανταγωνιστική. Στον κλάδο του ενδιάμεσου αγαθού η αγορά είναι μονοπωλιακή και οι επιχειρήσεις απολαμβάνουν μονοπωλιακά κέρδη όσο κρατά η καινοτομία τους. Για να δείξουμε την μονοπωλιακή αυτή δομή κάνουμε και μια επιπλέον υπόθεση, ότι δηλ. υπάρχει και ένας άλλος (τέταρτος) κλάδος παραγωγής ενδιάμεσων αγαθών, ο οποίος βρίσκεται στο περιθώριο των καινοτόμων επιχειρήσεων, ο οποίος παράγει ενδιάμεσα αγαθά αλλά χωρίς το προνόμιο της καινοτομίας. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η περιθωριακή επιχείρησε που δεν έχει την καινοτομία χρειάζεται χ μονάδες εργασίας για να κατασκευάσει μια μονάδα ενδιάμεσου αγαθού που μια επιχείρηση που έχει την καινοτομία την κατασκευάζει με μία μονάδα εργασίας. Το χ φυσικά είναι μεγαλύτερο της μονάδας. Αυτό αυξάνει το κόστος παραγωγής ενδιάμεσων αγαθών στις επιχειρήσεις αυτές. Επειδή οι επιχειρήσεις του «περιθωρίου» είναι ανταγωνιστικές η τιμή που πωλούν το προϊόν είναι ίση με το κόστος τους. Άρα μία επιχείρηση που έχει την καινοτομία μπορεί να θέσει την τιμή του ενδιάμεσου αγαθού ίση με το κόστος του ανταγωνιστή της στο «περιθώριο». Η μεγαλύτερη τιμή, δηλ. που μπορεί να πουλήσει το προϊόν (το ενδιάμεσο δηλαδή αγαθό) η καινοτόμα επιχείρηση είναι χw όπου w είναι ο μισθός (το κόστος δηλ. της εργασίας). Αν δοκιμάσει να το πουλήσει σε υψηλότερη τιμή τότε θα έχει ανταγωνιστή την περιθωριακή επιχείρηση η οποία έχει κόστος χw και επειδή είναι ανταγωνιστική και δεν έχει κέρδη πουλάει όσο και το κόστος της. [Το χ αυτό μπορείτε να το φανταστείτε και ως τον βαθμό μονοπωλίου που απολαμβάνουν οι επιχειρήσεις που απολαμβάνουν της καινοτομίας. Όσο καλύτερα προστατευμένη είναι η καινοτομία τους, τόσο μεγαλύτερο είναι το κόστος των ανταγωνιστών τους.]
Άρα το κέρδος της καινοτόμου επιχείρησης δίνεται από την εξίσωση:

$$\pi = Pm - wm = \left(\chi w\right)m - wm = (\chi - 1)wm$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι η επιχείρηση παράγει m μονάδες ενδιάμεσου αγαθού το οποίο πουλά στην τιμή $P = \chi w$, άρα έχει έσοδα χwm, ενώ το κόστος της είναι το κόστος εργασίας των m μονάδων που απασχολεί η καθεμία από τις οποίες αμείβεται με μισθό w. Το κέρδος είναι έσοδα μείον το κόστος (Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση παραγωγής στον ενδιάμεσο κλάδο μετασχηματίζει m μονάδες εργασίας σε m μονάδες αγαθού).

Έχοντας καταστρώσει τις βασικές εξισώσεις του υποδείγματος, θεωρούμε ότι υπάρχουν άλλες δύο εξισώσεις οι οποίες μας οδηγούν σε ισορροπία:

Η πρώτη εξίσωση μας λέει ότι η αγορά εργασίας βρίσκεται σε ισορροπία:

$$L = m + q$$

[74] Οι Aghion & Howitt κατασκευάσουν μια συνάρτηση πιθανότητας τύπου Poisson στην οποία η χρονική περίοδος θεωρείται αρκετά μικρή ώστε να εμφανίζεται μια μόνο καινοτομία με μέσο όρο λ.

Η δεύτερη εξίσωση είναι η λεγόμενη συνθήκη “research arbitrage”.[75] Εν προκειμένω, στο υπόδειγμά μας υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει διαφορά στην ποιότητα της εργασίας ανάμεσα στους δύο τομείς. Ο εργαζόμενος στον τομέα της Ε & Α δεν διαφέρει σε «ανθρώπινο κεφάλαιο» από τον εργαζόμενο στην παραγωγή του ενδιάμεσου αγαθού. Άρα η αμοιβή της εργασίας είναι η ίδια και στους δύο κλάδους. Ο επιχειρηματίας στον τομέα της Ε & Α εξισώνει το κόστος εργασίας, δηλ. τον μισθό w, με το προσδοκώμενο κέρδος από την δραστηριότητα στην Έρευνα και Ανάπτυξη. Ανά μονάδα ερευνητικής εργασίας λοιπόν, το προσδοκώμενο κέρδος συνολικά είναι $\lambda\gamma\pi$, δηλ. το κέρδος π που θα βγάλει από την καινοτομία επί την πιθανότητα λ να επιτευχθεί η καινοτομία. Πολλαπλασιάζουμε επίσης με γ επειδή η καινοτομία πολλαπλασιάζει τα κέρδη με την βελτίωση της παραγωγικότητας. Άρα η συνθήκη του arbitrage (αρμπιτράζ) στην Έρευνα και Ανάπτυξη είναι $w = \lambda\gamma\pi$. Αντικαθιστώντας το π από την εξίσωση του κέρδους και απαλείφοντας το w έχουμε

$$w = \lambda\gamma\pi = \lambda\gamma\left[(\chi-1)wm\right] \Rightarrow m = \frac{1}{\lambda\gamma(\chi-1)}$$

Από την εξίσωση της αγοράς εργασίας σε ισορροπία έχουμε $L = m + q \Rightarrow m = L - q$. Άρα προκύπτει ότι

$$m = \frac{1}{\lambda\gamma(\chi-1)} = L - q \Rightarrow q = L - \frac{1}{\lambda\gamma(\chi-1)}$$

που μας δίνει τον αριθμό αυτών που εργάζονται στην Έρευνα και Ανάπτυξη.
Από την άλλη μεριά ο ρυθμός μεγέθυνσης της τεχνικής προόδου στην σταθερή κατάσταση δίνεται από την εξίσωση

$$x = \lambda q(\gamma - 1)$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι η παραγωγικότητα στην οικονομία θα αυξάνεται σύμφωνα με την διαφορά που έχουμε στην βελτίωση της παραγωγικότητας $(\gamma-1)$,[76] επί τους πόρους που διαθέτουμε στην Έρευνα και Ανάπτυξη (εν προκειμένω το q), επί την πιθανότητα να επιτευχθεί η καινοτομία. Δείτε ως εξής: Διαθέτουμε q πόρους σε Ε & Α. Από αυτούς τους πόρους έχουμε λq καινοτομίες που μας βελτιώνουν την παραγωγικότητα κατά *γ-1*. Αντικαθιστώντας την εξίσωση αυτή την τιμή του q, και ενθυμούμενοι ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν προϊόντος είναι ίσος με x έχουμε

$$g_y = x = \lambda q(\gamma-1) = \lambda(\gamma-1)\left[L - \frac{1}{\lambda\gamma(\chi-1)}\right]$$

[75] Γενικά η έννοια του arbitrage στην οικονομική θεωρία μας λέει ότι δεν υπάρχουν περιθώρια κέρδους χωρίς λόγο, από την μετακίνηση από έναν κλάδο σε άλλον. Η κερδοφορία εξισώνεται σε όλους τους τομείς. Φανταστείτε στην αγορά ξένου συναλλάγματος να είχαμε μια σχέση 110 Yen στο δολάριο ΗΠΑ, μια σχέση 1,3 δολάρια στο ευρώ και να είχαμε λιγότερα από 143 Yen στο ευρώ. Τότε θα αγοράζαμε φθηνά στην μία αγορά και ακριβά στην άλλη και θα βγάζαμε πολλά λεφτά χωρίς λόγο. Για αυτό στις αγορές συναλλάγματος υπάρχουν ειδικά άτομα (ή και προγράμματα υπολογιστών) που αυτόματα επισημαίνουν τις ελάχιστες διαφορές που διαμορφώνονται και με κατάλληλες ταυτόχρονες αγοραπωλησίες στις διαφορετικές αγορές βγάζουν κάποιο κέρδος. Αυτά τα περιθώρια όμως είναι απειροελάχιστα και το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων είναι να απαλειφθούν οι διαφορές. Αυτή η διαδικασία λέγεται arbitrage. Όταν οι αγορές είναι σε ισορροπία δεν υπάρχει δυνατότητα arbitrage

[76] Εφόσον $A_{n+1} = \gamma A_n \Rightarrow \Delta A/A = \left(A_{n+1} - A_n\right)/A_n = \left(\gamma A_n - A_n\right)/A_n = \gamma - 1$

Δηλαδή, ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλή προϊόντος στην οικονομία είναι μεγαλύτερος

1. όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ότι η Ε & Α θα οδηγήσει σε καινοτομία (λ), όσο αποτελεσματικότερη δηλ., είναι η Ε & Α
2. όσο μεγαλύτερο είναι το μέγεθος της βελτίωσης της παραγωγικότητας που επιφέρει η καινοτομία (γ), δηλ., όσο αποτελεσματικότερη είναι η ίδια η καινοτομία
3. όσο μεγαλύτερο είναι το εργατικό δυναμικό L και
4. όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά κόστους μεταξύ της καινοτόμου επιχείρησης και του περιθωριακού τομέα (χ), δηλ. όσο περισσότερα μονοπωλιακά κέρδη μπορεί να αποσπάσει η καινοτόμα επιχείρηση.

Ο ρόλος των δυο πρώτων παραγόντων είναι καθαρός: όσο αποτελεσματικότερη είναι η έρευνα τόσο στο να μετασχηματίζει τους πόρους σε καινοτομίες όσο και στην αποτελεσματικότητα των ίδιων των καινοτομιών τόσο μεγαλύτερη είναι η μεγέθυνση της τεχνικής προόδου. Οι άλλοι δύο παράγοντες είναι περισσότερο προβληματικοί. Η σχέση του μεγέθους του εργατικού δυναμικού με τον ρυθμό μεγέθυνσης δημιουργεί ένα αποτέλεσμα κλίμακας (scale effect) που έχει αμφισβητηθεί. Υπάρχουν κάποιοι τρόποι να απαντήσει κανείς σε αυτό το ζήτημα. Μια πιθανή απάντηση είναι ότι όσο η οικονομία μεγεθύνεται τόσο αυξάνει και ο αριθμός των διαφορετικών προϊόντων και έτσι η αποτελεσματικότητα της Ε&Α μειώνεται διότι απλώνεται σε περισσότερους τομείς. Μια άλλη απάντηση είναι ότι ενδεχομένως το εργατικό δυναμικό να μην αφορά ανειδίκευτο εργατικό δυναμικό, αλλά «αποτελεσματικό» εργατικό δυναμικό που να συμπεριλαμβάνει τον βαθμό εκπαίδευσής του. Υπό αυτήν την έννοια υπάρχει σχέση ρυθμού μεγέθυνσης και μεγέθους «αποτελεσματικού εργατικού δυναμικού».
Ένα άλλο ζήτημα αφορά στο χ. Αν το χ αποτελεί τον βαθμό μονοπωλιακής προστασίας, το υπόδειγμα φαίνεται να λέει ότι όσο λιγότερο ανταγωνιστικές είναι οι αγορές τόσο μεγαλύτερη θα είναι η μεγέθυνση. Βεβαίως η προστασία των πνευματικών δικαιωμάτων έχει θετικό αποτέλεσμα πάνω στις ερευνητικές δραστηριότητες. Από την άλλη μεριά όμως η ένταση του ανταγωνισμού βοηθάει την μεγέθυνση. Φαίνεται μάλιστα ότι τα εμπειρικά δεδομένα αμφισβητούν την θετική σχέση μονοπωλιακής προστασίας μεγέθυνσης και ότι υπάρχει μια σχέση ανεστραμμένου U στον βαθμό ανταγωνισμού στην αγορά προϊόντων και καινοτομίας.

ΕΒΔΟΜΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
Το υπόδειγμα μεγέθυνσης του von Neumann

Για την σύνταξη αυτών των σημειώσεων χρησιμοποιήθηκε το αρχικό άρθρο του von Neumann[77] και η ανάλυση από το βιβλίο των John G. Kemeny, J. Laurie Snel & Gerald L. Thomson, *Introduction to Finite Mathematics*, 2η έκδοση, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall International, 1966. Βλέπε επίσης και την βιβλιογραφία στο τέλος των σημειώσεων.

John von Neumann (1903-1957)

[77] John von Neumann, "Über ein ökonomischen Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", [Αναφορικά με ένα οικονομικό σύστημα εξισώσεων και μια γενίκευση του θεωρήματος σταθερού σημείου του Brouwer] στο *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, [Πρακτικά ενός μαθηματικού συνεδρίου] με επιμέλεια του Karl Menger, Βιέννη 1938. Επανέκδοση στο E. Dierker, & K. Sigmund (επιμ.), *Karl Menger: Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, Berlin & New York: Springer Verlag, 1998. Αγγλική μετάφραση από G. Morgenstern ως "*A Model of General Economic Equilibrium*", [«Ένα υπόδειγμα γενικής οικονομικής ισορροπίας»] *Review of Economic Studies*, τόμος XIII, τεύχος 1 (1945-6), σσ. 1-9. Σχόλια του D.G. Champernowne, "A Note on J. von Neumann's Article on 'A Model of Economic Equilibrium'", [«Μία σημείωση πάνω στο άρθρο του J. von Neumann 'Ένα υπόδειγμα γενικής οικονομικής ισορροπίας'»], *Review of Economic Studies*, τόμος XIII, τεύχος 1 (1945-6), σσ. 10-8. Ανατύπωση στο F.H. Hahn (επιμ.), *Readings in the Theory of Growth*, London: Macmillan, 1971. Στα ελληνικά έχει μεταφραστεί εκτός από το αρχικό άρθρο και πολύ ενδιαφέρον σχετικό υλικό στο J. von Neumann, *Το μοντέλο της γενικής ισορροπίας,* Αθήνα: Κριτική, 2001.

Εισαγωγή

Προκειμένου να κατανοήσουμε το υπόδειγμα του von Neumann πρέπει προηγουμένως να αναφερθούμε στο υπόδειγμα γενικής ισορροπίας του Léon Walras. Ο τελευταίος διατύπωσε το υπόδειγμα αυτό στο έργο του *Στοιχεία της καθαρής πολιτικής οικονομίας* (*Eléments d'économie politique pure*), η πρώτη έκδοση του οποίου δημοσιεύθηκε το 1874. Στο υπόδειγμα του Walras οι καταναλωτές, οι οποίοι κατέχουν συγκεκριμένες ποσότητες παραγωγικών συντελεστών προμηθεύουν τους συντελεστές αυτούς στις επιχειρήσεις και αγοράζουν από αυτές τελικά προϊόντα τα οποία παράγονται μέσω αυτών των συντελεστών. Οι καταναλωτές μεγιστοποιούν την χρησιμότητά τους που προκύπτει από τις ποσότητες τελικών αγαθών που καταναλώνουν με τον εισοδηματικό περιορισμό που προκύπτει από τις αμοιβές των συντελεστών που κατέχουν. Οι επιχειρηματίες μετατρέπουν τους συντελεστές σε τελικά προϊόντα και μεγιστοποιούν τα κέρδη τους, αν και σε κατάσταση ισορροπίας τα κέρδη αυτά είναι μηδενικά. Η ισορροπία επέρχεται όταν όλες οι αγορές, συντελεστών και τελικών αγαθών ισορροπούν. Οι αρχικές (γραμμικές) εξισώσεις του Walras αφορούσαν τις συναρτήσεις χρησιμότητας των καταναλωτών και τις συναρτήσεις παραγωγής των επιχειρήσεων. Το ζητούμενο ήταν να βρεθεί ένα διάνυσμα τιμών των αγαθών και των συντελεστών το οποίο θα «καθάριζε» τις αγορές, θα εξισορροπούσε δηλ., την ζήτηση και την προσφορά σε κάθε αγορά. Ο Walras «απέδειξε» ότι ένα τέτοιο σύστημα τιμών υπάρχει και είναι μοναδικό, μετρώντας τον αριθμό των αγνώστων μεταβλητών (δηλ., των τιμών) και των εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν την εκκαθάριση σε κάθε αγορά.[78] Η απόδειξη όμως αυτή δεν ήταν αυστηρή. Όπως γνωρίζουμε από την γραμμική άλγεβρα η ισότητα εξισώσεων και αγνώστων δεν εξασφαλίζει την μοναδική λύση του συστήματος. Το σύστημα μπορεί να είναι απροσδιόριστο ή οι τιμές να είναι αρνητικές.

Ιστορικά, το Walrasιανό σύστημα γενικής ισορροπίας ανέβηκε ξανά στην επιφάνεια με το έργο του Gustav Cassel το 1918, και οικονομολόγοι και μαθηματικοί όπως ο Frederik Zeuthen, ο Hans Neisser και ο Heinrich von Stackelberg σύντομα επισήμαναν τις μαθηματικές αδυναμίες του συστήματος. Την δεκαετία του 1930 ο μαθηματικός Karl Menger, γιος του Carl Menger – ενός από τους πρωτεργάτες (μαζί με τον Léon Walras και τον W. Stanley Jevons) της οριακής επανάστασης – ξεκινά στο Πανεπιστήμιο της Βιέννης ένα μαθηματικό σεμινάριο (mathematisches Kolloquium) στο οποίο εξετάστηκαν μεταξύ άλλων και οι μαθηματικές βάσεις της θεωρίας της γενικής οικονομικής ισορροπίας. Σημαντικές συμβολές σε αυτό το Kolloquium ήταν εκείνες του Karl Schlesinger, του Abraham Wald, και του Oskar Morgenstern. Το Kolloquium σταμάτησε τις εργασίες του με την έλευση του ναζισμού και οι περισσότεροι συμμετέχοντες, είτε εξοντώθηκαν, είτε μετανάστευσαν στις ΗΠΑ. Η σύγχρονη θεωρία της γενικής ισορροπίας που ξεκινά με το υπόδειγμα των Arrow-Debreu[79] στηρίζεται πάνω στις εργασίες του βιεννέζικου Kolloquium.

Σημαντική συνεισφορά στις εργασίες του σεμιναρίου ήταν η εργασία του John von Neumann ενός μεγαλοφυούς μαθηματικού γεννημένου από Εβραίους γονείς στη Βουδαπέστη. Ο von Neumann, παιδί θαύμα, απέκτησε ταυτόχρονα δύο διδακτορικά,

[78] Πιο συγκεκριμένα οι άγνωστοι είναι οι τιμές των αγαθών και των συντελεστών μείον μία. Αυτό συμβαίνει διότι οι τιμές είναι σχετικές, άρα ένα αγαθό ορίζεται ως μοναδιαίο (*numéraire*) με τιμή ίση με την μονάδα. Από την άλλη πλευρά εφόσον όταν εκκαθαρίζουν Ν-1 αγορές η εναπομένουσα αγορά εκκαθαρίζει αυτόματα οι εξισώσεις προς επίλυση είναι και αυτές Ν-1.

[79] Kenneth J. Arrow & Gerard Debreu, "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica*, τόμος 22, τεύχος 3, (Ιούλιος 1954), σσ. 265-290. Διαθέσιμο ως *Cowles Foundation Paper no. 87* από την ηλεκτρονική διεύθυνση http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p00b/p0087.pdf .

το πρώτο στα μαθηματικά από το πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης και το δεύτερο στη Χημεία από το Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης και στη συνέχεια δίδαξε στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Το 1932 μετανάστευσε στο Princeton και έγινε το νεαρότερο μέλος του Institute of Advanced Studies, που αριθμούσε στα λίγα μέλη του και τον Αλβέρτο Einstein. Σημαντικές ήταν οι συνεισφορές του στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά και στην φυσική. Θεωρείται ο πατέρας του σύγχρονου ηλεκτρονικού υπολογιστή. Συμμετείχε στο Manhattan Project, την ανάπτυξη δηλ., της ατομικής βόμβας, και υπήρξε σύμβουλος του προέδρου Truman στην Επιτροπή Ατομικής Ενέργειας. Στα οικονομικά[80] ο von Neumann έχει συμβάλει στην δημιουργία της θεωρίας παιγνίων, με μια πρώτη δημοσίευση το 1928, [81] και στην συνέχεια με την δημοσίευση μαζί με τον Oskar Morgenstern το 1944 του έργου *Θεωρία Παιγνίων και Οικονομική Συμπεριφορά*.[82] Το άρθρο που θα εξετάσουμε εδώ δημοσιεύθηκε στα πρακτικά του Kolloquium το 1937. Έχει χαρακτηριστεί από τον E. Roy Weintraub, τέως πρόεδρο της History of Economics Society και μαθηματικό ως «το σημαντικότερο άρθρο στα μαθηματικά οικονομικά που γράφτηκε ποτέ». Ενώ ένας από τους σημαντικότερους σύγχρονους οικονομολόγους, ο Richard Goodwin, το χαρακτήρισε ένα από τα μεγάλα έργα του 20^{ου} αιώνα με την μεγαλύτερη επιρροή (one of the great seminal works of the century).[83]

Ας δούμε τώρα πως φαντάζεται την οικονομία ο von Neumann.

Υποθέσεις

Υπάρχουν *n* αγαθά $G_1,\dots G_n$ και *m* παραγωγικές διαδικασίες (τεχνικές παραγωγής) $P_1,\dots P_m$ μέσω των οποίων παράγονται τα αγαθά αυτά. Τα αγαθά παράγονται μέσω άλλων αγαθών.

(α) Εφόσον είναι δυνατόν να έχουμε $m > n$ το πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί «μετρώντας εξισώσεις και αγνώστους».
(β) Έχουμε σταθερές αποδόσεις κλίμακος (constant returns to scale)
(γ) Δεν υπάρχουν συντελεστές παραγωγής (αγαθά) που δεν μπορούν να αναπαραχθούν.
(δ) Η κατανάλωση γίνεται μέσα στην παραγωγική διαδικασία. Υποθέσατε π.χ., ότι οι εργάτες που εργάζονται σε μια παραγωγική διαδικασία αμείβονται με καταναλωτικά (μισθιακά) αγαθά τα οποία εισέρχονται στην παραγωγική διαδικασία ως παραγωγικοί συντελεστές..

Μια παραγωγική διαδικασία συμβολίζεται ως εξής:

$$P_i: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} G_j \to \sum_{j=1}^{n} b_{ij} G_j \qquad (1)$$

Σε κάθε διαδικασία P_i χρησιμοποιείται ποσότητα a_{ij} του αγαθού G_j (συντελεστής εισροής, input coefficient) και παράγεται ποσότητα b_{ij} του αγαθού G_j (συντελεστής

[80] Για την συμβολή του στα οικονομικά βλ. Maria Joao Cardoso De Pina Cabral, "John von Neumann's Contribution to Economic Science", *International Social Science Review*; 2003, τόμος 78 τεύχος 3/4, σσ.126-137.

[81] "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen*, τόμος 100, τεύχος 1, σσ. 295-320.

[82] *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1944.

[83] Παρατίθενται στο Norman Macrae, *John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More,* New York: Pantheon Books, 1999, σσ. 248-9.

εκροής, output coefficient). Με άλλα λόγια μπορεί να παράγονται περισσότερα από ένα αγαθά (joint production). Ενδέχεται να παράγεται ένα κύριο αγαθό και άλλα υποπροϊόντα. Κάποιοι από τους συντελεστές μπορεί να είναι μηδενικοί.

(α) Τα κεφαλαιακά αγαθά εισέρχονται και στις δύο πλευρές της εξίσωσης (1) ως κεφαλαιακά αγαθά διαφορετικού επιπέδου φυσικής κατάστασης (ηλικίας).
(β) Κάθε διαδικασία διαρκεί μια χρονική μονάδα. Αν απαιτεί περισσότερο «σπάει» σε περισσότερες, εισάγοντας ενδιάμεσα αγαθά αν χρειάζεται.

Με αυτό τον τρόπο η τεχνολογία της οικονομίας περιγράφεται από δύο πίνακες (μήτρες) **A** και **B** διαστάσεων $m \times n$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ Μήτρα συντελεστών εισροής (Input coefficient matrix)

και

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$ Μήτρα συντελεστών εκροής Output coefficient matrix

---

Παράδειγμα: *Οικονομία «κότας και αυγού»*

Το αγαθό 1 είναι «κότα»,
Η διαδικασία 1 είναι «γεννώ αυγά»,

Το αγαθό 2 είναι «αυγό»
Η διαδικασία 2 είναι «κλωσάω αυγά»

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Έτσι, στην διαδικασία «γεννώ αυγά» μια κότα και κανένα αυγό παράγουν μία κότα (την αρχική) και 12 αυγά.
Έτσι, στην διαδικασία «γεννώ αυγά» μια κότα και 4 αυγά παράγουν πέντε κότες (μία την αρχική και 4 κλωσόπουλα) και καθόλου αυγά.

Στο συμβολισμό της εξίσωσης (1)

$$P_1: \quad G_1 + 0 \cdot G_2 \to G_1 + 12G_2$$
$$P_2: \quad G_1 + 4G_2 \to 5G_1 + 0 \cdot G_2$$

Εντάσεις χρήσης (Intensities)

Πρέπει επίσης να ορίσουμε την ένταση με την οποία χρησιμοποιείται κάθε παραγωγική διαδικασία. Ορίζουμε με x_i την ένταση με την οποία χρησιμοποιείται η διαδικασία P_i. Αν, στο παράδειγμά μας, ξεκινήσουμε με 3 κότες και 8 αυγά, και χρησιμοποιήσουμε μια κότα για να γεννήσει αυγά και 2 κότες για να κλωσήσουν, τότε οι εντάσεις μας, x_i, θα είναι αντίστοιχα $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Ορίζουμε το *διάνυσμα (γραμμής) έντασης* [*intensity (row) vector*]

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_m \end{pmatrix}$$

Διάνυσμα εισροών (*input vector)*: Πολλαπλασιάζοντας το *διάνυσμα έντασης* $\mathbf{x}$, με την *μήτρα συντελεστών εισροής*, $\mathbf{A}$, παίρνουμε το *διάνυσμα εισροών* , $\mathbf{xA}$, που μας δίνει την ποσότητα κάθε αγαθού που χρησιμοποιείται ως *εισροή* (*input*). Οι διαστάσεις του διανύσματος είναι $(1\times m)(m\times n) = (1\times n)$.

Έτσι, η συνολική ποσότητα του αγαθού G_j που χρησιμοποιείται ως εισροή είναι $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i$.

Στο παράδειγμα μας οι κότες που χρησιμοποιούνται συνολικά ως εισροές είναι τρεις: (μία για να κάνει αυγά και δύο κλώσες) $1\times 1 + 2\times 1 = 3$

Διάνυσμα εκροών (*output vector*): Προχωρώντας με ανάλογο τρόπο το διάνυσμα διαστάσεων $(1\times n)$ $\mathbf{xB} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} b_{i1}x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{ij}x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{m} b_{in}x_i \end{pmatrix}$ μας δίνει τις ποσότητες των αγαθών που παράγονται ως εκροές (*outputs*).

Στο παράδειγμα «κότα και αυγό» έχουμε

$$\mathbf{xB} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 5 & 1\times 12 + 2\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Οι εκροές αυτές θα χρησιμοποιηθούν ως εισροές στον επόμενο γύρο.

Παρατηρείστε όμως ότι, στο παράδειγμά μας επειδή έχουμε 12 αυγά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο 3 κότες για να τα κλωσήσουν και οι υπόλοιπες 8 κότες θα χρησιμοποιηθούν για να γεννήσουν. Άρα το νέο $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \end{pmatrix}$. Το νέο διάνυσμα εκροών θα είναι $\mathbf{xB} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 96 \end{pmatrix}$ και κάποια αυγά δεν θα εκκολαφθούν. Αν είχαμε ξεκινήσει με 2 κότες και 4 αυγά και χρησιμοποιούσαμε την μία για να γεννήσει και την άλλη για να κλωσήσει θα είχαμε $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Οι εισροές θα είναι $\mathbf{xA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ όπως υποθέσαμε.

Αυτό θα μας δώσει $\mathbf{xB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \end{pmatrix}$.

Και τα δύο αγαθά έχουν τώρα τριπλασιαστεί. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εντάσεις $\mathbf{x} = (3 \quad 3)$ στον επόμενο κύκλο για να παράγουμε 16 κότες και 36 αυγά. Όταν οι εντάσεις χρησιμοποιούνται στην ίδια αναλογία, τότε η οικονομία βρίσκεται σε *ισορροπία*. Αν ο λόγος $x_1 : \cdots : x_m$ παραμένει αμετάβλητος μεταξύ των κύκλων η οικονομία επεκτείνεται με τον ίδιο συντελεστή για κάθε παραγωγική διαδικασία.. Ο συντελεστής αυτός είναι ο *συντελεστής επέκτασης* (*expansion factor*) *για όλη την οικονομία*, α. Για ρυθμό μεγέθυνσης (r*ate of growth*) *g*, $\alpha = 1 + g$ Στο παράδειγμά μας $\alpha = 3$ που ισοδυναμεί με ρυθμό μεγέθυνσης, *g*, ίσο με 2 ή 200%. Αν $\alpha = 1$ θα είχαμε μια στατική οικονομία (stationary economy) η οποία απλώς θα αναπαραγόταν, ενώ αν ήταν μικρότερος της μονάδος η οικονομία θα συρρικνωνόταν. Άρα για να έχουμε επέκταση (θετική μεγέθυνση) θα πρέπει $\alpha > 1$. .

Τιμές

Έστω ότι η τιμή του αγαθού G_j είναι y_j. Η τιμή είναι μη αρνητική $y_j \geq 0$, αλλά αν είναι μηδενική το αγαθό είναι «*ελεύθερο*» (*free)*. Ορίζουμε το διάνυσμα (στήλης) των τιμών [*price (column) vector*] ως

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Διάνυσμα κόστους παραγωγής [*Cost of production vector*]*:* Το διάνυσμα $\mathbf{Ay}$ με διαστάσεις $(m \times n)(n \times 1) = (m \times 1)$ μας δίνει το κόστος παραγωγής για κάθε παραγωγική διαδικασία. Σημειώσατε ότι για την παραγωγική διαδικασία P_i, το $i^{\text{στό}}$ στοιχείο του $\mathbf{Ay}$ είναι $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$ είναι το *συνολικό κόστος των εισροών* (*total cost of inputs*) που χρησιμοποιείται για μια μονάδα λειτουργίας (unit operation) αυτής της διαδικασίας. *Διάνυσμα της αξίας των εκροών σε τιμές κόστους* [*Cost value of output vector*]: Αντίστοιχα, το διάνυσμα διαστάσεων $(m \times 1)$ $\mathbf{By}$ μας δίνει την αξία σε τιμές κόστους των εκροών για όλες (δηλ., και για τις m) τις διαδικασίες.

Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει ένας *συντελεστής τόκου* [*interest factor*] στην οικονομία, έτσι ώστε *y* νομισματικές μονάδες γίνονται *βy* νομισματικές μονάδες μετά από έναν οικονομικό κύκλο. Έτσι ο συντελεστής τόκου είναι $\beta = 1 + \frac{z}{100}$, όπου z είναι το επιτόκιο σε ποσοστιαίες μονάδες. Π.χ., αν το επιτόκιο είναι 10(%) τότε $\beta = 1{,}1$.

Ο von Neumann κάνει τις εξής υποθέσεις (αξιώματα) για την οικονομία αυτή.

Αξιώματα του υποδείγματος

Αξίωμα 1

$$\mathbf{xB} \geq \alpha \mathbf{xA}$$

Αν η οικονομία επεκτείνεται με συντελεστή α, τότε οι εισροές του επόμενου κύκλου πρέπει να είναι $\alpha \mathbf{xA}$. Άρα οι εκροές αυτού του κύκλου $\mathbf{xB}$ πρέπει να είναι τέτοιες ώστε αυτό να είναι δυνατό για όλες τις παραγωγικές διαδικασίες. Το Αξίωμα 1 συνεπάγεται, με άλλα λόγια, ότι οι εισροές μιας δεδομένης περιόδου πολλαπλασιασμένες επί α δεν είναι μεγαλύτερες από τις εκροές της περιόδου αυτής.

Αξίωμα 2

$$\mathbf{By} \le \beta \mathbf{Ay}$$

Σε κατάσταση ισορροπίας η αξία των εκροών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την αξία της επένδυσης της αξίας των εισροών με συντελεστή τόκου β για όλες τις διαδικασίες. [Δηλ., μια παραγωγική διαδικασία δεν μπορεί να έχει μεγαλύτερη απόδοση σε αξίες από την έντοκη επένδυση]. Αν αυτό ήταν δυνατό, κάποιος που λειτουργούσε μία διαδικασία θα ήταν διατεθειμένος να προσφέρει ένα υψηλότερο επιτόκιο, άρα δεν θα ήμασταν σε ισορροπία. Αυτή είναι η συνθήκη των μη επιπλέον κερδών [*no extra profits condition*].

Αξίωμα 3

$$\mathbf{x}(\mathbf{B} - \alpha \mathbf{A})\mathbf{y} = 0$$

Αν για ένα αγαθό έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i > \alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$ αυτό σημαίνει ότι η εκροή αυτού του κύκλου είναι μεγαλύτερη από την εισροή που χρειάζεται ο επόμενος κύκλος, άρα η τιμή του θα είναι μηδενική, $y_j = 0$, δηλ., θα είναι ένα ελεύθερο αγαθό. Άρα, ή θα ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = 0$ ή $y_j = 0$. Άρα, $\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right) y_j = 0$. Δεδομένου ότι αυτό ισχύει για κάθε αγαθό, δηλ., $\forall j = 1, \ldots, n$, πρέπει να ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i - \alpha \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right) y_j = \mathbf{x}(\mathbf{B} - \alpha \mathbf{A})\mathbf{y} = 0$

Αξίωμα 4

$$\mathbf{x}(\mathbf{B} - \beta \mathbf{A})\mathbf{y} = 0$$

Γνωρίζουμε από το Αξίωμα 2 ότι καμία διαδικασία δεν μπορεί να αποδίδει μεγαλύτερο κέρδος από όσο μια επένδυση με συντελεστή τόκου β. Αν όμως αποδίδει λιγότερο δεν αξίζει να την αναλάβει κανείς, άρα η έντασή της θα είναι μηδέν, δηλ., $x_i = 0$. Από το Αξίωμα 2 έχουμε την διαφορά $(\mathbf{B} - \beta \mathbf{A})\mathbf{y}$. Αν το i$^{\text{στό}}$ στοιχείο είναι αρνητικό τότε η διαδικασία αυτή δεν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί [$x_i = 0$], από όπου προκύπτει και η εξίσωση.

Αξίωμα 5

$$\mathbf{xBy} > 0$$

Η παραγωγή έχει αξία. Το άθροισμα όλων των παραχθεισών αξιών είναι θετικό. Αυτή είναι μια προφανής απαίτηση, αλλιώς δεν θα μπαίναμε στον κόπο να παράγουμε.

Θέτουμε τώρα τα εξής ερωτήματα:

(1) *Ύπαρξη* [*Existence*]: Υπάρχει μια κατάσταση ισορροπίας σε μια οικονομία von Neumann;
(2) *Μοναδικότητα* [*Uniqueness*]: Εάν ναι, είναι μοναδική;
(3) *Ρυθμός μεγέθυνσης και επιτόκιο*: Είναι ο ρυθμός μεγέθυνσης πάντοτε ίσος με το επιτόκιο;

Ύπαρξη Οικονομικής Ισορροπίας

Περιορισμός: Κάθε γραμμή στην μήτρα **A** και κάθε στήλη στην μήτρα **B** πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο. [Κάθε παραγωγική διαδικασία πρέπει να έχει μία τουλάχιστον εκροή και κάθε αγαθό πρέπει να έχει μία τουλάχιστον διαδικασία που το παράγει].

Απόδειξη:
Από το Αξίωμα 3 $\mathbf{x}(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{A})\mathbf{y}=0 \Rightarrow \mathbf{xBy}=\alpha\mathbf{xAy}$.
Από το Αξίωμα 4 $\mathbf{x}(\mathbf{B}-\beta\mathbf{A})\mathbf{y}=0 \Rightarrow \mathbf{xBy}=\beta\mathbf{xAy}$
Άρα, $\alpha\mathbf{xAy}=\beta\mathbf{xAy}$.
Από το Αξίωμα 5 γνωρίζουμε ότι $\mathbf{xBy}\neq 0 \Rightarrow \mathbf{xAy}\neq 0 \Rightarrow \alpha=\beta$
Άρα σε κατάσταση ισορροπίας ο ρυθμός μεγέθυνσης είναι ίσος με το επιτόκιο. [Απάντηση στην Ερώτηση 3]

Μπορούμε συνεπώς χρησιμοποιώντας αυτήν την εξίσωση να ξαναγράψουμε τα Αξιώματα 1 και 2.

$$\text{Αξίωμα 1': } \mathbf{x}\left(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{A}\right)\geq 0$$

$$\text{Αξίωμα 2': } \left(\mathbf{B}-\beta\mathbf{A}\right)\mathbf{y}\leq 0$$

[Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ανισότητα με $\mathbf{y}$ στα δεξιά, και την δεύτερη ανισότητα με $\mathbf{x}$ στα αριστερά, προκύπτουν τα Αξιώματα 3 και 4. Άρα μας απασχολούν μόνο τα Αξιώματα 1', 2' και 5].

Τα Αξιώματα 1' και 2' μας επιτρέπουν να δώσουμε στην μήτρα $\left(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{A}\right)$ την ερμηνεία της μήτρας ενός παιγνίου με $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ τις μικτές στρατηγικές των δύο παικτών. Παρόλον ότι $\sum_{i=1}^{m} x_i \neq 1$ και $\sum_{j=1}^{n} y_j \neq 1$ μπορούμε να ομαλοποιήσουμε τα διανύσματα αυτά ίσα με την μονάδα χωρίς απώλεια γενικότητας [απλά χρησιμοποιούμε διαφορετικές μονάδες μέτρησης]. Αν το κάνουμε αυτό προκύπτει από τα Αξιώματα αυτά ότι το παίγνιο έχει μηδενική αξία.

Παράδειγμα:
Οικονομία κότας και αυγού
Ορίσατε εκ νέου την $\left(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{A}\right)$ ως την μήτρα ενός παιγνίου $\mathbf{M}$. Τότε

$$\mathbf{M}=\left(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{A}\right)=\begin{pmatrix}1-\alpha & 12\\ 5-\alpha & -4\alpha\end{pmatrix}$$

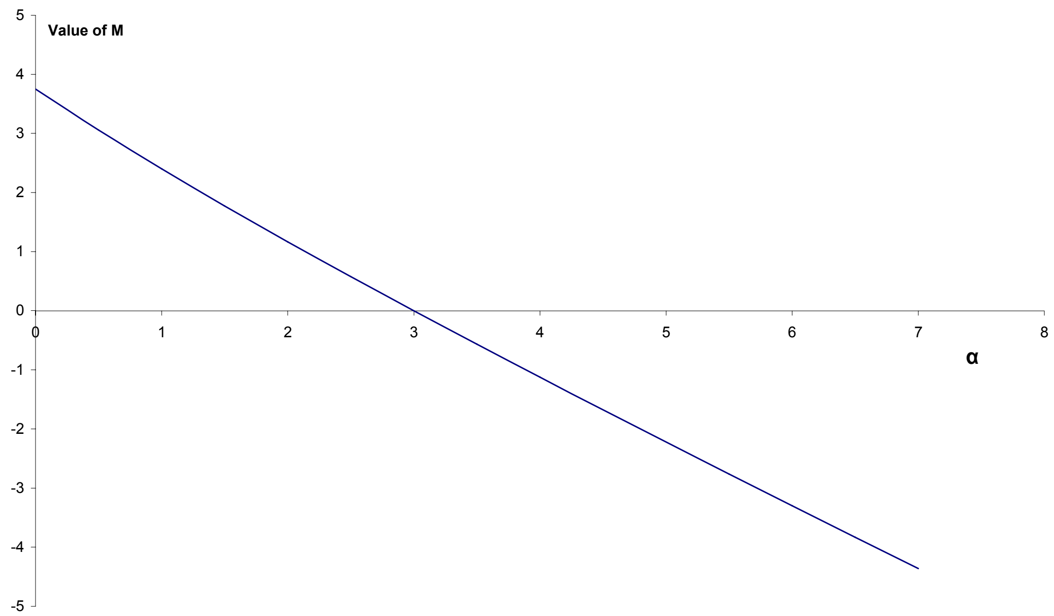
Επιλέξατε $x=(0,5 \quad 0,5)$ ως την μικτή στρατηγική για τον παίκτη της γραμμής, τότε $\mathbf{xM}=\left[3-\alpha \quad 2(3-\alpha)\right]$.

Για $\alpha < 3$ και τα δύο στοιχεία είναι θετικά και το παίγνιο έχει θετική αξία. Αν επιλέξουμε
$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ ως την μικτή στρατηγική για τον παίκτη στήλη τότε,

$$\mathbf{My} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7}(3-\alpha) \\ \frac{10}{7}(3-\alpha) \end{bmatrix}$$

Για $\alpha > 3$ και τα δύο στοιχεία είναι αρνητικά και το παίγνιο έχει αρνητική αξία.

Γράφουμε $\left(\mathbf{B} - \alpha\mathbf{A}\right) = \mathbf{B} + \alpha\left(-\mathbf{A}\right)$. Με τον περιορισμό που θέσαμε κάθε στήλη της $\mathbf{B}$ έχει ένα θετικό στοιχείο. Το ίδιο ισχύει και για το $\mathbf{y}$. Άρα στο γινόμενο $\mathbf{By}$ ένα τουλάχιστον στοιχείο είναι θετικό, άρα η αξία του παιγνίου **B** είναι θετική. Ανάλογα το παίγνιο $-\mathbf{A}$ έχει αρνητική αξία. Μεταβάλλοντας το α μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει μία τιμή για την οποία το παίγνιο **M** έχει μηδενική αξία.



Σημείωση.
Παραπάνω κάναμε χρήση της θεωρίας των παιγνίων. Στη θεωρία αυτή ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος μπορεί να γραφεί ως μία μήτρα πληρωμών που οι γραμμές της δείχνουν την πληρωμή του πρώτου παίκτη αν επιλέξει την γραμμή μιας συγκεκριμένης στρατηγικής για κάθε στρατηγική του δεύτερου παίκτη. Οι στήλες της μήτρας δείχνουν την πληρωμή πάλι του πρώτου παίκτη, αν ο δεύτερος παίκτης επιλέξει την στρατηγική της στήλης για κάθε στρατηγική γραμμής του πρώτου παίκτη. Παράδειγμα. Αν ο Α παίκτης έχει διαθέσιμες τις στρατηγικές (1) και (2) και ο Β παίκτης τις στρατηγικές (α) και (β) η μήτρα πληρωμών θα είναι

Παίκτης	Β		
Α	Στρατηγική	(α)	(β)

	(1)	2	1
	(2)	0	1

Αν ο Α παίξει την (1) και ο Β την (α) ο Α θα πάρει 2. Αν ο Β παίξει την (β) θα πάρει 1. Ο Α θα παίξει οπωσδήποτε την (1) διότι έχει καλύτερη έκβαση ό,τι και να παίξει ο Β. Ο Β με την σειρά του γνωρίζοντας ότι ο Α θα παίξει την (1) θα παίξει την (β). Άρα το παίγνιο έχει την λύση ((1), (β)) με πληρωμή 1 για τον Α και -1 για τον Β. Πρόκειται για αυστηρώς καθορισμένο παίγνιο (strictly determined game).

Μπορεί όμως το παίγνιο να μην είναι αυστηρώς καθορισμένο, και να είναι της μορφής:

Παίκτης	B		
A	Στρατηγική	(α)	(β)
	(1)	2	1
	(2)	1	2

τότε δεν συμφέρει τον Α να επιλέξει μια συγκεκριμένη στρατηγική: αν επιλέξει την (1) ο Β θα επιλέγει πάντα την (β). Αν πάλι επιλέξει την (2) ο Β θα επιλέγει πάντα την (α). Άρα και οι δύο παίκτες θα επιλέξουν μια *μικτή στρατηγική*: ο Α θα παίζει την στρατηγική (1) με πιθανότητα p και την στρατηγική (2) με πιθανότητα 1-p. Ο Β θα παίζει την στρατηγική (α) με πιθανότητα q και την στρατηγική (β) με πιθανότητα 1-q. Στην περίπτωσή μας οι πιθανότητες αυτές θα είναι p=q=1/2 και η αξία του παιγνίου θα είναι 1,5, εφόσον:

$$p\left(2q+1\left(1-q\right)\right)+(1-p)\left(1q+2\left(1-q\right)\right)=0,5\left(2\cdot 0,5+1\cdot 0,5\right)+0,5\left(1\cdot 0,5+2\cdot 0,5\right)=1,5$$

Αυτό γενικεύεται για *m* στρατηγικές του Α και *n* στρατηγικές του Β.
Μπορεί να αποδειχθεί ότι για κάθε μήτρα $m\times n$ ενός παιγνίου μηδενικού αθροίσματος υπάρχουν τα διανύσματα των πιθανοτήτων εκείνα που δίνουν μία λύση στο παίγνιο [Θεμελιώδες θεώρημα].
Τώρα στο υπόδειγμά μας θεωρούμε ότι $\mathbf{M}=\left(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{A}\right)$ είναι μια μήτρα παιγνίου και θεωρούμε τα διανύσματα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ως διανύσματα πιθανοτήτων. Το γεγονός ότι τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{m} x_i$ και $\sum_{j=1}^{n} y_j$ δεν είναι ίσα με την μονάδα όπως θα έπρεπε να είναι για να είναι πιθανότητες δεν μας απασχολεί διότι μπορούμε να ορίσουμε εκ νέου τις μονάδες των x και y για να κάνουμε $\sum_{i=1}^{m} x_i=\sum_{j=1}^{n} y_j=1$. [Γνωρίζουμε επίσης ότι $x_i\geq 0, y_j\geq 0\ \forall x_i, y_j$]. Άρα χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες θεώρημα μπορούμε να αποδείξουμε ότι το παίγνιο έχει λύση. Ο ρυθμός επέκτασης είναι εκείνο το α που κάνει την αξία του παιγνίου μηδενική.

Βιβλιογραφία

CHAMPERNOWNE, D.G. (1945-6), "A Note on J. von Neumann's Article on 'A Model of Economic Equilibrium'", *Review of Economic Studies*, τόμος XIII, τεύχος 1, σσ. 10-8. Ανατύπωση στο Hahn (1971).

DE PINA CABRAL, Maria Joao Cardoso (2003), "John von Neumann's Contribution to Economic Science", *International Social Science Review*, τόμος 78, τεύχος 3/4, σσ. 126-137.

DORE, Mohammed, Sukhamoy CHAKRAVARTY & Richard GOODWIN (επιμ.) (1989), *John von Neumann and Modern Economics*, Oxford: Clarendon Press.

HAHN, Frank H. (επιμ.) (1971), *Readings in the Theory of Growth*, London: Macmillan.

KEMENY, John G., J. Laurie SNEL & Gerald L. THOMSON (1966), *Introduction to Finite Mathematics*, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall International, 2η έκδοση.

KURZ, Heinz D. & Neri SALVADORI (2004), "Von Neumann, the Classical Economists and Arrow-Debreu: Some Notes", *Acta Oeconomica*, τόμος 54, 1, τεύχος 3, σσ. 39-62

MACRAE, Norman (1999), *John von Neumann: The Scientific Genius Who Pioneered the Modern Computer, Game Theory, Nuclear Deterrence, and Much More,* New York: Pantheon Books.

THOMSON, Gerald L. (1987), "von Neumann, John (1903-1957)", στο John Eatwell, Murray Millgate & Peter Newman (επιμ.), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, London: Macmillan, τόμος 4, σσ. 818-22.

VON NEUMANN, John (1937), "Über ein ökonomischen Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes", στο Karl Menger (επιμ.), *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, Vienna, 1938. Επανέκδοση στο Egbert Dierker & Karl Sigmund (επιμ.), *Karl Menger: Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, Berlin & New York: Springer Verlag, 1998.

VON NEUMANN, John (1945-6), "*A Model of General Economic Equilibrium*", *Review of Economic Studies*, τόμος XIII, τεύχος 1, σσ. 1-9. Αγγλική μετάφραση από G. Morgenstern του 1937. Ανατύπωση στο Hahn (1971).

VON NEUMANN, John (2001), *Το μοντέλο της γενικής ισορροπίας*, Αθήνα: Κριτική.

ΕΒΔΟΜΗ ΔΙΑΛΕΞΗ
Σύγκλιση

Λευτέρης Τσερκέζης (UADPhilEcon), Μάιος 2008

Ι. Εισαγωγή

Ένα από τα πιο εμφανή, ενδιαφέροντα και ανησυχητικά εμπειρικά φαινόμενα του σύγχρονου κόσμου είναι το τεράστιο χάσμα μεταξύ πλουσίων και φτωχών χωρών σε όρους του κατά κεφαλήν εισοδήματός τους. Το χάσμα αυτό είναι μάλιστα τόσο έντονο και οι εκφάνσεις του τόσο ορατές που η παράθεση συγκεκριμένων στατιστικών στοιχείων με σκοπό την απόδειξη της ύπαρξής του είναι μάλλον περιττή. Καθώς το κατά κεφαλήν ΑΕΠ αποτελεί, παρά τις όποιες ατέλειές του, έναν σημαντικό δείκτη του πλούτου και της ευημερίας μιας κοινωνίας, οι πρακτικές συνέπειες των ανισοτήτων αυτών για το βιοτικό επίπεδο δισεκατομμυρίων ανθρώπων είναι προφανείς, ιδίως αν κανείς λάβει υπ' όψη το γεγονός ότι στις φτωχές και σχετικά υπανάπτυκτες χώρες της Υποσαχάριας Αφρικής, της Κεντρικής και Ανατολικής Ασίας, καθώς και της Λατινικής Αμερικής, κατοικεί η πλειοψηφία του παγκόσμιου πληθυσμού. Εξ ίσου προφανές είναι το ότι η θεωρία της οικονομικής μεγέθυνσης αποτελεί ίσως το πλέον πρόσφορο έδαφος για την πραγμάτευση των παραπάνω ζητημάτων. Αφενός διότι το χάσμα αυτό έχει προκύψει ακριβώς λόγω της άνισης μεγέθυνσης των διαφόρων οικονομιών κατά το παρελθόν και αφετέρου επειδή μπορεί να καλυφθεί μόνο μέσω της ταχείας μεγέθυνσης των φτωχών και υπανάπτυκτων χωρών. Το κρίσιμο λοιπόν, θεωρητικό και εμπειρικό, ερώτημα που προκύπτει είναι το εάν και κατά πόσο υπάρχουν, στα πλαίσια ενός συστήματος οικονομίας της αγοράς, μηχανισμοί οι οποίοι θα τείνουν αυτόματα να μειώσουν (ή να αυξήσουν) το παραπάνω χάσμα. Επιπλέον, εάν τέτοιου είδους μηχανισμοί πράγματι υπάρχουν, τι είναι αυτό που τους έχει εμποδίσει να λειτουργήσουν στην περίπτωση χωρών οι οποίες δεν έχουν καταφέρει να αναπτυχθούν αρκετά γρήγορα (σε κάποιες περιπτώσεις καθόλου) ώστε να προσεγγίσουν το επίπεδο των πλουσίων χωρών; Εάν, πάλι, τέτοιοι μηχανισμοί δεν υπάρχουν, τι είδους πολιτικές πρέπει να ακολουθήσουν οι φτωχές χώρες για να ξεπεράσουν την υπανάπτυξή τους;

Οι διάφορες θεωρητικές και εμπειρικές μελέτες περί σύγκλισης προσπαθούν να απαντήσουν στα παραπάνω ερωτήματα. Δυστυχώς, είναι μάλλον αδύνατο να διατυπώσουμε στο σημείο αυτό έναν σαφέστερο ορισμό της έννοιας της σύγκλισης, για τον απλό λόγο ότι στα πλαίσια της σχετικής βιβλιογραφίας η έννοια αυτή δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Αντιθέτως, υπάρχουν, όπως θα δούμε στη συνέχεια, διάφορες μορφές σύγκλισης, σε κάθε μία εκ των οποίων αντιστοιχούν διαφορετικά είδη στατιστικών ελέγχων. Ο βασικός λόγος για τον οποίον συμβαίνει αυτό είναι, σε τελική ανάλυση, ο ίδιος λόγος για τον οποίον ο αριθμός των θεωρητικών και κυρίως των εμπειρικών μελετών πάνω στα ζητήματα αυτά έχει εκτοξευτεί κατά τη διάρκεια των δύο τελευταίων δεκαετιών, καθώς και για τον οποίον έχουν αυξηθεί – μαζί με τον αριθμό των σχετικών μελετών – και ενταθεί και οι σχετικές διαμάχες.

Αντίθετα ίσως με ό,τι θα ανέμενε κανείς, η βασική αιτία όλων των παραπάνω δεν ήταν η αναγνώριση της τεράστιας σημασίας των ζητημάτων αυτών για πρακτικούς λόγους, αν και σκέψεις παρόμοιες με αυτές της πρώτης παραγράφου σίγουρα έπαιξαν κάποιον ρόλο. Ο πρωταρχικός όμως λόγος που οδήγησε τόσο στην αύξηση της ενασχόλησης των οικονομολόγων με ζητήματα σύγκλισης όσο και στην εμφάνιση διαφόρων μορφών της έννοιας αυτής, συνδέεται μάλλον με θεωρητικά ζητήματα. Πιο συγκεκριμένα, συνδέεται με την εμφάνιση, στα μέσα περίπου της δεκαετίας του '80, των πρώτων υποδειγμάτων ενδογενούς μεγέθυνσης από τους Romer (1986) και Lucas (1988). Οι συγγραφείς των υποδειγμάτων αυτών, αν και υιοθέτησαν ένα νεοκλασικό – στις γενικές τους γραμμές – θεωρητικό και εννοιολογικό πλαίσιο, άσκησαν σκληρή κριτική στο τυπικό νεοκλασικό υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης (Solow), μια κριτική η οποία είχε δύο βασικές πτυχές. Η πρώτη, με την οποία δεν θα ασχοληθούμε περαιτέρω στις σημειώσεις αυτές, είχε να κάνει με την αντιμετώπιση εκ μέρους του Solow του ζητήματος της τεχνικής προόδου. Η δεύτερη, η οποία μας ενδιαφέρει στην παρούσα συζήτηση, ήταν το ότι το υπόδειγμα του Solow προβλέπει την ύπαρξη μιας διαδικασίας σύγκλισης, προσέγγισης δηλαδή του επιπέδου του κατά κεφαλήν ΑΕΠ των πλουσίων χωρών από τις φτωχές χώρες, πρόβλεψη η οποία ερχόταν σε σύγκρουση με τα εμπειρικά στοιχεία.

Ως αποτέλεσμα, η όλη συζήτηση που ακολούθησε διαμορφώθηκε γύρω από το υπόδειγμα του Solow, ενώ οι διάφορες μορφές που η έννοια της σύγκλισης πήρε στη σχετική βιβλιογραφία προέκυψαν, ουσιαστικά, μέσα από τη διερεύνηση του τι ακριβώς προβλέπει (και τι δεν προβλέπει) το υπόδειγμα αυτό. Το υπόδειγμα του Solow κατέστη, με άλλα λόγια, ο κεντρικός άξονας γύρω από τον οποίο περιστράφηκε η όλη συζήτηση, ανεξαρτήτως του εάν ο εκάστοτε συγγραφέας ήθελε να το υπερασπιστεί ή να καταρρίψει τα συμπεράσματά του. Για τον λόγο αυτό, θα ξεκινήσουμε ακριβώς από αυτό το σημείο, δηλαδή από την ανάλυση του ποιες ακριβώς είναι οι προβλέψεις του τυπικού νεοκλασικού υποδείγματος σε σχέση με το ζήτημα της σύγκλισης και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην παράθεση και την εξήγηση των διαφόρων μορφών σύγκλισης.

ΙΙ. Οι προβλέψεις του υποδείγματος του Solow

Ακολουθώντας τον καθιερωμένο συμβολισμό, έχουμε $\tilde{k}_t = K_t / A_t L_t$ (κεφάλαιο ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας) και $\tilde{y}_t = Y_t / A_t L_t$ (προϊόν ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας). Το A_t είναι το απόθεμα των τεχνολογικών γνώσεων της κοινωνίας τη χρονική στιγμή t, το οποίο υποθέτουμε ότι μεγεθύνεται με σταθερό εξωγενή ρυθμό g. Το g είναι, με άλλα λόγια, ο ρυθμός της κατά Harrod ουδέτερης τεχνικής προόδου. Επίσης, $k_t = K_t / L_t$ (κεφάλαιο ανά εργαζόμενο) και $y_t = Y_t / L_t$ (προϊόν ανά εργαζόμενο). Γνωρίζουμε ότι στην ισορροπία, δηλαδή στη μεγέθυνση σταθερής κατάστασης, θα ισχύουν, σε σχέση με τους ρυθμούς μεγέθυνσης των βασικών μεταβλητών τα εξής: πρώτον, οι μεταβλητές σε απόλυτους όρους θα μεγεθύνονται με το άθροισμα των ρυθμών τεχνικής προόδου και αύξησης του πληθυσμού, δηλαδή $\dot{K}/K = \dot{Y}/Y = g + n$. Δεύτερον, οι μεταβλητές ανά εργαζόμενο θα μεγεθύνονται με τον ρυθμό της τεχνικής προόδου, δηλαδή $\dot{k}/k = \dot{y}/y = g$. Και τρίτον, οι μεταβλητές ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας θα είναι σταθερές, δηλαδή $\dot{\tilde{k}}/\tilde{k} = \dot{\tilde{y}}/\tilde{y} = 0$. Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν φυσικά μόνο στην περίπτωση που η οικονομία βρίσκεται στη σταθερή κατάσταση, ενώ οι ρυθμοί μεγέθυνσης θα είναι διαφορετικοί κατά τη διάρκεια της μετάβασης προς τη σταθερή κατάσταση.

Για να γίνει αυτό περισσότερο κατανοητό, ας δούμε πώς ακριβώς θα γίνει η μετάβαση αυτή. Θα υποθέσουμε, για λόγους απλούστευσης, ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής Cobb-Douglas, φυσικά με σταθερές αποδόσεις κλίμακας. Δηλαδή,

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} \tag{1}$$

Διαιρώντας και τις δύο πλευρές με $A_t L_t$ παίρνουμε την εντατική μορφή της συνάρτησης παραγωγής

$$\begin{aligned} & Y_t / A_t L_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha} / A_t L_t \Rightarrow \\ & \tilde{y}_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{-\alpha} \Rightarrow \tilde{y}_t = K_t^{\alpha} / (A_t L_t)^{\alpha} \Rightarrow \\ & \tilde{y}_t = (K_t / A_t L_t)^{\alpha} \Rightarrow \tilde{y}_t = \tilde{k}_t^{\alpha} \end{aligned} \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων, μπορούμε από τη σχέση αυτή να βρούμε τον ρυθμό μεγέθυνσης του προϊόντος ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας, δηλαδή του $\tilde{y}_t$, ως εξής:

$$\begin{aligned} & \ln \tilde{y}_t = \ln \tilde{k}_t^{\alpha} \Rightarrow \ln \tilde{y}_t = \alpha \ln \tilde{k}_t \Rightarrow \\ & d \ln \tilde{y}_t / dt = \alpha [d \ln \tilde{k}_t / dt] \Rightarrow \\ & \dot{\tilde{y}} / \tilde{y} = \alpha \dot{\tilde{k}} / \tilde{k} \end{aligned} \tag{3}$$

Προσέξτε ότι αυτός ο ρυθμός μεγέθυνσης ισχύει πάντοτε, είτε βρίσκεται η οικονομία σε μεγέθυνση σταθερής κατάστασης είτε όχι. Εφόσον $0 < \alpha < 1$, η σχέση αυτή μας λέει ότι όταν η οικονομία βρίσκεται εκτός ισορροπίας (στην ισορροπία, όπως είδαμε $\dot{\tilde{k}}/\tilde{k} = \dot{\tilde{y}}/\tilde{y} = 0$) το προϊόν ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας θα μεγεθύνεται με ρυθμό μικρότερο από ό,τι το κεφάλαιο ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας. Ο ρυθμός μεγέθυνσης του κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας δίνεται, όπως γνωρίζουμε, από τη θεμελιώδη εξίσωση του υποδείγματος του Solow, δηλαδή

$$\dot{\tilde{k}} = sf(\tilde{k}) - (\delta + n + g)\tilde{k} \text{ ή } \dot{\tilde{k}}/\tilde{k} = \frac{sf(\tilde{k})}{\tilde{k}} - (\delta + n + g) \tag{4}$$

Προφανώς, οι δύο αυτές εξισώσεις μας λένε ακριβώς το ίδιο πράγμα, ότι δηλαδή το απόθεμα κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας αυξάνεται (μειώνεται) εάν η αποταμίευση ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας είναι μεγαλύτερη (μικρότερη) από την επένδυση που απαιτείται για να διατηρηθεί το $\tilde{k}$ σταθερό. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η οικονομία ξεκινάει από ένα σημείο όπου το $\tilde{k}$ είναι μικρότερο από το επίπεδο ισορροπίας το οποίο θα συμβολίσουμε με $\tilde{k}^*$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε $sf(\tilde{k}) > (\delta + n + g)\tilde{k}$, επομένως $\dot{\tilde{k}} > 0$ ή $\dot{\tilde{k}}/\tilde{k} > 0$ και η (3) μας λέει ότι $\dot{\tilde{y}}/\tilde{y} > 0$, δηλαδή τόσο το $\tilde{k}$ όσο και το $\tilde{y}$ αυξάνονται. Σύμφωνα όμως με την (3), κάθε αύξηση του $\tilde{k}$ προκαλεί μια μικρότερη αύξηση στο $\tilde{y}$. Εφόσον το s είναι σταθερό, αυτό σημαίνει ότι την επόμενη περίοδο το $s\tilde{y} = sf(\tilde{k})$ θα αυξηθεί λιγότερο από ό,τι είχε αυξηθεί το $\tilde{k}$. Από την (4) βλέπουμε όμως ότι στην περίπτωση αυτή το $\dot{\tilde{k}}/\tilde{k}$, αν και παραμένει θετικό, μειώνεται. Αυτό είναι εύκολο να φανεί και διαγραμματικά, καθώς το $\dot{\tilde{k}}$ είναι απλά η κάθετη απόσταση μεταξύ της καμπύλης $sf(\tilde{k})$, δηλαδή της αποταμίευσης ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας) και της καμπύλης $(\delta + n + g)\tilde{k}$ και η απόσταση αυτή προφανώς μειώνεται καθώς η οικονομία μεταβαίνει προς την ισορροπία. Ο λόγος για τον οποίον η απόσταση αυτή μειώνεται είναι προφανώς το κυρτό σχήμα της $sf(\tilde{k})$. Η κυρτότητα αυτή όμως προκύπτει απλά από την κυρτότητα της $\tilde{y}=f(\tilde{k})$ η οποία, όπως γνωρίζουμε, είναι αποτέλεσμα της υπόθεσης περί φθίνοντος οριακού προϊόντος του κεφαλαίου, δηλαδή της υπόθεσης ότι $\partial Y/\partial K>0$, αλλά $\partial^2 Y/\partial K^2<0$. Για να ανακεφαλαιώσουμε, το υπόδειγμα μας λέει ότι καθώς η οικονομία μεταβαίνει προς την ισορροπία, τόσο το κεφάλαιο όσο και το προϊόν ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας θα αυξάνονται, αλλά οι αυξήσεις αυτές θα γίνονται ολοένα μικρότερες καθώς πλησιάζουμε την ισορροπία. Όταν η οικονομία φτάσει την ισορροπία, οι αποταμιεύσεις ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας θα είναι πλέον ίσες με την επένδυση που απαιτείται για να διατηρηθεί το $\tilde{k}$ σταθερό, ισχύει δηλαδή η σχέση $sf(\tilde{k})=(\delta+n+g)\tilde{k}$, με αποτέλεσμα να έχουμε πλέον $\dot{\tilde{k}}/\tilde{k}=\dot{\tilde{y}}/\tilde{y}=0$.

Τώρα, εφόσον $k=K/L$ και $\tilde{k}=K/AL$, μπορούμε να γράψουμε $k=A\tilde{k}$. Ομοίως, αφού $y=Y/L$ και $\tilde{y}=Y/AL$, έχουμε $y=A\tilde{y}$. Επομένως, ο ρυθμός μεγέθυνσης του y δίνεται από τη σχέση

$$\dot{y}/y=\dot{A}/A+\dot{\tilde{y}}/\tilde{y}=g+\dot{\tilde{y}}/\tilde{y} \tag{5}$$

Προφανώς, στην ισορροπία $\dot{\tilde{y}}/\tilde{y}=0 \Rightarrow \dot{y}/y=g$ όπως ήδη γνωρίζουμε. Όμως, υπό το πρίσμα της παραπάνω ανάλυσης, η (5) μας λέει επίσης ότι το προϊόν ανά εργαζόμενο μεγεθύνεται με ρυθμό μεγαλύτερο αυτού της τεχνικής προόδου καθώς η οικονομία προσεγγίζει την ισορροπία. Μας λέει, επιπλέον, ότι όσο πιο μακριά από την ισορροπία βρίσκεται η οικονομία τόσο μεγαλύτερος θα είναι αυτός ο ρυθμός, καθώς, όπως είδαμε, όσο πιο μακριά από την ισορροπία βρισκόμαστε τόσο μεγαλύτερο είναι το $\dot{\tilde{y}}/\tilde{y}$.

Ποιο είναι τώρα το νόημα των παραπάνω; Αφενός ότι σύμφωνα με το υπόδειγμα του Solow, κάθε οικονομία θα συγκλίνει στην ισορροπία ανεξαρτήτως του από που θα ξεκινήσει. Αυτό βέβαια το γνωρίζαμε είδη, οπότε η παραπάνω συζήτηση ήταν απλά ένας διαφορετικός τρόπος να το εκφράσουμε. Αφετέρου όμως, είδαμε ότι όσο πιο μακριά βρίσκεται μια οικονομία από τη μεγέθυνση σταθερής κατάστασης τόσο μεγαλύτερος θα είναι ο ρυθμός μεγέθυνσής της, δηλαδή ο ρυθμός μεγέθυνσης του προϊόντος ανά εργαζόμενο. Ας υποθέσουμε τώρα, για να συνδέσουμε τα παραπάνω με την έννοια της σύγκλισης, ότι υπάρχουν δύο οικονομίες οι οποίες έχουν την ίδια ακριβώς μεγέθυνση σταθερής κατάστασης. Αυτό σημαίνει απλά ότι οι διάφορες παράμετροι του υποδείγματος (α, s, n, δ, g) είναι οι ίδιες για τις δύο αυτές οικονομίες. Στην περίπτωση αυτή, το υπόδειγμα του Solow μας λέει (α) ότι οι δύο αυτές οικονομίες θα συγκλίνουν στο ίδιο επίπεδο προϊόντος ανά εργαζόμενο και (β) ότι εάν αυτές οι δύο οικονομίες ξεκινήσουν από διαφορετικό σημεία, η οικονομία με το χαμηλότερο αρχικό προϊόν ανά εργαζόμενο θα μεγεθύνεται με μεγαλύτερο ρυθμό. Αυτή η έννοια της σύγκλισης, η οποία όπως είδαμε αναφέρεται σε οικονομίες με την ίδια – ή τουλάχιστον παρόμοια – σταθερή κατάσταση, ονομάζεται γενικά *«απόλυτη σύγκλιση»*. Η έννοια αυτή υποδιαιρείται σε δύο διαφορετικές έννοιες, την *«απόλυτη σύγκλιση τύπου σ»* και την *«απόλυτη σύγκλιση τύπου β»*. Οι δύο αυτές υποκατηγορίες της απόλυτης σύγκλισης προκύπτουν λόγω της ύπαρξης δύο μεθόδων στατιστικού ελέγχου οι οποίες, όπως θα δούμε, δεν είναι ισοδύναμες.

III. Απόλυτη σύγκλιση τύπου σ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν αριθμό οικονομιών οι οποίες χαρακτηρίζονται από την ίδια σταθερή κατάσταση, αλλά οι οποίες ξεκινούν τη μετάβασή τους προς τη σταθερή κατάσταση αυτή από διαφορετικά σημεία, έχουμε δηλαδή διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Κάποιες οικονομίες μπορεί να βρίσκονται κοντά στην ισορροπία, επομένως ο ρυθμός μεγέθυνσής τους θα είναι σχετικά μικρός. Κάποιες μπορεί να ξεκινήσουν από πολύ πιο μακριά, επομένως ο ρυθμός μεγέθυνσής τους θα είναι, σύμφωνα με τα παραπάνω, μεγαλύτερος. Η ύπαρξη διαφορετικών αρχικών συνθηκών σημαίνει ότι θα υπάρχει κάποια διασπορά των προϊόντων ανά εργαζόμενο των οικονομιών αυτών και τη διασπορά αυτή μπορούμε να τη μετρήσουμε υπολογίζοντας τη διακύμανσή τους. Τώρα, στη βάση της προηγούμενης ανάλυσης, καθώς οι διάφορες αυτές οικονομίες προσεγγίζουν την κοινή τους σταθερή κατάσταση, οι ρυθμοί μεγέθυνσής τους θα μειώνονται. Καθώς μειώνονται οι ρυθμοί μεγέθυνσης, ακόμη και για αυτές τις οικονομίες που αρχικά βρίσκονταν πολύ μακριά από την ισορροπία και άρα μεγεθύνονταν ταχύτατα, η διασπορά των προϊόντων ανά εργαζόμενο θα πρέπει να μειώνεται. Επομένως, αν υπολογίσουμε τη διακύμανση στις διαδοχικές χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2, ..., T$ τότε, αν η πρόβλεψη περί απόλυτης σύγκλισης είναι σωστή, θα πρέπει να ισχύει το εξής:

$$\sigma_0^2 > \sigma_1^2 > ... > \sigma_{\mathrm{T}}^2$$

Θα πρέπει δηλαδή να μειώνεται η διακύμανση που παρουσιάζει το προϊόν ανά εργαζόμενο των διαφόρων χωρών, καθώς όλες συγκλίνουν στο ίδιο επίπεδο προϊόντος ανά εργαζόμενο, στην ίδια δηλαδή σταθερή κατάσταση[84].

IV. Απόλυτη σύγκλιση τύπου β

Ένας εναλλακτικός τρόπος στατιστικού ελέγχου της ύπαρξης απόλυτης σύγκλισης ο οποίος έχει προταθεί στη βιβλιογραφία είναι η εκτίμηση της παρακάτω εξίσωσης παλινδρόμησης:

$$\frac{1}{T}\log(\frac{y_{i,T}}{y_{i,0}}) = \alpha + \beta \log y_{i,0} + \xi_i \qquad (6)$$

για μια ομάδα N χωρών οι οποίες έχουν την ίδια σταθερή κατάσταση. Ας δούμε πρώτα τι σημαίνει η εξίσωση αυτή, ξεκινώντας από την αριστερή της πλευρά. Το $y_{i,T}$ είναι το προϊόν ανά εργαζόμενο στη χώρα i ($i = 1, 2, \ldots, N$) τη χρονική στιγμή T, δηλαδή την τελευταία περίοδο για την οποία έχουμε στατιστικά στοιχεία. Ομοίως, το $y_{i,0}$ είναι το προϊόν ανά εργαζόμενο στη χώρα i τη χρονική στιγμή 0, δηλαδή την πρώτη περίοδο που περιλαμβάνεται στο δείγμα μας. Τώρα, $\log(y_{i,T}/y_{i,0}) = \log y_{i,T} - \log y_{i,0}$, δηλαδή η μεταβολή του λογαρίθμου του y κατά την περίοδο $[0, T]$. Γνωρίζουμε όμως ότι η απόλυτη μεταβολή του log$y$ είναι απλά η ποσοστιαία μεταβολή του y. Άρα, η παραπάνω σχέση μας δίνει τον ρυθμό μεγέθυνσης του y στην περίοδο $[0, T]$. Διαιρώντας λοιπόν με T, δηλαδή με τον αριθμό των περιόδων, παίρνουμε τον μέσο ετήσιο ρυθμό μεγέθυνσης του προϊόντος ανά εργαζόμενο

[84] Η βασική μεταβλητή στο υπόδειγμα του Solow είναι το προϊόν ανά εργαζόμενο. Η μεταβλητή που χρησιμοποιείται στις διάφορες εμπειρικές έρευνες είναι το κατά κεφαλήν ΑΕΠ. Θα υποθέσουμε ότι αυτές οι δύο μεταβλητές είναι το ίδιο πράγμα και θα χρησιμοποιούμε τους δύο όρους εναλλάξ, παρά το ότι, αν θέλουμε να είμαστε απολύτως ακριβείς, οι δύο έννοιες δεν είναι ταυτόσημες. Επίσης, πρέπει να σημειωθεί ότι οι έλεγχοι για απόλυτη σύγκλιση τύπου σ υπολογίζουν τη διακύμανση των λογαρίθμων των κατά κεφαλήν ΑΕΠ και όχι των απόλυτων επιπέδων τους. Προφανώς, αυτό δεν αλλάζει τίποτα επί της ουσίας, καθώς μας ενδιαφέρει μόνο το εάν η διακύμανση αυξάνεται ή μειώνεται και όχι το απόλυτο μέγεθός της.

κατά την περίοδο αυτή. Εάν, για παράδειγμα, έχουμε ετήσια στοιχεία από το 1960 έως το 1979 (οπότε $T = 20$), και γνωρίζουμε ότι το κατά κεφαλήν ΑΕΠ μιας χώρας ήταν \$16.000 το 1960 και \$32.000 το 1979, τότε θα είχαμε

$$\log(y_{i,1979}/y_{i,1960}) = (\$32.000 - \$16.000)/\$16.000 = 100\%$$

και ο μέσος ετήσιος ρυθμός μεγέθυνσης θα ήταν $(1/20)100\% = 5\%$. Περνώντας στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης, το α είναι προφανώς ο σταθερός όρος, το ξ_i είναι το σφάλμα και το $\log y_{i,0}$ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Το β, ο συντελεστής της ανεξάρτητης μεταβλητής τον οποίον θέλουμε να εκτιμήσουμε, μας δείχνει την επίδραση που θα έχει μια μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής πάνω στην εξαρτημένη υπό τον όρο ότι καμία άλλη σχετική μεταβλητή δεν μεταβάλλεται[85]. Αν, για παράδειγμα, στην εξίσωση (6) εκτιμήσουμε ότι $\beta = 0,4$ αυτό θα σημαίνει ότι μια αύξηση της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά 1% θα έχει ως συνέπεια, *ceteris paribus*, την αύξηση εξαρτημένης μεταβλητής κατά 0,4%.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η εξαρτημένη μεταβλητή είναι ο μέσος ετήσιος ρυθμός μεγέθυνσης και η ανεξάρτητη είναι το αρχικό επίπεδο του προϊόντος ανά εργαζόμενο. Αν λοιπόν η στατιστική εκτίμηση δείξει ότι $\beta < 0$, αυτό θα σημαίνει ότι το αρχικό επίπεδο του y επιδρά αρνητικά στον ρυθμό μεγέθυνσής του, ότι δηλαδή μεγαλύτερα αρχικά επίπεδα θα συνδέονται με μικρότερους ρυθμούς μεγέθυνσης και αντιστρόφως. Στην περίπτωση λοιπόν που ισχύει ότι $\beta < 0$ για χώρες $i = 1, 2, ..., N$ με την ίδια σταθερή κατάσταση, λέμε ότι έχουμε *απόλυτη σύγκλιση τύπου* β.

V. Παλινδρόμηση προς τον μέσο και μείωση της διασποράς: η μη ισοδυναμία των δύο μορφών απόλυτης σύγκλισης

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι οι δύο μορφές απόλυτης σύγκλισης δεν είναι ισοδύναμες. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν έχουμε απόλυτη σύγκλιση τύπου σ τότε θα έχουμε αναγκαστικά και απόλυτη σύγκλιση τύπου β. Αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει. Είναι δηλαδή δυνατό να έχουμε $\beta < 0$ στην εκτίμηση της (6) και ταυτόχρονα να μην έχουμε μείωση της διασποράς των κατά κεφαλήν ΑΕΠ. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό, μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση (6), υποθέτοντας, για να απλουστεύσουμε τις πράξεις, ότι $T = 1$. Επομένως έχουμε

$$\log y_{i,1} - \log y_{i,0} = \alpha + \beta \log y_{i,0} + \xi_i \Rightarrow$$

$$\log y_{i,1} = \alpha + (1+\beta)\log y_{i,0} + \xi_i$$

Άρα, η διακύμανση του $\log y_{i,1}$ θα δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} Var(\log y_{i,1}) &= (1+\beta)^2 Var(\log y_{i,0}) + Var(\xi_i) \Rightarrow \\ \sigma_1^2 &= (1+\beta)^2 \sigma_0^2 + \sigma_{\xi_i}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τους κανόνες σύμφωνα με τους οποίους η διακύμανση μιας σταθεράς είναι εξ ορισμού μηδέν, ενώ $Var(ax) = a^2 Var(x)$ για σταθερά α. Από την (7) μπορούμε να δούμε ότι, εφόσον $\sigma_{\xi_i}^2 > 0$, ισχύει ότι $\sigma_1^2 < \sigma_0^2 \Rightarrow \beta < 0$, δηλαδή εάν η διακύμανση μειώνεται (αν έχουμε απόλυτη σύγκλιση τύπου σ) τότε ο συντελεστής της παλινδρόμησης θα είναι αναγκαστικά αρνητικός (θα έχουμε και απόλυτη σύ-

[85] Προφανώς, στην περίπτωση της (6) δεν υπάρχουν άλλες σχετικές μεταβλητές, καθώς η μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το αρχικό επίπεδο του κατά κεφαλήν ΑΕΠ. Απλώς, δίνουμε τον γενικό ορισμό ο οποίος ισχύει και στην περίπτωση που υπάρχουν άνω της μίας μεταβλητές στην δεξιά πλευρά της εξίσωσης.

γκλιση τύπου *β*). Είναι όμως εξίσου εμφανές ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Σύμφωνα με την (7), είναι απολύτως δυνατό να έχουμε $\beta < 0$ και ταυτόχρονα $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$, δηλαδή αύξηση της διασποράς των λογαρίθμων των προϊόντων ανά εργαζόμενο.

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω είναι ότι ο έλεγχος τύπου *β* δεν αποτελεί αξιόπιστη μέθοδο για να δούμε εάν υπάρχει απόλυτη σύγκλιση. Θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό. Κάποια εξήγηση είναι απαραίτητη γιατί το φαινόμενο είναι πολύ γενικότερο από τη θεωρία οικονομικής μεγέθυνσης ή από το ζήτημα της σύγκλισης. Στην πραγματικότητα πρόκειται περί μιας πολύ συνηθισμένης λογικής πλάνης στην οποία μπορεί να οδηγήσει η άκριτη στατιστική ανάλυση και η οποία σχετίζεται με το φαινόμενο που είναι γνωστό ως *«παλινδρόμηση προς τον μέσο»*. Τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει απλά ότι εάν κάποια μεταβλητή πάρει κάποια ακραία τιμή, δηλαδή μια τιμή πολύ μεγαλύτερη ή πολύ μικρότερη από τον μέσο όρο, την επόμενη φορά που θα μετρήσουμε την ίδια μεταβλητή η τιμή της θα είναι, κατά πάσα πιθανότητα, λιγότερο ακραία, με άλλα λόγια θα έχει προσεγγίσει τον μέσο όρο. Αυτό είναι ένα απόλυτα φυσιολογικό φαινόμενο το οποίο εμφανίζεται σε κάθε διαδικασία, φυσική ή κοινωνική, η οποία διέπεται από διακυμάνσεις. Δεν συνεπάγεται όμως ότι η διασπορά των διαφόρων τιμών της εν λόγω μεταβλητής θα μειώνεται.

Ας χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι 100 μαθητές γράφουν ένα διαγώνισμα και ας πάρουμε τα 10 καλύτερα γραπτά. Υποθέτουμε επίσης, για λόγους απλούστευσης του επιχειρήματος και μόνο, ότι αυτοί οι 10 μαθητές έχουν γράψει άριστα. Έστω τώρα ότι βάζουμε τους 100 μαθητές να γράψουν ένα νέο διαγώνισμα, παρόμοιας διάρθρωσης με το προηγούμενο. Το φαινόμενο της «παλινδρόμησης προς τον μέσο» μας λέει απλά ότι στην περίπτωση αυτή οι 10 μαθητές με τα άριστα γραπτά στο πρώτο διαγώνισμα θα γράψουν – κατά πάσα πιθανότητα – λίγο χειρότερα, δηλαδή οι βαθμοί τους θα προσεγγίσουν λίγο τον μέσο. Γιατί θα συμβεί αυτό; Γιατί ο βαθμός που παίρνει κανείς σε ένα διαγώνισμα, εξαρτάται μεν σε μεγάλο βαθμό από την ικανότητά του, τις γνώσεις του και το πόσο μελετηρός είναι, εξαρτάται όμως, έστω και σε μικρότερο βαθμό, από φαινόμενα συγκυριακά ή ακόμη και από απλή τύχη. Όταν λοιπόν οι συγκυρίες παίζουν κάποιο ρόλο, έστω και μικρό, όταν με άλλα λόγια το υπό μελέτη φαινόμενο διέπεται από κάποιες φυσιολογικές διακυμάνσεις, είναι σχεδόν βέβαιο ότι μια τιμή πολύ υψηλότερη του μέσου όρου θα ακολουθηθεί από μια λιγότερο ακραία. Σε τελική ανάλυση και σε μάλλον απλοϊκούς όρους, όταν έχεις γράψει άριστα η μόνη πιθανή μεταβολή είναι προς τα κάτω. Προφανώς, υπάρχει περίπτωση αυτή η προσέγγιση προς τον μέσο να μην λάβει χώρα, δηλαδή οι εν λόγω 10 μαθητές να γράψουν ξανά όλοι άριστα. Τι θα σήμαινε αυτό; Θα σήμανε ότι η συσχέτιση μεταξύ του βαθμού που θα γράψει κανείς στο πρώτο διαγώνισμα και του βαθμού που θα γράψει στο δεύτερο είναι τέλεια. Όταν λοιπόν έχουμε τέλεια συσχέτιση, το φαινόμενο της *«παλινδρόμησης προς τον μέσο»* δεν εμφανίζεται. Στον βαθμό όμως που η συσχέτιση είναι ατελής, στον βαθμό δηλαδή που παίζουν ρόλο και συγκυριακοί, τυχαίοι παράγοντες, η εμφάνισή του είναι βέβαιη.

Ας συνδέσουμε τώρα το παράδειγμά μας με το υπό συζήτηση ζήτημα. Το φαινόμενο της παλινδρόμησης προς τον μέσο μας λέει ότι οι 10 μαθητές με τα καλύτερα γραπτά θα γράψουν λίγο χειρότερα τη δεύτερη φορά, ενώ με την ίδια λογική οι 10 μαθητές με τα χειρότερα γραπτά θα γράψουν λίγο καλύτερα. Σημαίνει όμως αυτό ότι η συνολική διακύμανση των βαθμών θα μειωθεί, ότι δηλαδή οι βαθμοί των 100 μαθητών θα τείνουν να συγκλίνουν προς κάποιον μέσο όρο; Η απάντηση είναι προφανώς όχι, ή τουλάχιστον όχι αναγκαστικά. Διότι μπορεί οι ακραίες τιμές του πρώτου διαγωνίσματος να έχουν προσεγγίσει λίγο τον μέσο, ταυτόχρονα όμως μπορεί η μεταβλητότητα των βαθμών των υπολοίπων 80 μαθητών να έχει αυξηθεί. Μπορεί αρκετοί μαθητές οι οποίοι είχαν γράψει πιο κοντά στον μέσο όρο αρχικά, τώρα να έγραψαν άριστα ή χάλια. Αποτελεί επομένως λογικό σφάλμα να θεωρήσουμε ότι η συνολική διασπορά θα μειώνεται, ότι δηλαδή θα υπάρχει κάποια διαδικασία σύγκλισης, όταν γνωρίζουμε απλώς και μόνο ότι οι ακραίες τιμές τείνουν να προσεγγίσουν τον μέσο.

Ένα άλλο παράδειγμα που χρησιμοποιείται συχνά είναι αυτό του ύψους. Εάν μελετήσουμε τους άντρες με εξαιρετικά υψηλό ανάστημα σε μια κοινωνία, θα βρούμε – σχεδόν πάντοτε – ότι οι γιοι τους δεν είναι εξίσου ψηλοί. Ο λόγος είναι ότι το ύψος του πατέρα και το ύψος του γιου δεν συσχετίζονται τέλεια, καθώς υπάρχουν και άλλοι παράγοντες που επιδρούν στο ύψος του γιου. Πρώτα απ' όλα το ύψος της μητέρας ή ίσως και προγόνων προηγούμενων γενιών. Αλλά και πέρα από τους κληρονομικούς παράγοντες, το ύψος ενός ατόμου καθορίζεται σε κάποιον βαθμό και από περιβαλλοντικούς παράγοντες όπως η άθληση ή η διατροφή. Επειδή λοιπόν η συσχέτιση μεταξύ του ύψους του πατέρα και του ύψους του γιου δεν είναι τέλεια και επειδή το ύψος του πατέρα είναι υπερβολικά μεγάλο, είναι απολύτως λογικό και αναμενόμενο οι γιοι πανύψηλων γονιών να μην είναι τόσο ψηλοί όσο και οι γονείς τους. Σε καμία περίπτωση όμως δεν σημαίνει αυτό ότι η διακύμανση του ύψους του αντρικού πληθυσμού μιας κοινωνίας θα μειώνεται αναγκαστικά, ότι δηλαδή το ύψος του πληθυσμού αυτού θα συγκλίνει αναγκαστικά σε κάποιον μέσο όρο.

Το πώς συνδέονται τα παραπάνω με τη σχέση μεταξύ των δύο μορφών απόλυτης σύγκλισης ίσως να είναι ήδη σαφές. Μια αρνητική τιμή του β στην παραπάνω παλινδρόμηση δείχνει ότι ένα υψηλότερο αρχικό εισόδημα συνδέεται με έναν χαμηλότερο ρυθμό μεγέθυνσης. Όμως, οι χώρες που έχουν ένα ιδιαίτερα υψηλό αρχικό εισόδημα είναι απλά αυτές οι οποίες είχαν υψηλούς ρυθμούς μεγέθυνσης στο παρελθόν. Αντιστρόφως, χαμηλότερα αρχικά εισοδήματα συνδέονται με έναν υψηλότερο ρυθμό μεγέθυνσης, αλλά τα σχετικά χαμηλά αρχικά εισοδήματα είναι απλά το αποτέλεσμα χαμηλών ρυθμών μεγέθυνσης κατά τα προηγούμενα έτη. Με άλλα λόγια, το $\beta < 0$ μπορεί να σημαίνει απλά ότι οι χώρες αυτές που στην προηγούμενη περίοδο (την περίοδο που προηγείται του δείγματός μας) είχαν εξαιρετικά υψηλούς ρυθμούς μεγέθυνσης, τώρα μεγεθύνονται λιγότερο γρήγορα και αντιστρόφως, μπορεί δηλαδή να σημαίνει απλά ότι οι ακραίες τιμές προσεγγίζουν τον μέσο, κάτι ναι μεν απολύτως φυσιολογικό όπως είδαμε, αλλά το οποίο δεν υποδηλώνει την αναγκαστική ύπαρξη απόλυτης σύγκλισης τύπου σ. Φυσικά, όπως φαίνεται από την (7), μπορεί να έχουμε $\beta < 0$ και ταυτόχρονα $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$. Το ζήτημα είναι όμως ότι το πρώτο δεν συνεπάγεται αναγκαστικά το δεύτερο, με άλλα λόγια ότι μια αρνητική τιμή του β δεν αποτελεί επαρκή ένδειξη για την ύπαρξη σύγκλισης.

Πριν κλείσουμε την ενότητα αυτή, ας αναφερθούμε εν τάχει στα εμπειρικά αποτελέσματα των διαφόρων μελετών. Κατ'αρχήν, είδαμε ότι οι προβλέψεις του νεοκλασικού υποδείγματος περί απόλυτης σύγκλισης αναφέρονται σε οικονομίες με την ίδια σταθερή κατάσταση. Πρέπει επομένως να αναρωτηθούμε εάν υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο οικονομίες για τις οποίες είναι λογικό να υποθέσουμε ότι κάτι τέτοιο ισχύει. Θέλουμε δηλαδή να βρούμε κάποια σύνολα οικονομιών οι οποίες θα έχουν λίγο πολύ παρόμοια χαρακτηριστικά, ώστε να δούμε εάν η πρόβλεψη περί απόλυτης σύγκλισης επαληθεύεται. Ένα τέτοιο σύνολο που έχει χρησιμοποιηθεί στη βιβλιογραφία είναι οι ανεπτυγμένες δυτικές οικονομίες, κυρίως οι χώρες μέλη του G7. Μία εναλλακτική μέθοδος είναι να θεωρήσουμε ως ξεχωριστές οικονομίες κάποιες αυτόνομες πολιτικές οντότητες στα πλαίσια μεγαλύτερων και ενιαίων κρατών, όπως τις πολιτείες των ΗΠΑ, ή τα ομόσπονδα γερμανικά κρατίδια ή τους νομούς ή τις περιφέρειες ενός εθνικού κράτους. Και τα δύο είδη συνόλων έχουν μελετηθεί εμπειρικά (Barro & Sala-I-Martin 1992, 1995)και τα αποτελέσματα, τόσο των ελέγχων τύπου σ όσο και των ελέγχων τύπου β, επαληθεύουν σε γενικές γραμμές τις θεωρητικές προβλέψεις, αν και έχει βρεθεί ότι η ταχύτητα με την οποία λαμβάνει χώρα η σύγκλιση μεταξύ των πολιτειών των ΗΠΑ ή των νομών της Ιαπωνίας είναι εξαιρετικά χαμηλή.

Το ερώτημα είναι όμως το πόσο σημαντικά είναι στην πραγματικότητα τέτοιου είδους αποτελέσματα. Αναμφίβολα, είναι ιδιαιτέρως σημαντικά υπό την έννοια ότι παρέχουν μια εμπειρική επαλήθευση των προβλέψεων του τυπικού νεοκλασικού υποδείγματος. Από την άλλη πλευρά, όμως, το γεγονός ότι οι περιφέρειες της όποιας ήδη υπερανεπτυγμένης και πάμπλουτης χώρας τείνουν να συγκλίνουν σε όρους του κατά κεφαλήν εισοδήματός τους, δεν μας βοηθάει να απαντήσουμε στα βασικά ερωτήματα που τέθηκαν στην αρχή αυτών των σημειώσεων. Επιπλέον, οι μελέτες που προσπάθησαν να ελέγξουν την ύπαρξη απόλυτης σύγκλισης περιλαμβάνοντας το σύνολο των χωρών του κόσμου (τουλάχιστον αυτές για τις οποίες υπάρχουν αξιόπιστα στατιστικά στοιχεί), έδειξαν ότι η διασπορά των κατά κεφαλήν ΑΕΠ αυξάνεται, ότι δηλαδή το χάσμα μεταξύ πλουσίων και φτωχών χωρών μεγαλώνει. Με άλλα λόγια, σε απόλυτους όρους και λαμβάνοντας υπ’όψη το σύνολο των χωρών, δεν παρατηρούμε σύγκλιση αλλά απόκλιση.

VI. Υπό συνθήκη σύγκλιση τύπου β

Η ύπαρξη αυτής της απόκλισης έδωσε το έναυσμα για την άσκηση σκληρής κριτικής στο υπόδειγμα του Solow από την πλευρά των θεωρητικών της ενδογενούς μεγέθυνσης. Όπως έχουμε δει όμως, αυτό το εμπειρικό αποτέλεσμα δεν είναι ασύμβατο με το νεοκλασικό υπόδειγμα, καθώς το τελευταίο προβλέπει απλά τη σύγκλιση των οικονομιών με την ίδια σταθερή κατάσταση και δεν υπάρχει κανένας λόγος να πιστεύουμε ότι όλες οι χώρες του κόσμου έχουν την ίδια σταθερή κατάσταση. Το ερώτημα που προκύπτει είναι λοιπόν το εξής: αυτή η παρατηρηθείσα απόκλιση οφείλεται στο ότι οι προβλέψεις του Solow είναι λανθασμένες ή στο ότι απλά διαφέρουν οι σταθερές καταστάσεις των διαφόρων χωρών; Με άλλα λόγια, εάν μπορούσαμε να «ελέγξουμε» με κάποιον τρόπο την επίδραση της ύπαρξης διαφορετικών σταθερών καταστάσεων και να απομονώσουμε την επίδραση του αρχικού επιπέδου του κατά κεφαλήν ΑΕΠ στον ρυθμό μεγέθυνσης, η επίδραση αυτή θα ήταν θετική ή αρνητική; Στην περίπτωση που η απομονωμένη αυτή επίδραση είναι αρνητική, δηλαδή χαμηλά αρχικά επίπεδα συνδέονται με υψηλότερους ρυθμούς μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν ΑΕΠ, λέμε ότι παρατηρούμε «υπό συνθήκη σύγκλιση τύπου *β*». Η σύγκλιση αυτή καλείται «υπό συνθήκη» επειδή ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε διαχωρίσει την επίδραση του αρχικού επιπέδου του κατά κεφαλήν ΑΕΠ από την επίδραση όλων των υπολοίπων παραγόντων οι οποίοι οδηγούν στην ύπαρξη διαφορετικών σταθερών καταστάσεων.

Ποιοι είναι οι παράγοντες αυτοί; Τι καθορίζει, με άλλα λόγια, το αν δύο οικονομίες θα έχουν την ίδια ή διαφορετική σταθερή κατάσταση; Ας θυμηθούμε ότι στο υπόδειγμα του Solow η θεμελιώδης εξίσωση είναι η

$$\dot{\tilde{k}} = sf(\tilde{k}) - (\delta + n + g)\tilde{k}$$

Άρα, στη μεγέθυνση σταθερής κατάστασης θα ισχύει

$$\begin{aligned} &\dot{\tilde{k}} = 0 \Rightarrow sf(\tilde{k}^*) = (\delta + n + g)\tilde{k}^* \Rightarrow \\ &\tilde{k}^* = sf(\tilde{k}^*)\big/(\delta + n + g) \end{aligned} \qquad (8)$$

όπου, όπως και πριν, χρησιμοποιούμε τον αστερίσκο για να συμβολίσουμε την τιμή της εκάστοτε μεταβλητής (εδώ του κεφαλαίου ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας) στην σταθερή κατάσταση. Υποθέτοντας, όπως προηγουμένως, ότι η συνάρτηση παραγωγής είναι της μορφής Cobb-Douglas, δηλαδή ότι $\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$ και αντικαθιστώντας την (8) στη συνάρτηση αυτή, προκύπτει το επίπεδο του προϊόντος ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας στη μεγέθυνση σταθερής κατάστασης

$$\tilde{y}^* = [sf(\tilde{k}^*)/(\delta + n + g)]^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\tilde{y}^* = [s/(\delta + n + g)]^{\alpha} f(\tilde{k}^*)^{\alpha}$$

Εφόσον $y = \tilde{y}A \Rightarrow \tilde{y} = y/A$, το προϊόν ανά εργαζόμενο στην σταθερή κατάσταση θα ισούται με

$$y^*/A = [s/(\delta + n + g)]^{\alpha} (y^*/A)^{\alpha} \Rightarrow$$

$$y^* = [s/(\delta + n + g)]^{\alpha} y^{*\alpha} A^{1-\alpha} \Rightarrow$$

$$y^{*1-\alpha} = [s/(\delta + n + g)]^{\alpha} A^{1-\alpha} \Rightarrow \tag{9}$$

$$y^* = [s/(\delta + n + g)]^{\frac{a}{1-a}} A$$

Άρα, η σταθερή κατάσταση, δηλαδή το y^*, εξαρτάται από τις παραμέτρους s, δ, n, g, α και A. Μια χώρα λοιπόν η οποία έχει μεγαλύτερο s και μικρότερο n από μία άλλη, θα έχει και υψηλότερο επίπεδο προϊόντος ανά εργαζόμενο στην σταθερή κατάσταση. Άρα, οι δύο αυτές χώρες μπορούν κάλλιστα να αποκλίνουν σε όρους κατά κεφαλήν εισοδήματος μόνο και μόνο λόγω της διαφοράς τους στις παραμέτρους αυτές, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι καταρρίπτεται η πρόβλεψη του νεοκλασικού υποδείγματος περί σύγκλισης. Μπορεί δηλαδή να υπάρχει σύγκλιση, υπό την έννοια ότι η επίδραση του αρχικού εισοδήματος στον ρυθμό μεγέθυνσης είναι, από μόνη της, αρνητική και ταυτόχρονα τα κατά κεφαλήν εισοδήματα να αποκλίνουν επειδή οι διάφορες παράμετροι που καθορίζουν την σταθερή κατάσταση είναι άνισες μεταξύ των χωρών.

Με άλλα λόγια, όταν εξετάζουμε οικονομίες με διαφορετική σταθερή κατάσταση, το υπόδειγμα του Solow δεν προβλέπει τίποτα το συγκεκριμένο. Όλα τα σενάρια είναι πιθανά, ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν στις διάφορες οικονομίες οι παραπάνω παράμετροι. Εάν τώρα υποθέσουμε, για να απλοποιήσουμε το επιχείρημα, ότι οι παράμετροι α, A, δ και g είναι σταθεροί μεταξύ των χωρών, μπορούμε να ελέγξουμε για την ύπαρξη υπό συνθήκη σύγκλισης τύπου β εκτιμώντας την παρακάτω εξίσωση παλινδρόμησης

$$(1/T)\log(y_{i,T}/y_{i,0}) = \gamma_0 + \gamma_1 \log s_i + \gamma_2 \log n_i + \beta \log y_{i,0} + \xi_i \tag{10}$$

Η διαφορά της (10) από την (6) είναι απλά ότι εδώ έχουμε συμπεριλάβει ως ανεξάρτητες μεταβλητές τις παραμέτρους αυτές οι οποίες καθορίζουν τη διαφορά μεταξύ των σταθερών καταστάσεων των διαφόρων χωρών. Επομένως, ο συντελεστής β μας δίνει την απομονωμένη επίδραση του αρχικού εισοδήματος πάνω στον ρυθμό μεγέθυνσης, αυτό δηλαδή ακριβώς που επιθυμούσαμε να ελέγξουμε. Προφανώς, έχουμε υπό συνθήκη σύγκλιση τύπου β όταν $\beta < 0$. Προσέξτε ότι ακόμη κι αν $\beta < 0$ μπορεί στην πραγματικότητα να παρατηρούμε απόκλιση σε απόλυτους όρους, δηλαδή αύξηση της διασποράς των κατά κεφαλήν εισοδημάτων. Η έννοια της υπό συνθήκη σύγκλισης σημαίνει απλώς ότι εάν οι εν λόγω οικονομίες τύγχανε να έχουν την ίδια σταθερή κατάσταση (τα ίδια s και n), τότε θα παρατηρούσαμε απόλυτη σύγκλιση. Πράγματι, οι εμπειρικές μελέτες (Mankiw, Romer & Weil 1992) που προσπάθησαν να εκτιμήσουν την (10), ή κάποιες παραπλήσιες μορφές της, για ένα ευρύ σύνολο χωρών έδειξαν ότι ο συντελεστής β είναι αρνητικός, παρά το γεγονός ότι, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, τα κατά κεφαλήν εισοδήματα των χωρών του κόσμου στην πραγματικότητα αποκλίνουν.

Πρέπει, τέλος, να σημειωθεί ότι, κατά γενική ομολογία, οι παράμετροι α, A, δ και g δεν είναι σταθεροί μεταξύ των διαφόρων χωρών. Αυτό ισχύει ιδίως για τα A και g, δηλαδή το επίπεδο και τον ρυθμό ανάπτυξης της τεχνολογίας αντίστοιχα. Επομένως, πολλοί συγγραφείς προσπάθησαν να επεκτείνουν την εξίσωση (10) προσθέτοντας στην δεξιά της πλευρά μεταβλητές οι οποίες, υποτίθεται ότι, αποτελούν καθοριστικούς παράγοντες του A και του g. Αυτό οδήγησε, κατά τα τελευταία 15 περίπου χρόνια, στην εμφάνιση μιας τεράστιας βιβλιογραφίας στα πλαίσια της οποίας έχουν εκτιμηθεί εκατομμύρια (κυριολεκτικά) παλινδρομήσεις στις οποίες έχουν χρησιμοποιηθεί ως καθοριστικοί παράγοντες των A και g εκατοντάδες (κυριολεκτικά) μεταβλητές[86]. Όπως θα ανέμενε κανείς, η ύπαρξη τόσο πολλών μεταβλητών και η συνεχής και άκριτη εναλλαγή τους στην δεξιά πλευρά της (10) με έναν εντελώς *ad hoc* τρόπο, χωρίς δηλαδή την ύπαρξη πειστικών θεωρητικών ή εμπειρικών επιχειρημάτων που θα υποστήριζαν τη χρησιμοποίηση των συγκεκριμένων μεταβλητών, έχει οδηγήσει σε αποτελέσματα τα οποία είναι στην καλύτερη περίπτωση μεικτά και στη χειρότερη ανούσια. Επιπλέον, τα αρχικά ερωτήματα περί σύγκλισης φαίνεται να έχουν χαθεί μέσα σε αυτόν τον κυκεώνα στατιστικών ελέγχων, ενώ το κέντρο βάρους έχει μετατοπιστεί σημαντικά προς την κατεύθυνση ερωτημάτων που έχουν να κάνουν με την εύρεση των παραγόντων αυτών που καθορίζουν την ανάπτυξη, τη διάδοση και την υιοθέτηση της τεχνικής προόδου.

VII. Επίλογος

Συμπερασματικά, οι βασικές μορφές σύγκλισης οι οποίες έχουν αναπτυχθεί στη σχετική βιβλιογραφία είναι τρεις, ενώ οι διακρίσεις στη βάση των οποίων έχουν αναπτυχθεί αυτές οι διαφορετικές μορφές σύγκλισης είναι δύο. Η μία διάκριση, μεταξύ απόλυτης και υπό συνθήκη σύγκλισης, έχει να κάνει με το εάν εξετάζουμε οικονομίες με την ίδια σταθερή κατάσταση ή οικονομίες μεταξύ των οποίων οι καθοριστικές παράμετροι διαφέρουν. Η διάκριση αυτή είναι προφανώς θεωρητικής προέλευσης, καθώς βασίζεται στο γεγονός ότι το υπόδειγμα του Solow προβλέπει σύγκλιση μόνο στην περίπτωση που οι υπό μελέτη οικονομίες έχουν την ίδια ισορροπία. Η δεύτερη διάκριση, μεταξύ σύγκλισης τύπου σ και τύπου β, έχει να κάνει με το είδος του στατιστικού ελέγχου που χρησιμοποιείται, με το αν δηλαδή ελέγχουμε τη διασπορά των λογαρίθμων των κατά κεφαλήν ΑΕΠ ή το πρόσημο του συντελεστή του αρχικού επιπέδου του κατά κεφαλήν ΑΕΠ σε μια εξίσωση παλινδρόμησης στην οποία ο ρυθμός μεγέθυνσης είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή. Είδαμε επίσης ότι μόνο ο έλεγχος τύπου σ είναι πραγματικά αξιόπιστος, αλλά μόνο ο έλεγχος τύπου β είναι εφικτός εάν θέλουμε να μιλήσουμε για υπό συνθήκη σύγκλιση[87]. Ας δούμε τώρα πώς μπορούμε να αξιολογήσουμε όλη αυτή τη συζήτηση που έχει λάβει και συνεχίζει να λαμβάνει χώρα στη βιβλιογραφία.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα περισσότερα εμπειρικά αποτελέσματα δείχνουν μάλλον συμβατά με το τις προβλέψεις του τυπικού νεοκλασικού υποδείγματος. Υπάρχουν όμως κάποιες σοβαρές επιφυλάξεις σε σχέση με το τι ακριβώς σημαίνει

[86] Μεταξύ των μεταβλητών αυτών είναι το ανθρώπινο κεφάλαιο, το ύψος της φορολογίας, ο πληθωρισμός, η κατοχύρωση των ιδιοκτησιακών δικαιωμάτων, η πολιτική σταθερότητα, η ύπαρξη προστατευτικών εμπορικών πολιτικών και πολλές άλλες. Δεν λείπουν και πιο «εξωτικές» μεταβλητές όπως αυτές που αναφέρονται στις θρησκευτικές πεποιθήσεις των μελών μιας κοινωνίας.

[87] Όπως ίσως είναι προφανές, η έννοια της «υπό συνθήκη σύγκλισης τύπου σ» δεν έχει κανένα νόημα. Ο λόγος είναι ότι εάν ελέγχουμε τη διασπορά των λογαρίθμων των κατά κεφαλήν ΑΕΠ, είναι αδύνατο να απομονώσουμε την επίδραση οποιουδήποτε μεμονωμένου παράγοντα. Ο έλεγχος τύπου σ μας λέει αν η διασπορά αυξάνεται ή μειώνεται, αλλά, εκ κατασκευής, δεν μπορεί να μας πει προς ποια κατεύθυνση θα μεταβαλλόταν η διασπορά αυτή εάν οι διάφορες οικονομίες είχαν την ίδια σταθερή κατάσταση.

αυτό. Ας ξεκινήσουμε με το ζήτημα της απόλυτης σύγκλισης. Είδαμε ότι αν και οι εμπειρικές μελέτες πάνω στο ζήτημα αυτό δεν είναι σε θέση να απαντήσουν στα πραγματικά σημαντικά ερωτήματα γύρω από τον πλούτο και τη φτώχεια των εθνών, καθώς εστιάζουν την προσοχή τους στις πλούσιες χώρες ή στις εσωτερικές αυτοδιοικούμενες οντότητες των πλουσίων χωρών, είναι σημαντικές στον βαθμό που μπορούν να σταθούν ως αξιόπιστες εμπειρικές επαληθεύσεις των βασικών προβλέψεων του Solow. Η αξιοπιστία αυτή όμως δεν είναι σε καμία περίπτωση αδιαμφισβήτητη, λόγω του ότι στις μελέτες αυτές ελλοχεύουν οι κίνδυνοι της μεροληψίας και της αντίστροφης αιτιότητας. Τι σημαίνει αυτό; Ας υποθέσουμε ότι ελέγχουμε την ύπαρξη απόλυτης σύγκλισης για τις οικονομίες του G7, από το 1950 έως σήμερα. Είναι απολύτως βέβαιο ότι η ύπαρξη απόλυτης σύγκλισης θα επιβεβαιωθεί, αλλά δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι αυτό συνιστά επαλήθευση των προβλέψεων του νεοκλασικού υποδείγματος. Γιατί; Διότι έχουμε συμπεριλάβει στο δείγμα μας τις εφτά πλουσιότερες σήμερα χώρες του κόσμου γνωρίζοντας εκ των προτέρων ότι τρεις από αυτές – οι κατεστραμμένες από τον πόλεμο Γερμανία, Ιταλία και Ιαπωνία – δεν ήταν καθόλου πλούσιες το 1950. Με άλλα λόγια, το δείγμα μας είναι μεροληπτικό, καθώς έχουμε συμπεριλάβει σε αυτό ακριβώς αυτές τις χώρες για τις οποίες ήδη γνωρίζουμε ότι έχουν συγκλίνει. Το ζήτημα της αντίστροφης αιτιότητας σχετίζεται άμεσα με τα παραπάνω και μπορεί να τεθεί ως εξής: οι χώρες αυτές έχουν συγκλίνει επειδή έχουν την ίδια σταθερή κατάσταση ή έχουν την ίδια σταθερή κατάσταση επειδή έχουν συγκλίνει; Για να το θέσουμε διαφορετικά, είναι η προϋπάρχουσα κοινή δομή των οικονομιών αυτών που έχει οδηγήσει σε συγκλίνοντα επίπεδα κατά κεφαλήν εισοδήματος ή μήπως είναι το γεγονός ότι οι χώρες αυτές κατόρθωσαν – με οποιονδήποτε τρόπο – να αναπτυχθούν ο λόγος για τον οποίον η σημερινή τους δομή είναι παρόμοια; Δεν θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα εδώ. Σημειώνουμε πάντως ότι στον βαθμό που η απάντηση δεν είναι ξεκάθαρη, οι διάφορες εμπειρικές επαληθεύσεις του νεοκλασικού υποδείγματος στο ζήτημα της απόλυτης σύγκλισης καθίστανται τουλάχιστον αμφιλεγόμενες.

Όσον αφορά στην υπό συνθήκη σύγκλιση, η επιφύλαξη γύρω από την αξιοπιστία των εμπειρικών ευρημάτων που επαληθεύουν το υπόδειγμα του Solow πρέπει να είναι ίσως ακόμη μεγαλύτερη, για τον πολύ απλό λόγο ότι , όπως είδαμε, το υπόδειγμα αυτό δεν προβλέπει απολύτως τίποτα όταν αναφερόμαστε σε οικονομίες με διαφορετική σταθερή κατάσταση. Προφανώς, ένα υπόδειγμα που δεν προβλέπει κάτι συγκεκριμένο είναι αδύνατο να καταρριφθεί, αλλά αυτό δεν συνιστά θεωρητική αρετή. Η απάντηση των υποστηρικτών του νεοκλασικού υποδείγματος είναι, συνήθως, ότι ακόμη κι αν το υπόδειγμα δεν μπορεί να προβλέψει τι θα γίνει, είναι σε θέση να εξηγήσει τους λόγους για τους οποίους συνέβη αυτό που συνέβη. Είναι σε θέση, για παράδειγμα, να πει ότι οι χώρες Α και Β δεν συγκλίνουν επειδή η χώρα Α έχει μια κατά πολύ υψηλότερη μέση ροπή προς αποταμίευση, ή έναν πολύ μικρότερο ρυθμό αύξησης του πληθυσμού, ή ταχύτερη τεχνική πρόοδο. Το αντεπιχείρημα αυτό είναι κατ'αρχάς σωστό, αλλά το απαραίτητο επόμενο βήμα είναι, στην περίπτωση αυτή, η διερεύνηση του γιατί συμβαίνει αυτό. Στη βάση της ίδιας της νεοκλασικής λογικής, η σχετική έλλειψη κεφαλαίου στις φτωχές χώρες σημαίνει ότι οι αποδόσεις των όποιων επενδύσεων θα είναι στις χώρες αυτές σαφώς υψηλότερες σε σχέση με τις αποδόσεις στα ανεπτυγμένα κράτη της δύσης. Γιατί λοιπόν οι φτωχές χώρες, με λίγες εξαιρέσεις, δεν έχουν καταφέρει να αναπτυχθούν μέσω μιας πλημμυρίδας ξένων επενδύσεων; Παρομοίως και για το ζήτημα της τεχνικής προόδου. Αν και η ανάπτυξη νέων τεχνολογιών είναι πολύ πιο πιθανή – για ευνόητους λόγους – στις ανεπτυγμένες χώρες, η διάχυσή τους στις φτωχές χώρες θα μπορούσε να οδηγήσει τις τελευταίες σε ταχύτατους ρυθμούς μεγέθυνσης. Γιατί η διάχυση αυτή δεν παρατηρείται, τουλάχιστον όχι σε σημαντικό βαθμό; Η κατά κόρον επέκταση της εξίσωσης (10) με τη συμπερίληψη διαφόρων ανεξάρτητων μεταβλητών αποσκοπούσε αρχικά να απαντήσει σε αυτά ακριβώς τα ερωτήματα. Όπως είδαμε όμως, η έλλειψη ενός σαφούς θεωρητικού πλαισίου το οποίο θα συνέβαλε στον προσδιορισμό των μεταβλητών που θα έπρεπε να συμπεριληφθούν, έχει συντελέσει στην επικράτηση ενός εμπειρικού χάους στα πλαίσια του οποίου τα βασικά ερωτήματα περί σύγκλισης φαίνεται να έχουν τεθεί, συνειδητά ή μη, στο περιθώριο.

Βιβλιογραφία

BARRO, Robert J. & Xavier SALA-I-MARTIN (1992), "Convergence" *Journal of Political Economy*, τόμος 100, τεύχος 2, σσ. 223-251

BARRO, Robert J. & Xavier SALA-I-MARTIN (1995) *Economic Growth*, New York: McGraw-Hill.

LUCAS, Robert (1988) "On the Mechanics of Economic Development" *Journal of Monetary Economics*, τόμος 22, τεύχος 1, σσ. 3-42.

MANKIW, N.Gregory, David ROMER & David N. WEIL (1992), "A Contribution to the Empirics of Economic Growth" *Quarterly Journal of Economics*, τόμος 107, τεύχος 2, σσ. 407-437.

ROMER, Paul (1986), "Increasing Returns and Long-Run Growth" *Journal of Political Economy*, τόμος 94, τεύχος 5, σσ. 1002-1037.

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Μακροοικονομικά της Ανάπτυξης [Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης]

Νίκος Θεοχαράκης

Σημειώσεις στην έννοια της τεχνική προόδου

Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν στα εξής εγχειρίδια Daron Acemoglu, *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton and Oxford, MIT Press, 2009 και Hywell G. Jones, *Εισαγωγή στις σύγχρονες θεωρίες οικονομικής μεγέθυνσης*, Αθήνα, Κριτική, 1993 [αγγλική έκδοση: *An Introduction to Modern Theories of Economic Growth*, London, Thomas Nelson and Sons, 1975].

Στο σημείωμα αυτό θα αναφερθούμε ακροθιγώς στην σημαντικότητα έννοια της τεχνικής προόδου. Ειδικότερα θα αναφερθούμε μόνο στον τρόπο με τον οποίο η τεχνική πρόοδος ενσωματώνεται μαθηματικά στα υποδείγματα εξωγενούς μεγέθυνσης [exogenous growth models] όπου η τεχνική πρόοδος [technical (or technological) progress] θεωρείται δεδομένη, αυξάνεται μάλιστα με σταθερό ρυθμό. Γενικά η τεχνική πρόοδος μπορεί να αφορά (α) στην παραγωγή μεγαλύτερης ποσότητας προϊόντος με τις ίδιες ποσότητες εισροών, (β) στην ποιοτική βελτίωση του προϊόντος ή (γ) στη δημιουργία νέων προϊόντων. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την πρώτη περίπτωση.

Στα υποδείγματα Solow-Swan και Ramsay-Cass-Koopmans παραστήσαμε την τεχνική πρόοδο ως *αποτελεσματικότητα της εργασίας* και την συμβολίσαμε με μια χρονική μεταβλητή $A(t)$ η οποία λειτουργεί πολλαπλασιαστικά με την εργασία $L(t)$, ώστε να καταλήξουμε στην έννοια της αποτελεσματικής εργασίας [effective labour] την οποία συμβολίσαμε με το γινόμενο $A(t)L(t)$. Έτσι είχαμε μια συνάρτηση παραγωγής – η οποία ικανοποιούσε και ορισμένες συνθήκες – που είχε την μορφή $Y(t)=F\left(K(t),A(t)L(t)\right)$. Θεωρήσαμε μάλιστα ότι η αποτελεσματικότητα της εργασίας μεγεθύνεται με σταθερό ρυθμό g, δηλ., ότι:

$$\hat{A} \equiv \frac{\dot{A}}{A} \equiv \frac{\frac{dA}{dt}}{A} = g$$

Που σημαίνει ότι $A(t) = A_0 e^{gt}$.

Όπως θα δούμε αργότερα η επιλογή αυτή δεν ήταν τυχαία. Στην πραγματικότητα, το είδος αυτό της τεχνικής προόδου είναι απαραίτητο για να έχουμε ισορροπία σε σταθερή κατάσταση.

Γενικότερα όμως η τεχνική πρόοδος μπορεί να αφορά και την αποτελεσματικότητα του κεφαλαίου, ή μπορεί ακόμα να είναι έξω από τη συνάρτηση παραγωγής και δρα πολλαπλασιαστικά με αυτή. Άρα έχουμε την εξής ταξινόμηση της τεχνική προόδου:

(1) **Τεχνική πρόοδος αυξάνουσα το κεφάλαιο** [capital-augmenting technical progress]

$$Y(t) = F\left(A_K(t)K(t), L(t)\right)$$

Στην περίπτωση αυτή η τεχνική πρόοδος δρα πολλαπλασιαστικά με το κεφάλαιο και αφορά την αποτελεσματικότητα του κεφαλαίου. Στη βιβλιογραφία αυτή αναφέρεται ως **τεχνική πρόοδος ουδέτερη κατά Solow** [Solow-neutral technical progress][1]

(2) **Τεχνική πρόοδος αυξάνουσα την εργασία** [labour-augmenting technical progress]

$$Y(t) = F\left(K(t), A_L(t)L(t)\right)$$

Στην περίπτωση αυτή η τεχνική πρόοδος δρα πολλαπλασιαστικά με την εργασία και αφορά την αποτελεσματικότητα της εργασίας. Στη βιβλιογραφία αυτή αναφέρεται ως **τεχνική πρόοδος ουδέτερη κατά Harrod** [Harrod-neutral technical progress][2]

(3) **Τεχνική πρόοδος εξίσου αυξάνουσα το κεφάλαιο και την εργασία**

$$Y(t) = F\left(A_H K(t), A_H(t)L(t)\right)$$

Στην περίπτωση αυτή η τεχνική πρόοδος δρα πολλαπλασιαστικά με την εργασία και το κεφάλαιο. Αν η συνάρτηση παραγωγής διέπεται από σταθερές αποδόσεις κλίμακας τότε η συνάρτηση αυτή μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$Y(t) = A_H(t) \cdot F\left(K(t), L(t)\right)$$

[1] Είναι κάπως παράδοξο ότι το υπόδειγμα του Solow δεν χρησιμοποιεί τεχνική πρόοδο ουδέτερη κατά Solow, αλλά κατά Harrod. Η ονομασία οφείλεται σε ένα μεταγενέστερο άρθρο του Solow, στο οποίο η τεχνική πρόοδος ενσωματώνεται στο κεφάλαιο μέσα από διαφορετικές γενιές (vintages) μηχανημάτων. Βλ. R.M. Solow, "Investment and technical change", στο K.J. Arrow, S. Karlin & P. Suppes (επιμ.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Palo Alto, CA, Stanford University Press, 1959, σσ. 89-104.

[2] R. F. Harrod, Review: *Essays in the Theory of Employment* by Joan Robinson, *Economic Journal,* τόμος 47, τεύχος 186 (Ιούνιος, 1937), σσ. 326-330 και του ιδίου, *Towards a Dynamic Economics*, London, Macmillan, 1948.

Στη βιβλιογραφία αυτή αναφέρεται ως **τεχνική πρόοδος ουδέτερη κατά Hicks** [Hicks-neutral technical progress][3]

Όπως παρατηρεί ο Daron Acemoglu[4]:

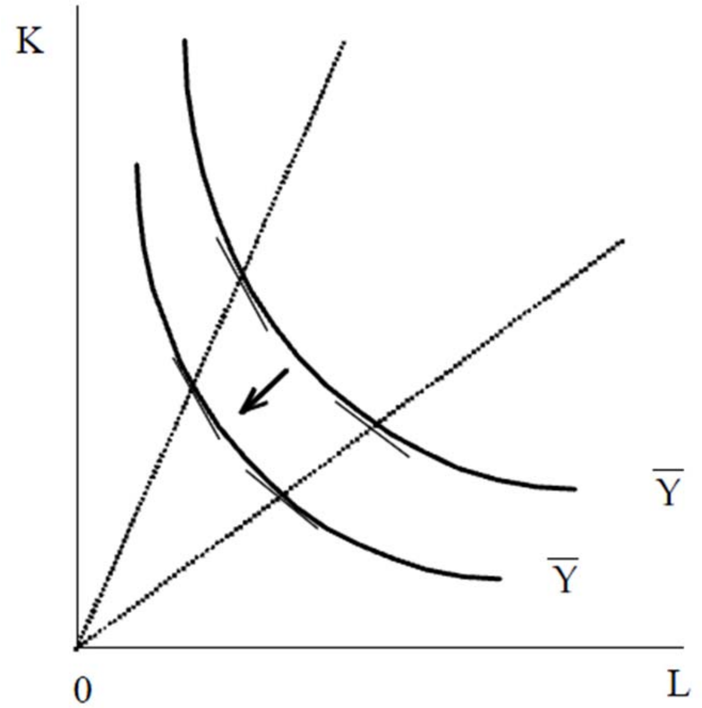
«Φυσικά, στην πράξη η τεχνολογική αλλαγή μπορεί να είναι ένα μίγμα των παραπάνω, έτσι ώστε μπορούμε να έχουμε ένα διανυσματικό δείκτη της τεχνολογίας $A(t)=\left(A_H(t), A_K(t), A_L(t)\right)$ και μία συνάρτηση παραγωγής της μορφής $\tilde{F}\left(K(t), L(t),\right)A(t) = A_H(t)F\left[A_K(t)K(t), A_L(t)L(t)\right]$»

Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά τις μορφές αυτές:

Κατά Hicks ουδέτερη τεχνική πρόοδος

Στην κατά Hicks ουδέτερη τεχνική πρόοδο ολόκληρη η [οιονεί] συνάρτηση παραγωγής $F\left(K(t), L(t)\right)$ πολλαπλασιάζεται με τη μεταβλητή της τεχνικής προόδου για να μας δώσει τη συνάρτηση παραγωγής. Αν παραστήσουμε μια καμπύλη ίσης ποσότητας παραγωγής [isoquant] με την εργασία στον οριζόντια άξονα και το κεφάλαιο στον κάθετο, τότε μια τεχνολογική αλλαγή ουδέτερη κατά Hicks θα έχει ως αποτέλεσμα να μπορεί να παραχθεί το ίδιο προϊόν με λιγότερες ποσότητες συντελεστών και άρα να πάμε σε μία νέα isoquant *με ίδιο επίπεδο παραγωγής* αλλά πιο κοντά στην αρχή των αξόνων. Η μετατόπιση αυτή θα είναι παράλληλη και ο *λόγος των οριακών προϊόντων κεφαλαίου και εργασίας θα είναι ο αυτός για κάθε σταθερό λόγο κεφαλαίου εργασίας*.

[3] J. R. Hicks, *The Theory of Wages*. London, Macmillan, 1932 [2η έκδ. 1963].
[4] D. Acemoglu, *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton, NJ and Oxford, MIT Press, 2009, σ. 59.



Σημείωση: Πάνω σε μία isoquant η μεταβολή του προϊόντος είναι μηδενική. Άρα ισχύει ότι $Y = F(K, L) \Rightarrow dY = F_K dK + F_L dL = 0 \Rightarrow \dfrac{dK}{dL} = -\dfrac{F_L}{F_K}$. Άρα η κλίση της isoquant μας δίνει τον λόγο των οριακών προϊόντων.

Ο Hicks (1932, σ. 121) μάλιστα ταξινόμησε τις εφευρέσεις ανάλογα με το αποτέλεσμα που έχουν πάνω στη μεταβολή του λόγου του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου ως προς το οριακό προϊόν της εργασίας ως «εξοικονομούσες εργασία» (labour saving), «ουδέτερες» (neutral) και «εξοικονομούσες κεφάλαιο» (capital saving).

Αν συμβολίσουμε με $F_K(0)$ και $F_L(0)$ τα οριακά προϊόντα του κεφαλαίου και της εργασίας αντίστοιχα *πριν* την τεχνολογική αλλαγή και με $F_K(t)$ και $F_L(t)$ τα οριακά προϊόντα του κεφαλαίου και της εργασίας αντίστοιχα *μετά* την τεχνολογική αλλαγή, τότε ο ορισμός του Hicks μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

Αν $\dfrac{F_K(t)}{F_L(t)} > \dfrac{F_K(0)}{F_L(0)}$ τότε η τεχνική πρόοδος στην ταξινόμηση του Hicks είναι *εξοικονομούσα εργασία* [labour saving]

Αν $\dfrac{F_K(t)}{F_L(t)} = \dfrac{F_K(0)}{F_L(0)}$ τότε η τεχνική πρόοδος είναι *ουδέτερη κατά Hicks* [Hicks neutral]

Αν $\dfrac{F_K(t)}{F_L(t)} < \dfrac{F_K(0)}{F_L(0)}$ τότε η τεχνική πρόοδος στην ταξινόμηση του Hicks είναι *εξοικονομούσα κεφάλαιο* [capital saving]

Τα παραπάνω ισχύουν για **δεδομένο λόγο κεφαλαίου εργασίας.**

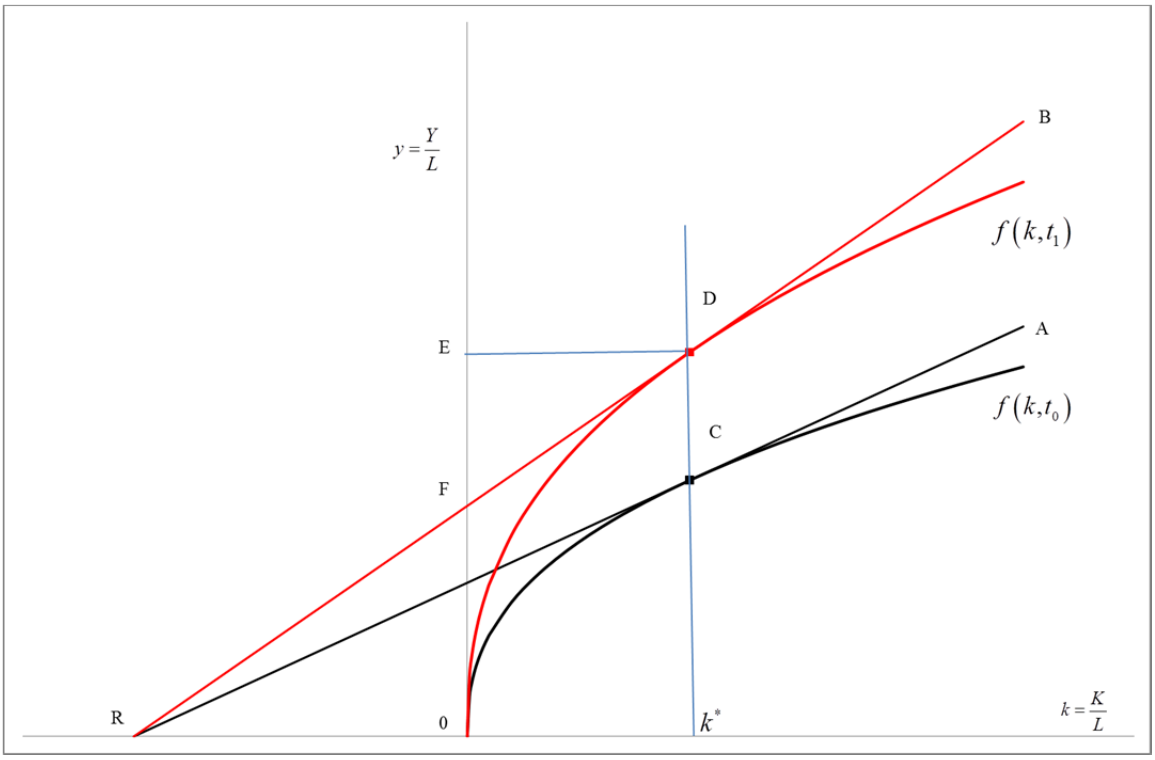
Παρατηρείστε μάλιστα ότι εφόσον αναφερόμαστε σε σταθερό λόγο κεφαλαίου εργασίας μια ουδέτερη κατά Hicks τεχνική πρόοδος σημαίνει ότι ο λόγος των μεριδίων κεφαλαίου εργασίας παραμένει σταθερός κατά μία τεχνική μεταβολή.

Απόδειξη: $\frac{F_K(t)}{F_L(t)} = \frac{F_K(0)}{F_L(0)}$ πολλαπλασιάζουμε και τα δύο σκέλη με *K/L* και έχουμε

$$\frac{F_K(t)}{F_L(t)}\frac{K}{L} = \frac{F_K(0)}{F_L(0)}\frac{K}{L} \Rightarrow \frac{F_K(t)K}{F_L(t)L} = \frac{F_K(0)K}{F_L(0)L} = \frac{rK}{wL} \equiv \Pi$$

Ας διερευνήσουμε την περίπτωση της ουδέτερης κατά Hicks τεχνικής προόδου με το παρακάτω σχήμα:

Οι άξονες είναι εκφρασμένοι σε εντατική μορφή. Στον οριζόντιο άξονα είναι το κεφάλαιο ανά εργασία *k=K/L*, ενώ στον κάθετο άξονα το προϊόν ανά εργασία *y=Y/L*. Πριν από την τεχνολογική αλλαγή η συνάρτηση παραγωγής είναι η $y = f(k, t_0)$, ενώ μετά την τεχνολογική αλλαγή η συνάρτηση παραγωγής είναι η $y = f(k, t_1)$[με κόκκινο]. Παρατηρείστε ότι η τεχνική πρόοδος μετατοπίζει την συνάρτηση παραγωγής προς τα επάνω. Θα δούμε πως στην κατά Hicks ουδέτερη τεχνική πρόοδο γίνεται αυτή η μετατόπιση.



Έστω τώρα ένα δεδομένο *k** [δηλ., δεδομένος λόγος κεφαλαίου εργασίας]. Τα αντίστοιχα κατά κεφαλήν προϊόντα είναι στα σημεία C και D πριν και μετά την τεχνική αλλαγή αντίστοιχα. Οι ευθείες RA και RB μας δίνουν τις εφαπτόμενες στα σημεία C και D αντίστοιχα. Οι εφαπτόμενες είναι φυσικά οι πρώτες παράγωγοι των $f(k,t_0)$και $f(k,t_1)$στο σημείο k* δίνουν δηλ., το οριακό προϊόν του κεφαλαίου. [Για την ακρίβεια η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας $\measuredangle ARk^*$ μας δίνει το οριακό προϊόν του κεφαλαίου της $f(k,t_0)$ στο σημείο k*, ενώ η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας $\measuredangle BRk^*$ μας δίνει το οριακό προϊόν του κεφαλαίου της $f(k,t_1)$ στο ίδιο σημείο]. Πρέπει να δείξουμε γιατί στην κατά Hicks ουδέτερη τεχνική πρόοδο οι δυο εφαπτόμενες συγκλίνουν στο ίδιο σημείο.

Ας εστιάσουμε στην συνάρτηση $f(k,t_1)$. Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο D [δηλ., η εφ$\measuredangle DRk^*$], μας δίνει το οριακό προϊόν του κεφαλαίου στο σημείο k*

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\left.\frac{\partial f(k,t_1)}{\partial k}\right|_{k=k^*}$$

Το οριακό προϊόν του κεφαλαίου σύμφωνα με τη θεωρία της οριακής παραγωγικότητας είναι ίσο με την αμοιβή μιας μονάδας κεφαλαίου, δηλ., ίσο με r. Στο σχήμα μας το r δίνεται από την κλίση τη εφαπτομένης στο D, η οποία είναι ίση με Dk^*/k^*R, η οποία είναι ίση με EF/ED, αλλά το ED είναι ίσο με το k*. Άρα r=EF/ED= EF/k*, δηλ., EF=rk*.
Το E0 μας δίνει το προϊόν ανά εργάτη, y*. Λόγω του θεωρήματος του Euler για την εξάντληση του προϊόντος ισχύει ότι:

$$F(K,L)=\frac{\partial F}{\partial K}K+\frac{\partial F}{\partial L}L=rK+wL.$$ Διαιρώντας με L έχουμε:

$$\frac{F(K,L)}{L}=\frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{L}+\frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{L}=r\frac{K}{L}+w\frac{L}{L}\Rightarrow f(k)=f'(k)k+\frac{\partial F}{\partial L}=rk+w\Rightarrow$$

$$w=f(k)-f'(k)k=f(k)-rk$$

[Θυμηθείτε ότι $\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{df(k)}{dk}\equiv f'(k)$].

Το προϊόν ανά εργάτη διανέμεται στην αμοιβή του κεφαλαίου ανά εργάτη, $f'(k)k=rk$, και στην αμοιβή της εργασίας ανά εργάτη, δηλ., το μισθό w. Με άλλα λόγια στο σχήμα μας το E0 κατανέμεται στο EF που είναι το $f'(k)k=rk$ και στο 0F που είναι ο μισθός, w.

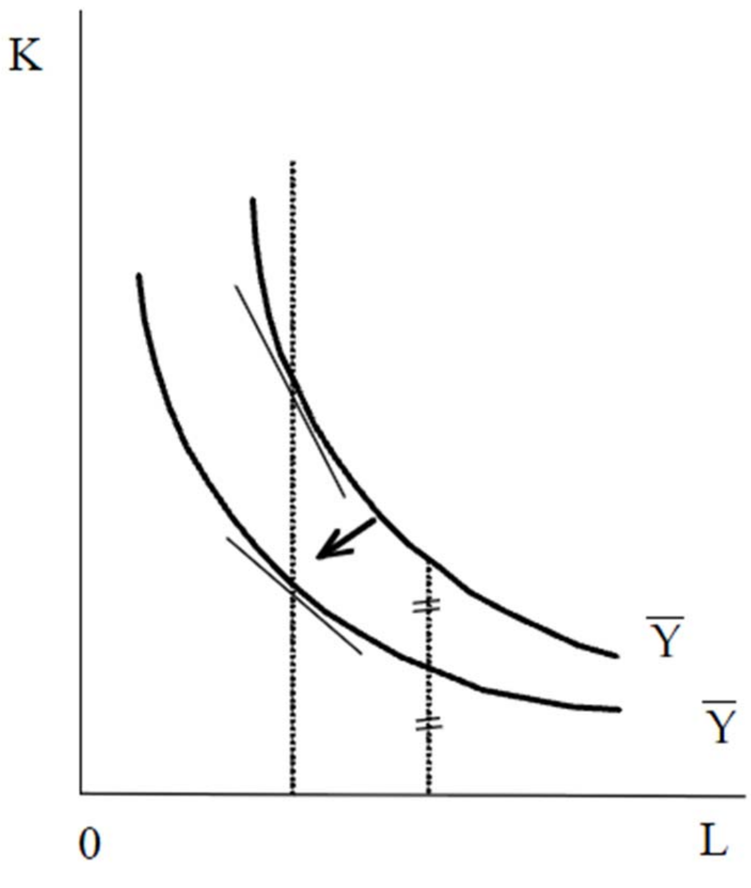
Τώρα, η κλίση της εφαπτομένης στο D, δηλ., το r, είναι ίση με $Dk^*/k^*R=0F/0R$. Άρα εφόσον $0F=w$, ισχύει ότι $r=w/0R$, δηλ., $0R=w/r$. Το $0R$ μετρά τον λόγο του μισθού προς την ανά μονάδα αμοιβή του κεφαλαίου, δηλ., το λόγο του οριακού προϊόντος της εργασίας προς το οριακό προϊόν του κεφαλαίου.

Δηλ., $0R=\frac{w}{r}=\frac{F_L}{F_K}$

Αποδείξαμε δηλ., ότι για να παραμείνει ο λόγος των οριακών προϊόντων σταθερός, όπως απαιτεί η ουδέτερη κατά Hicks τεχνική πρόοδος, πρέπει οι εφαπτόμενες στις δύο συναρτήσεις παραγωγής [πριν και μετά την τεχνολογική μεταβολή] για το ίδιο *k (=*K/L*) να συγκλίνουν στο ίδιο σημείο [το R εν προκειμένω].**

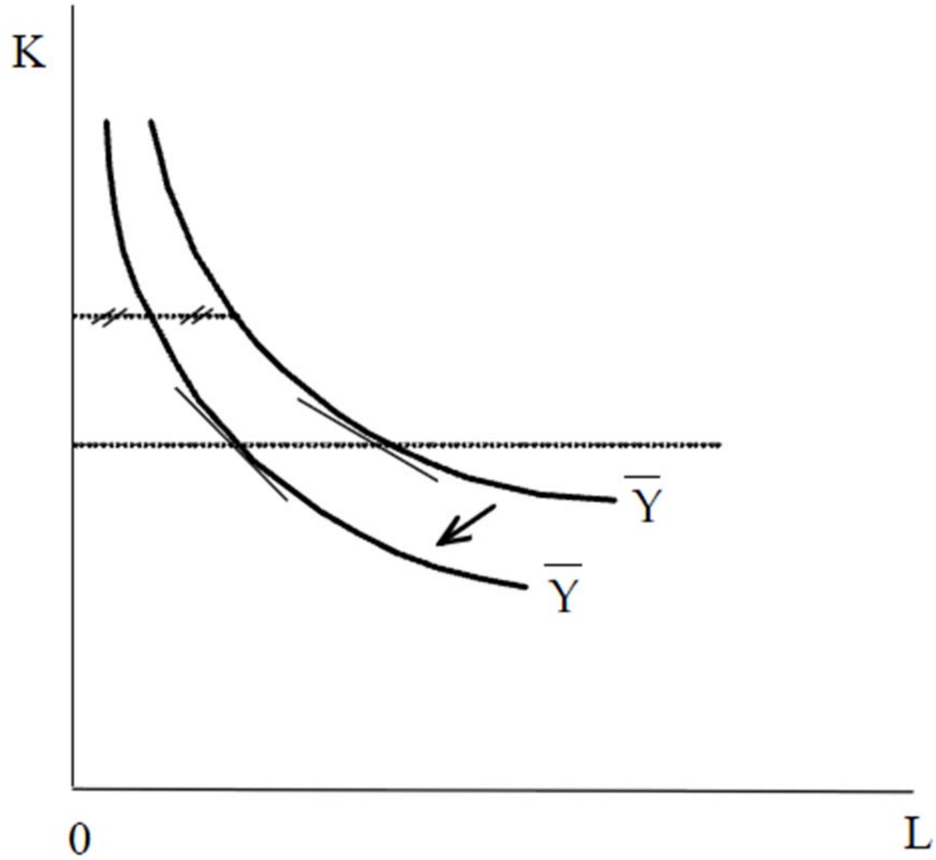
Κατά Solow ουδέτερη τεχνική πρόοδος [capital augmenting]

Στην περίπτωση της κατά Solow ουδέτερης τεχνικής προόδου οι isoquants μετατοπίζονται προς τα μέσα ως εάν ο άξονας του κεφαλαίου να συρρικνώνεται, αφού ένα υψηλότερο A αντιστοιχεί σε ένα μεγαλύτερο επίπεδο αποτελεσματικού κεφαλαίου. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η κατά Solow ουδέτερη τεχνική πρόοδος για διπλασιασμό του $A(t)$. Παρατηρείστε ότι για μισό κεφάλαιο έχουμε το ίδιο Y.



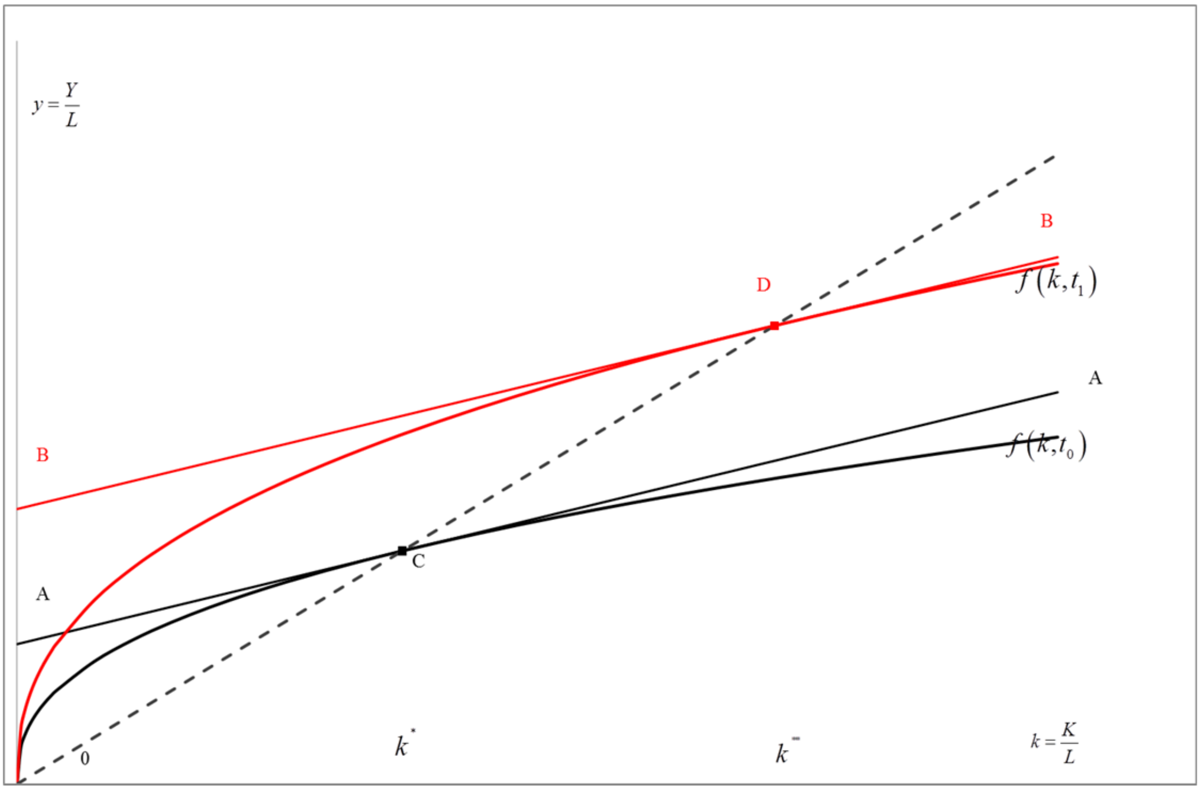
Κατά Harrod ουδέτερη τεχνική πρόοδος [labour augmenting].

Στην περίπτωση αυτή συμβαίνει το αντίθετο με την προηγούμενη περίπτωση. Μια αύξηση της αποτελεσματικότητας της εργασίας μετατοπίζει πάλι την isoquant προς τα μέσα, αλλά τώρα «συρρικνώνεται» ο άξονας της εργασίας. Με μισή εργασία παράγεται το ίδιο προϊόν. Οι isoquants έχουν το εξής σχήμα [για διπλάσιο *A*]



Στην περίπτωση της τεχνική προόδου κατά Harrod, η τεχνική πρόοδος ορίζεται ως «εξοικονομούσα εργασία», «ουδέτερη» ή «εξοικονομούσα κεφάλαιο» αν ο λόγος των σχετικών μεριδίων κεφαλαίου και εργασίας $\Pi = rK/wL$ αυξάνεται, παραμένει σταθερός, ή μειώνεται για κάθε **σταθερή τιμή του λόγου κεφαλαίου προϊόντος (*K/Y*)**.

Όπως και στην περίπτωση της κατά Hicks τεχνικής προόδου μπορούμε να δείξουμε την κατά Harrod τεχνική πρόοδο με το εξής διάγραμμα. Στον οριζόντιο άξονα είναι το κεφάλαιο ανά εργάτη ενώ στον κάθετο άξονα το προϊόν ανά εργάτη. Υπάρχουν πάλι δυο συναρτήσεις παραγωγής σε εντατική μορφή: η πρώτη, $y = f\left(k, t_0\right)$, πριν από την τεχνική πρόοδο και η δεύτερη, $y = f\left(k, t_1\right)$, μετά την τεχνική πρόοδο.



Επιλέγομε το σημείο k* στην πρώτη συνάρτηση παραγωγής. Επειδή όμως διατηρείται σταθερός ο λόγος κεφαλαίου προϊόντος, θα το συγκρίνουμε με ένα σημείο στη δεύτερη συνάρτηση παραγωγής που έχει τον ίδιο λόγο κεφαλαίου προϊόντος. Αυτό το επιτυγχάνουμε με μία ακτίνα που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο C πάνω στην συνάρτηση $f(k,t_0)$ που αντιστοιχεί στο σημείο $\left(k^*, f\left(k^*, t_0\right)\right)$. Η ακτίνα αυτή τέμνει την $f(k,t_1)$ στο σημείο D που αντιστοιχεί στο σημείο $\left(k^{**}, f\left(k^{**}, t_1\right)\right)$. Παρατηρείστε ότι η κλίση της ακτίνας είναι $Ck^*/0k^* = Dk^{**}/0k^{**} = y^*/k^* = y^{**}/k^{**}$ που είναι το αντίστροφο του σταθερού λόγου κεφαλαίου προϊόντος. Στα σημεία C και D οι εφαπτόμενες AA και BB που μας δίνουν το οριακό προϊόν του κεφαλαίου πρέπει να έχουν την ίδια κλίση για να έχουμε τεχνική πρόοδο ουδέτερη κατά Harrod.

Όπως παρατήρησε πρώτη η Joan Robinson[5] η κατά Harrod ουδέτερη τεχνική πρόοδος αντιστοιχεί με την γνησίως αύξουσα την εργασία.

---

[5] Joan Robinson, "The Classification of Inventions", *Review of Economic Studies*, τόμος 5, τεύχος 2 (Φεβρουάριος 1938), σσ. 139-142.

Ισοδυναμία μορφών τεχνικής προόδου στη συνάρτηση Cobb-Douglas

Μπορούμε μάλιστα να αποδείξουμε ότι η κατά Hicks και κατά Harrod ουδέτερες τεχνικές πρόοδοι είναι ισοδύναμες σε μια συγκεκριμένη μορφή τεχνολογίας, δηλ., όταν η ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας ισούται με την μονάδα.
Γράφουμε τον λόγο τν σχετικών μεριδίων ως $\Pi = \overline{p} \cdot k$, όπου $\overline{p} \equiv r/w$ και $k \equiv K/L$. Στην περίπτωση της ουδέτερης τεχνικής προόδου η μεταβολή του Π πρέπει να είναι μηδενική, δηλ., ο ρυθμός μεγέθυνσης πρέπει να είναι μηδέν. Κατά τα γνωστά

$$\hat{\Pi} = \hat{\overline{p}} + \hat{k} = 0 \Rightarrow \hat{\overline{p}} = -\hat{k} \Rightarrow \frac{\frac{d\overline{p}}{dt}}{\overline{p}} = -\frac{\frac{dk}{dt}}{k}$$

Αυτό ισοδυναμεί με $\frac{d\overline{p}}{\overline{p}} = -\frac{dk}{k} \Rightarrow -\frac{\overline{p}}{k}\frac{dk}{d\overline{p}} = -\frac{\frac{r}{w}}{\frac{K}{L}}\frac{d\frac{K}{L}}{d\frac{r}{w}} = 1$, η οποία είναι η ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας. Αλλά η μόνη συνάρτηση παραγωγής με μοναδιαία ελαστικότητα υποκατάστασης είναι η συνάρτηση Cobb-Douglas με σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Αυτό δεν είναι παράξενο. Παρατηρείστε το εξής: σε μια συνάρτηση Cobb-Douglas μπορούμε να εκφράσουμε την τεχνική πρόοδο ισοδύναμα και με τις τρεις μορφές

$$\begin{aligned}
\tilde{F}\left(K(t),L(t),A(t)\right) = A_H(t)F\left(K(t),L(t)\right) = A_H(t)K(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha} = \\
= F\left(A_K(t)K(t),L(t)\right) = \left[A_K(t)K(t)\right]^{\alpha}L(t)^{1-\alpha} = \\
= F\left(K(t),A_L(t)L(t)\right) = K(t)^{\alpha}\left[A_L(t)L(t)\right]^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Άρα οι τεχνικές πρόοδοι κατά Hicks, Solow και Harrod είναι ισοδύναμοι σε μια κλασική συνάρτηση Cobb-Douglas.

Θεώρημα Uzawa

Ενώ *ex ante* και οι τρεις μορφές τεχνικής προόδου θεωρούνται εύλογες, η μακροχρόνια ισόρροπή μεγέθυνση στο υπόδειγμα Solow-Swan είναι δυνατή μόνο στη περίπτωση όπου έχουμε ουδέτερη κατά Harrod τεχνική πρόοδο. Το εκπληκτικό και ανησυχητικό αυτό συμπέρασμα το απέδειξε ο Ιάπωνας θεωρητικός της μεγέθυνσης Hirofumi Uzawa[6]

[6] H. Uzawa, “Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium”, *Review of Economic Studies*, τόμος 28, τεύχος 2 (Φεβρουάριος 1961), σσ. 117-124. Βλ. και Ekkehart Schlicht, “A Variant of Uzawa's Theorem”, *Economics Bulletin*, τόμος 5 (2006), τεύχος 6, σσ. 1-5. Βλ. επίσης Acemoglu (2009), ο.π., σσ. 59-64 και τις σημειώσεις του ιδίου στο MIT στην ηλεκτρονική διεύθυνση: http://economics.mit.edu/files/7181.

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Τομέας Πολιτικής Οικονομίας

Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης

Οκτώβριος 2009

Βασικές αρχές της Θεωρίας Αρίστου Ελέγχου (Optimal Control Theory) και το υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Ramsey

---

Οι σημειώσεις αυτές βασίζονται στο βιβλίο του Ronald SHONE (2002), *Economic Dynamics: Phase Diagrams and Their Economic Application*, Cambridge University Press, 2η έκδοση.

Το υπόδειγμα Ramsey αποτελεί μια μαθηματική εφαρμογή της θεωρίας του **αρίστου ελέγχου** (optimal control theory). Η θεωρία αυτή αποτελεί δυναμική επέκταση της θεωρίας της μεγιστοποίησης υπό περιορισμό. Έχουμε δύο τύπους μεταβλητών, τις **μεταβλητές ορισμού** (state variables) και τις **μεταβλητές ελέγχου** (control variables). Όπως υποδηλώνει το όνομά τους μπορούμε να επηρεάσουμε τις μεταβλητές ελέγχου, ενώ το δυναμικό μας σύστημα περιγράφεται από την συμπεριφορά των state variables. Στην γενική περίπτωση μπορεί να έχουμε *n* μεταβλητές ορισμού $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ που τις περιγράφουμε συνοπτικά με ένα *n*-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{x}(t)=\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$ και *m* μεταβλητές ελέγχου $u_1(t),\ldots,u_m(t)$ που τις περιγράφουμε συνοπτικά με ένα *m*-διάστατο διάνυσμα $\mathbf{u}(t)=\{u_1(t),\ldots,u_m(t)\}$ Ένα πρόβλημα δυναμικής μεγιστοποίησης ξεκινά από την *αντικειμενική συνάρτηση J* που επιδιώκουμε να μεγιστοποιήσουμε. Η μεγιστοποίηση αυτή γίνεται μέσα σε ένα χρονικό διάστημα από t_0, που είναι ο αρχικός χρόνος, έως t_1 που είναι ο τελικός χρόνος. Φυσικά τα t_0 και t_1, μπορεί να είναι 0 και ∞.

Η μεγιστοποιητέα συνάρτηση περιλαμβάνει δύο όρους: ο πρώτος όρος είναι ένα χρονικό ολοκλήρωμα από t_0 έως t_1, μιας συνάρτησης $V(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$ που την αποκαλούμε **ενδιάμεση συνάρτηση** (intermediate function) και η οποία περιλαμβάνει τις μεταβλητές ορισμού, τις μεταβλητές ελέγχου και ενδεχομένως τον χρόνο. Λέω ενδεχομένως, διότι ο χρόνος υπεισέρχεται έτσι και αλλιώς μέσω των μεταβλητών ορισμού και ελέγχου που είναι συνεχείς χρονικές μεταβλητές, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί ο ίδιος ο χρόνος ανεξάρτητα από τις μεταβλητές να αποτελεί ανεξάρτητη μεταβλητή της ενδιάμεσης συνάρτησης. Στο παράδειγμα που θα ακολουθήσει δεν θα ασχοληθούμε όμως με αυτή την περίπτωση.

Ο δεύτερος όρος του γενικού προβλήματος της μεγιστοποίησης είναι μια **τελική συνάρτηση** (final function), που εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής ορισμού στον τελικό χρόνο, δηλ., $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}^{\mathbf{1}}$ και ενδεχομένως από τον χρόνο. Η συνάρτηση αυτή είναι η $F(\mathbf{x}^{\mathbf{1}},t)$. Θέλουμε δηλαδή να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα του ολοκληρώματος της ενδιάμεσης συνάρτησης και αυτό που θα μείνει στο τέλος και που εξαρτάται από το ποια θα είναι η τιμή της μεταβλητής ορισμού στον τελικό χρόνο. Ένα παράδειγμα: Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την απόδοση ενός περιουσιακού στοιχείου που αποδίδει κάθε χρονική στιγμή (χωρίς προεξόφληση) μαζί με το ποσό που θα μείνει στο τέλος.

Μια άλλη σημαντική εξίσωση στο πρόβλημα της δυναμικής μεγιστοποίησης είναι η **εξίσωση κίνησης** (equation of motion) του συστήματος η οποία μας δείχνει πως μεταβάλλονται οι μεταβλητές ορισμού, συναρτήσει των μεταβλητών ορισμού και ελέγχου (και ενδεχομένως του χρόνου). Αυτή η εξίσωση κίνησης είναι ένα διάνυσμα που περιγράφει για κάθε μεταβλητή ορισμού την πρώτη παράγωγο ως προς τον χρόνο συναρτήσει των $\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)$ και του χρόνου *t*. Δηλ., έχουμε $\dot{\mathbf{x}}=f(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$. Τέλος, έχουμε ένα σύνολο U που μας δείχνει τις επιτρεπτές τιμές των μεταβλητών ελέγχου.

Συνοψίζοντας έχουμε:

Το πρόβλημα του άριστου ελέγχου (συνεχής περίπτωση)

Μεγιστοποιείστε την αντικειμενική συνάρτηση

$$\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} J = \int_{t_0}^{t_1} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt + F(\mathbf{x}^{\mathbf{1}}, t)$$

με τους εξής περιορισμούς

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{\mathbf{0}}$$
$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^{\mathbf{1}}$$
$$\{\mathbf{u}(t)\} \in U$$

όπου
t_0 (or $t = 0$) είναι ο αρχικός χρόνος (**initial time)**
t_1 (or *T*) είναι ο τελικός χρόνος (**terminal time)**
$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ *n* μεταβλητές ορισμού (**state variables)**
$\mathbf{u}(t) = \{u_1(t), \ldots, u_m(t)\}$ *m* μεταβλητές ελέγχου (**control variables)**
$\{\mathbf{u}(t)\}$ είναι μία συνεχής τροχιά ελέγχου (continuous **control trajectory)** $t_0 < t < t_1$
U είναι το σύνολο των επιτρεπτών τροχιών ελέγχου (**set of admissible control trajectories)**
$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ δείχνει τις εξισώσεις κίνησης (**equations of motion)**
J είναι η αντικειμενική συνάρτηση (**objective function)**
$V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ είναι η ενδιάμεση συνάρτηση (**intermediate function)**
$F(\mathbf{x}^{\mathbf{1}}, t)$ είναι η τελική συνάρτηση **(final function)**

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που έχουμε μια μεταβλητή ελέγχου και μια μεταβλητή ορισμού, χωρίς τελική συνάρτηση και ο χρόνος να εισέρχεται στη συνάρτηση μέσω των μεταβλητών.

Δηλ., έχουμε

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_0^T V(x, u)dt$$

και $\dot{x} = f(x, u)$

Σημ. Για απλοποίηση γράφουμε $x = x(t), u = u(t)$ δηλ., δεν συμβολίζουμε τον χρόνο, χωρίς όμως να σημαίνει ότι οι μεταβλητές μας παύουν να είναι χρονικές μεταβλητές. Τον αρχικό και τελικό χρόνο τους συμβολίζουμε με t και T αντίστοιχα.

Η λύση του προβλήματος της δυναμικής αριστοποίησης οφείλεται στο τυφλό Σοβιετικό Ρώσο μαθηματικό Lev Semenovich Pontryagin (Лев Семёнович Понтрягин) (1908–1988) το 1959.

Η αρχή του μεγίστου του Pontryagin

Ορίστε την Χαμιλτονιανή συνάρτηση (**Hamiltonian function)** ως

$$H(x,u) = V(x,u) + \lambda f(x,u)$$

Όπου λ είναι η **μεταβλητή συνορισμού** (costate variable**)**, το ισοδύναμο του πολλαπλασιαστή Lagrange στη δυναμική βελτιστοποίηση.

Προκειμένου να λύσετε το πρόβλημα της δυναμικής μεγιστοποίησης, προσθέστε την μεταβλητή συνορισμού λ, ορίστε την Hamiltonian $H(x,u) = V(x,u) + \lambda f(x,u)$ και λύστε ως προς τις τροχιές $\{u(t)\}, \{\lambda(t)\}, \{x(t)\}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

(1) $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \qquad 0 \le t \le T$

(2) $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \qquad 0 \le t \le T$

(3) $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x,u)$

(4) $x(0) = x^0$

(5) $\lambda(T) = 0$ (ή $x(T) = x^T$, αν το x^T είναι άγνωστο).

Παράδειγμα

Πρόβλημα ελέγχου

$$\max_{\{u\}} \int_0^1 u^2 dt$$

$$\dot{x} = -u$$

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 0$$

Η Hamiltonian είναι $H(x,u) = V(x,u) + \lambda f(x,u) = u^2 + \lambda(-u)$

Οι συνθήκες πρώτης τάξεως είναι

(1) $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 2u - \lambda = 0 \qquad 0 \le t \le 1$

(2) $\dot{\lambda} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0 \qquad 0 \le t \le 1$

(3) $\dot{x} = -u$

(4) $x(0) = 1$

(5) $x(1) = 1$

Από την (1) προκύπτει ότι $u = \dfrac{\lambda}{2}$. Άρα $\dot{x} = -\dfrac{\lambda}{2}$ and $\dot{\lambda} = 0$.

Λύνοντας αυτές τις δύο διαφορικές εξισώσεις έχουμε: $x(t) = c_1 - \dfrac{\lambda t}{2}$ και $\lambda = c_2$.

Από την $x(0) = 1$ παίρνουμε ότι $1 = c_1 - \dfrac{\lambda \cdot 0}{2} \Rightarrow c_1 = 1$.

Από τον περιορισμό $x(1) = 1$ έχουμε

$$x(1) = c_1 - \frac{\lambda t}{2} = 1 - \frac{\lambda t}{2} = 1 - \frac{\lambda \cdot 1}{2} = 1 - \frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow c_2 = 2$$

Άρα

$$x^* = c_1 - \frac{\lambda t}{2} = 1 - \frac{2t}{2} = 1 - t$$

$$u^* = \frac{\lambda}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Άριστος έλεγχος με προεξόφληση

Συχνά στα οικονομικά η $V(x,u)$ περιλαμβάνει μια ροή εισοδήματος ή χρησιμότητας που πρέπει να προεξοφληθεί (δηλ., να την φέρουμε στην παρούσα αξία) είτε μέσω επιτοκίου, είτε μέσω ενός υποκειμενικού συντελεστή χρονικής προτίμησης. Ο συντελεστής προεξόφλησης είναι $e^{-\delta t}$

Η προεξόφληση μεταβάλλει την αντικειμενική συνάρτηση και το πρόβλημα του ελέγχου που τώρα γίνεται:

$$\max_{[u(t)]} J = \int_0^T e^{-\delta t} V(x,u)\,dt$$

Με τυπικές συνθήκες

$\dot{x} = f(x,u), \; x(0) = x^0, \; x(T) = x^T$

Η Hamiltonian γίνεται

$$H(x,u) = e^{-\delta t} V(x,u) + \lambda f(x,u)$$

Ορίστε τώρα την **Hamiltonian τρέχουσας αξίας** (current value Hamiltonian function**)** H_c**.** Αυτή είναι η

$$H(x,u) = V(x,u) + \mu f(x,u)$$

Άρα

$$H_c = He^{\delta t} \quad \acute{\eta} \quad H = H_c e^{-\delta t}$$
$$\mu = \lambda e^{\delta t} \quad \acute{\eta} \quad \lambda = \mu e^{-\delta t}$$

Ας δούμε τώρα πως μεταβάλλονται οι συνθήκες μας. Εφόσον το $e^{\delta t}$ είναι σταθερό για μια μεταβολή στην μεταβλητή ελέγχου η συνθήκη (1) γίνεται $\partial H_c / \partial u = 0$. Η συνθήκη (2) είναι $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} e^{-\delta t}$. Εφόσον $\lambda = \mu e^{-\delta t} \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{\mu} e^{-\delta t} - \delta \mu e^{-\delta t}$. (Θυμηθείτε ότι $\dot{\lambda}$ σημαίνει πρώτη παράγωγος ως προς τον χρόνο). Εξισώνοντας έχουμε $\dot{\mu} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} + \delta \mu$, που είναι τώρα η συνθήκη (2). Η συνθήκη (3) είναι πάλι $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\partial H_c}{\partial \lambda} e^{-\delta t} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = f(x,u)$.
Οι δύο τελευταίες συνθήκες είναι (4) $x(0) = x^0$ και (5) $\lambda(T) = \mu(T) e^{-\delta t} = 0$ (ή $x(T) = x^T$, αν το x^T είναι άγνωστο).

Ανακεφαλαιώνοντας, ορίστε την **Hamiltonian τρέχουσας αξίας** και την **μεταβλητή συνορισμού τρέχουσας αξίας)**, μ

$$H_c(x,u) = H(x,u)e^{\delta t} = V(x,u) + \mu f(x,u), \text{ όπου } \lambda = \mu e^{-\delta t}$$

Οι συνθήκες αριστοποίησης είναι:

(1) $\frac{\partial H_c}{\partial u} = 0 \qquad 0 \le t \le T$

(2) $\dot{\mu} = -\frac{\partial H_c}{\partial x} + \delta \mu \qquad 0 \le t \le T$

(3) $\dot{x} = \frac{\partial H_c}{\partial \mu} = f(x,u)$

(4) $x(0) = x^0$

(5) $\mu(T) e^{-\delta t} = 0$ (ή $x(T) = x^T$, αν το x^T είναι άγνωστο).

Οι συνθήκες αριστοποίησης μας επιτρέπουν να απαλείψουμε την μεταβλητή ελέγχου *u* από την συνθήκη (1) και να πάρουμε δύο διαφορικές εξισώσεις, μία για την μεταβλητή ορισμού, *x*, και μία για την μεταβλητή συνορισμού τρέχουσας αξίας, *μ*.

Ας εφαρμόσουμε τώρα αυτή τη θεωρία στο υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Ramsey.

Υπόδειγμα οικονομικής μεγέθυνσης του Ramsey.

[*Σημ*: Το υπόδειγμα αυτό διαφέρει από την εκδοχή των σημειώσεων. Θεωρεί ότι υπάρχει απόσβεση αλλά όχι τεχνική πρόοδος. Δεν θεωρούμε επίσης ότι υπάρχουν νοικοκυριά και επιχειρήσεις και μεγιστοποιούμε για όλη την οικονομία. Οι εντατικές μεταβλητές είναι βεβαίως κατά κεφαλή και όχι ανά μονάδα αποτελεσματικής εργασίας.]

Μεταβλητές: $Y(t)$, προϊόν, $C(t)$ κατανάλωση, $I(t)$ επένδυση, $K(t)$ κεφάλαιο, $L(t)$ εργασία. Με μικρά γράμματα συμβολίζουμε τα αντίστοιχα κατά κεφαλήν μεγέθη , δηλ., διαιρεμένα δια L.

Παράμετροι: δ, συντελεστής απόσβεσης, n, ρυθμός μεγέθυνσης πληθυσμού (εργασίας) $\left(\dot{L}/L = n\right)$, β, συντελεστής προεξόφλησης για τη χρησιμότητα.

Εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} Y(t) = C(t) + I(t) \\ I(t) = \dot{K}(t) + \delta K(t) \end{array}\right\} \Rightarrow y(t) = c(t) + \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \delta k(t)$$

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{L\dot{K} - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L}\cdot\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - kn \Rightarrow \frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + kn\ .$$

Άρα

$$y(t) = c(t) + \dot{k}(t) + (n+\delta)k(t)\ .$$

Κάνουμε τις συνηθισμένες υποθέσεις του Solow για την συνάρτηση παραγωγής στην εντατική μορφή $y = f(k)$, και γράφουμε την εξίσωση της μεγέθυνσης του κεφαλαίου κατά κεφαλή ως: $\dot{k} = f(k) - (n+\delta)k - c$

Άρα το κατά κεφαλή προϊόν μείον την επένδυση αναπλήρωσης (breakeven investment) μείον την κατά κεφαλή κατανάλωση μας δίνει τη μεταβολή στο κατά κεφαλή κεφάλαιο.

Ορίστε την $U(c(t))$ ως την **στιγμιαία συνάρτηση χρησιμότητας** *instantaneous utility function* (ή συνάρτηση ευδαιμονίας *felicity function*). Το πρόβλημα ελέγχου είναι η μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

$$\max_{c} J=\int_0^{\infty} e^{-\beta t}U(c)dt$$

Ενώ η εξίσωση Solow μας δίνει την εξίσωση κίνησης.

$$\dot{k}=f(k)-(n+\delta)k-c$$

Το αρχικό κατά κεφαλή κεφάλαιο στον αρχικό χρόνο t=0 είναι k_0 και η κατά κεφαλή κατανάλωση είναι θετική και μικρότερη από το κατά κεφαλή προϊόν.

$$k(0)=k_0$$
$$0\le c\le f(k)$$

Παρατηρείστε ότι το κεφάλαιο κατά κεφαλή, k, είναι η μεταβλητή ορισμού και η κατά κεφαλή κατανάλωση, c, η μεταβλητή ελέγχου.

Η *Hamiltonian τρέχουσας αξίας* είναι

$$H_c=U(c)+\mu[f(k)-(n+\delta)k-c]$$

Με συνθήκες πρώτης τάξεως

$$\frac{\partial H_c}{\partial c}=U'(c)-\mu=0\Rightarrow U'(c)=\mu$$
$$\dot{\mu}=-\mu f'(k)+\mu(n+\delta)+\beta\mu$$
$$\dot{k}=f(k)-(n+\delta)k-c$$

Παραγωγίστε την πρώτη συνθήκη ως προς τον χρόνο.

$$\frac{dU'(c)}{dt}=\dot{\mu}\Rightarrow U''(c)\dot{c}=\dot{\mu}=-\mu f'(k)+\mu(n+\delta)+\beta\mu\Rightarrow$$
$$\frac{U''(c)\dot{c}}{\mu}=\frac{U''(c)}{U'(c)}\dot{c}=-f'(k)+(n+\delta+\beta)\quad \text{εφόσον } \mu=U'(c)$$

Θυμηθείτε τον ορισμό του μέτρου σχετικής αποστροφής προς τον κίνδυνο των Pratt-Arrow (Pratt-Arrow measure of relative risk aversion):

$$\sigma(c)=-\frac{cU''(c)}{U'(c)}$$

Άρα $\dfrac{\sigma(c)}{c}\dot{c}=f'(k)-(n+\delta+\beta)$ or $\dot{c}=\dfrac{1}{\sigma(c)}\big[f'(k)-(n+\delta+\beta)\big]c$

[*Σημ*: Θυμηθείτε ότι στην συνάρτηση χρησιμότητας σταθερής σχετικής αποστροφής προς τον κίνδυνο (constant risk aversion) (ή σταθερής ελαστικότητας διαχρονικής υποκατάστασης, constant intertemporal elasticity of substitution) το μέτρο των Pratt-Arrow είναι σταθερό, δηλ., $\sigma(c)=\theta, \forall c$. Μια τέτοια συνάρτηση έχει την μορφή $c^{1-\theta}/1-\theta$. O David Romer στο *Advanced Macroeconomics* χρησιμοποιεί μια τέτοια συνάρτηση και η εξίσωση Euler χαρακτηρίζεται από αυτή την παράμετρο. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι για θ=1 ισχύει ότι $U(c)=\ln c$].

Έχουμε τώρα δυο διαφορικές εξισώσεις.

$$\dot{c}=\frac{1}{\sigma(c)}\left[f'(k)-(n+\delta+\beta)\right]c$$

$$\dot{k}=f(k)-(n+\delta)k-c$$

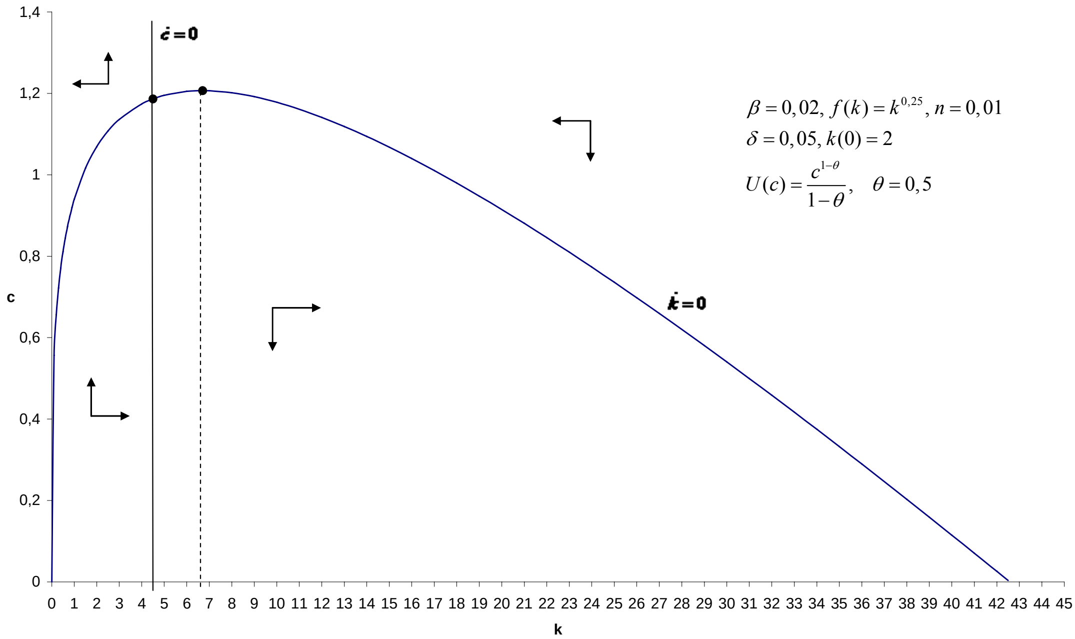
Αν $\dot{c}=0$ τότε $f'(k^*)=n+\delta+\beta.$ Από την άλλη, αν $\dot{k}=0$, τότε $c^*=f(k^*)-(n+\delta)k^*$.

Επιπλέον αν $\dot{c}>0$ τότε $f'(k^*)>n+\delta+\beta$ οπότε $k<k^*$. Έτσι αριστερά του $\dot{c}=0$ η ισοκλινής του *k* αυξάνει. Δεξιά από το $\dot{c}=0$ η ισοκλινής του *k* φθίνει. Αντίστοιχα κάτω από το $\dot{k}=0$ η ισοκλινής του *c* αυξάνει. Πάνω από το $\dot{k}=0$ η ισοκλινής του *c* φθίνει. Το διάνυσμα των δυνάμεων δείχνει ότι το σημείο (c^*,k^*) αποτελεί λύση σημείου σάγματος (saddle point solution). Η μοναδική βέλτιστη τροχιά είναι πάνω στον σταθερό βραχίονα.. Για κάθε k_0 το μοναδικό βιώσιμο (δηλ., αυτό που δεν αποκλείεται από τις παραδοχές του υποδείγματος) επίπεδο κατανάλωσης είναι αυτό που παρίσταται με το αντίστοιχο σημείο στον σταθερό βραχίονα. Σε ισορροπία το *k* είναι σταθερό, άρα το κεφάλαιο *K* αυξάνει με τον ρυθμό μεγέθυνσης του, *L*, δηλ., *n*. (Θυμηθείτε ότι στην εκδοχή του Shone δεν υπάρχει τεχνική πρόοδος). Εφόσον το *k* είναι σταθερό το ίδιο συμβαίνει και στο *y* άρα και το *Y* μεγεθύνεται όπως το εργατικό δυναμικό. Έχουμε λοιπόν μια ισορροπία ισόρροπης μεγέθυνσης (balanced-growth equilibrium).

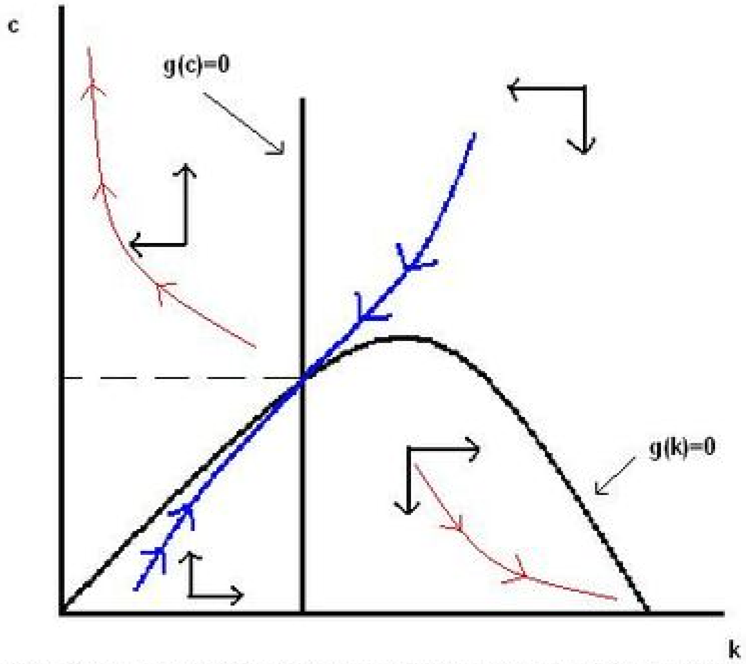
Το παρακάτω διάγραμμα έγινε στο Excel με τις ακόλουθες παραμέτρους και εξισώσεις.

$$\beta = 0,02 \quad f(k) = k^{0,25} \quad n = 0,01 \quad \delta = 0,05 \quad k(0) = 2$$

$$U(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \quad \theta = 0,5 \Rightarrow U(c) = 2\sqrt{c}$$



Άλλο ένα διάγραμμα από το (ημιτελές) άρθρο της Wikipedia για το υπόδειγμα Ramsey όπου φαίνεται το saddle path.



The blue line represent the dynamic adjustment path of the economy. It is a stable path of the dynami system.
The red lines represent dynamic paths which are ruled out by the Transversality Condition

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Θεωρίες Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης

Υπόδειγμα Romer

Οι παρούσες σημειώσεις βασίζονται εξ ολοκλήρου στο κεφάλαιο 5 του εγχειριδίου του Charles Jones, *Introduction to Economic Growth*, (2η έκδοση), 2002, Norton, New York. Αποτελούν ουσιαστικά *παράφραση* του κεφαλαίου με κάποιες επεξηγήσεις όταν ο συγγραφέας είναι συνοπτικός. Το υπόδειγμα Romer το οποίο αναλύεται είναι κυρίως αυτό που υπάρχει στο άρθρο του Paul Romer, "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, τόμος 98 (Οκτώβριος 1990), σσ. S71-S102, όπως επεκτάθηκε από τον συγγραφέα στο άρθρο του Charles I. Jones, "R&D-Based Models of Economic Growth", Journal *of Political Economy*, τόμος 103 (Αύγουστος 1995), σσ.759-84.

Μέρος Α. Τα βασικά στοιχεία του υποδείγματος

Το υπόδειγμα Romer επιχειρεί να καταστήσει ενδογενή την τεχνική πρόοδο εισάγοντας την έννοια της αναζήτησης νέων ιδεών από ερευνητές-εφευρέτες οι οποίοι ενδιαφέρονται να κερδίσουν από τις εφευρέσεις τους. Η τεχνική πρόοδος οδηγείται από την έρευνα και την ανάπτυξη (Ε&Α). Όπως και στο υπόδειγμα Solow έχουμε μία εξίσωση που περιγράφει την συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής και ένα σύνολο εξισώσεων που δείχνουν πως μεταβάλλονται οι παραγωγικές εισροές στη διάρκεια του χρόνου.

Η συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής περιγράφει πως το κεφάλαιο K και η παραγωγική εργασία L_Y συνδυάζονται για να παράγουν προϊόν Y, χρησιμοποιώντας το απόθεμα ιδεών A.

$$Y = K^{\alpha}\left(AL_Y\right)^{1-\alpha}$$

Όπου το α είναι μια παράμετρος μεταξύ του 0 και του 1.

Για δεδομένο απόθεμα ιδεών Α, η συνάρτηση παραγωγής έχει σταθερές αποδόσεις κλίμακας ως προς τα Κ και L_Y. Όταν όμως θεωρήσουμε ότι το Α αποτελεί και αυτό εισροή στην παραγωγική διαδικασία τότε έχουμε αύξουσες αποδόσεις κλίμακας. Αυτό συμβαίνει διότι από τη στιγμή που παραχθεί μία ιδέα δεν χρειάζεται να εφευρεθεί εκ νέου. Για να διπλασιάσουμε τη παραγωγή αρκεί να διπλασιάσουμε το κεφάλαιο και την εργασία, όχι την ιδέα. Αν διπλασιάσεις κεφάλαιο, εργασία και το Α τότε θα έχεις υπερδιπλάσιο προϊόν.

Οι εξισώσεις συσσώρευσης του κεφαλαίου και της εργασίας είναι ίδιες με αυτές του υποδείγματος Solow. Το κεφάλαιο συσσωρεύεται καθώς τα άτομα αποταμιεύουν με ένα σταθερό ποσοστό s_K και αποσβέννυται με ένα σταθερό εξωγενές ποσοστό *d*.

$$\dot{K} = s_K - dK$$

Η εργασία – που εδώ είναι ισοδύναμη με τον πληθυσμό – L μεγεθύνεται εκθετικά με σταθερό ρυθμό μεγέθυνσης *n*,

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

Στο υπόδειγμα Solow το *A* μεγεθύνεται εξωγενώς με ένα σταθερό ρυθμό *g*. Αντίθετα στο υπόδειγμα Romer η μεγέθυνση του *A* είναι ενδογενής. Αυτό γίνεται μέσα από μια συνάρτηση παραγωγής του *A*. Το $A(t)$ είναι το συνολικό απόθεμα των ιδεών που έχει παραχθεί από την αρχή του χρόνου μέχρι την στιγμή *t*. Άρα το $\dot{A}$ είναι ο αριθμός των νέων ιδεών που παράγεται κάθε στιγμή του χρόνου. Ο απλούστερος τρόπος να περιγραφεί κάτι τέτοιο είναι να θεωρήσουμε ότι το $\dot{A}$ είναι ίσο με τον αριθμό των ατόμων που επιχειρούν να εφεύρουν ιδέες, L_A, όπου $L = L_Y + L_A$, πολλαπλασιασμένο επί το ρυθμό με τον οποίον ανακαλύπτουν νέες ιδέες, $\overline{\delta}$:

$$\dot{A} = \overline{\delta} L_A$$

Ο ρυθμός με τον οποίο ανακαλύπτονται νέες ιδέες μπορεί βεβαίως να είναι σταθερός. Μπορεί όμως κανείς να θεωρήσει ότι εξαρτάται από το ήδη υπάρχον απόθεμα ιδεών. Μπορεί η ανακάλυψη ιδεών του παρελθόντος μπορεί να επηρεάζει θετικά την ανακάλυψη νέων ιδεών, άρα το $\overline{\delta}$ μπορεί να είναι μια αύξουσα συνάρτηση του Α. Μπορεί αντίθετα οι καλύτερες, ή οι πιο προφανείς, ιδέες να έχουν ήδη ανακαλυφθεί και οι επόμενες ιδέες να είναι πιο δύσκολο να ανακαλυφθεί, οπότε να συμβαίνει το αντίθετο. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $\overline{\delta}$ είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$\overline{\delta} = \delta A^{\phi}$$

Όπου τα δ και φ είναι σταθερές. Αν $\phi > 0$ η παραγωγικότητα της έρευνας αυξάνει με το απόθεμα των ιδεών, ενώ αν $\phi < 0$ οι καλύτερες ιδέες έχουν ήδη αλιευθεί. Αν $\phi = 0$ τότε η παραγωγικότητα της έρευνας είναι ανεξάρτητη από το απόθεμα των ιδεών.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι η παραγωγικότητα της έρευνας εξαρτάται από τον αριθμό των ερευνητών. Μπορεί, φερειπείν, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των ερευνητών κάποιες ιδέες να ανακαλύπτονται περισσότερες φορές και να επηρεάζεται αρνητικά η παραγωγικότητα της έρευνας. Ένας τρόπος να το δείξουμε αυτό σε ένα υπόδειγμα είναι να θεωρήσουμε ότι αντί για L_A, έχουμε $L_A{}^{\lambda}$, όπου λ είναι μια παράμετρος μεταξύ 0 και 1. Άρα λοιπόν σε μια πιο γενική μορφή μπορεί να ξαναγράψουμε την εξίσωση παραγωγής νέων ιδεών ως

$$\dot{A} = \delta L_A{}^{\lambda} A^{\phi}$$

Θεωρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το φ δεν είναι πολύ μεγάλο και ειδικότερα ότι $\phi < 1$.

Η μεγέθυνση το υπόδειγμα Romer – υπό την προϋπόθεση ότι το ποσοστό των ερευνητών είναι σταθερό, κάτι που θα το αποδείξουμε αργότερα – το υπόδειγμα ακολουθεί το θεώρημα του υποδείγματος Solow ότι όλη η μεγέθυνση του κατά κεφαλή προϊόντος οφείλεται στην τεχνική πρόοδο. Συμβολίζοντας με μικρά γράμματα τα κατά κεφαλή μεγέθη και με g_x το ρυθμό μεγέθυνσης μιας μεταβλητής x , δηλ., $g_x = \hat{x} = \dot{x}/x$, μπορεί να δειχθεί, με τρόπο ανάλογο του υποδείγματος Solow, ότι στην τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης ισχύει ότι

$$g_y = g_k = g_A$$

Δηλ., ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν προϊόντος, του κατά κεφαλήν κεφαλαίου και του αποθέματος των ιδεών είναι ο ίδιος.

Άρα ποιος είναι αυτός ο ρυθμός μεγέθυνσης; Από την εξίσωση $\dot{A} = \delta L_A{}^{\lambda} A^{\phi}$ διαιρώντας με A προκύπτει ότι

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\delta L_A{}^{\lambda}}{A^{1-\phi}}$$

Στην τροχιά ισόρροπης μεγέθυνσης ο ρυθμός αυτός είναι σταθερός δηλ., ο δικός του ρυθμός μεγέθυνσης είναι μηδενικός. Παίρνοντας, κατά τα γνωστά λογαρίθμους και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$0 = \lambda \frac{\dot{L}_A}{L_A} - (1-\phi)\frac{\dot{A}}{A}$$

Δεδομένου την τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης έχουμε ότι το ποσοστό των ερευνητών στον πληθυσμό είναι σταθερό, αυτό σημαίνει ότι αυτό μεγεθύνεται με τον ρυθμό μεγέθυνσης του πληθυσμού, δηλ., το *n*, άρα η εξίσωσή μας γίνεται

$$0 = \lambda n - (1-\phi) g_A \Rightarrow$$

$$g_A = \frac{\lambda n}{1-\phi}$$

Άρα μακροχρόνια ο ρυθμός μεγέθυνσης εξαρτάται από τις παραμέτρους του υποδείγματος.

Μέρος Β. Η οικονομική δομή του υποδείγματος

Ας προχωρήσουμε τώρα στην οικονομική δομή του υποδείγματος Romer. Αποτελείται από τρεις τομείς: (1) τον τομέα των τελικών καταναλωτικών αγαθών (final goods sector), (2) των τομέα των ενδιάμεσων αγαθών (intermediate goods sector) και (3) τον τομέα της έρευνας (research sector).

1. Ο τομέας των τελικών αγαθών.

Ο τομέας των τελικών αγαθών αποτελείται από τελείως ανταγωνιστικές επιχειρήσεις οι οποίες συνδυάζουν κεφάλαιο, *K*, και εργασία, L_Y, και παράγουν ένα ομοιογενές τελικό προϊόν, *Y*.

Σημ. Την εργασία την συμβολίζουμε με υπο-δείκτη Y, επειδή υπάρχει και εργασία η οποία απασχολείται στον τομέα της έρευνας την οποία συμβολίζουμε με υπο-δείκτη A, δηλ., ως L_A. Το σύνολο της εργασίας στην οικονομία είναι $L = L_Y + L_A$

Η συνάρτηση παραγωγής του τελικού προϊόντος, διαφέρει από εκείνη του υποδείγματος Solow και έχει την εξής μορφή:

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A} x_j^{\alpha}$$

Το προϊόν παράγεται χρησιμοποιώντας εργασία L_Y και μια σειρά από διαφορετικά κεφαλαιουχικά αγαθά x_j, όπου $j = 1, \ldots, A$. Το *A* μετράει τον αριθμό των κεφαλαιουχικών αγαθών που είναι διαθέσιμα να χρησιμοποιηθούν στον τομέα των τελικών αγαθών για την παραγωγή του τελικού αγαθού. Οι εφευρέσεις στον τομέα της έρευνας δημιουργούν νέα κεφαλαιουχικά αγαθά, αυξάνοντας το *A*. Οι επιχειρήσεις στον τομέα των τελικών αγαθών παίρνουν το *A* ως δεδομένο. [Παρατηρείστε ότι ο Romer εκφράζει την τεχνική πρόοδο *A* με την διαθέσιμη γκάμα των κεφαλαιουχικών αγαθών. Για το λόγο αυτό το συγκεκριμένο υπόδειγμα ενδογενούς μεγέθυνσης αποκαλείται υπόδειγμα εύρους διαφορετικών προϊόντων (*product variety model*).]

Παρατηρείστε επίσης το εξής: *για δεδομένο* A, η συνάρτηση παραγωγής έχει σταθερές αποδόσεις κλίμακας, εφόσον αν πολλαπλασιάσουμε το L_Y και κάθε x_j με ένα σταθερό αριθμό, έστω *λ*, το προϊόν Y πολλαπλασιάζεται και αυτό με *λ*.

$$\left(\lambda L_Y\right)^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A} \left(\lambda x_j\right)^{\alpha} = \lambda^{1-\alpha} \lambda^{\alpha} \left[L_Y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A} x_j^{\alpha} \right] = \lambda Y$$

Για τεχνικούς καθαρά λόγους, ώστε δηλ., να μπορούμε να κάνουμε χρήση του διαφορικού λογισμού, είναι χρήσιμο να εκφράσουμε την συνάρτηση παραγωγής με την εξής μορφή:

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj$$

Το A δηλ., μετράει το εύρος των διαθέσιμων κεφαλαιουχικών αγαθών και το εύρος αυτό είναι το διάστημα από μηδέν έως A.

Λαμβάνουμε την τιμή του τελικού αγαθού ίση με τη μονάδα.

Οι επιχειρήσεις στον τομέα των τελικών αγαθών μεγιστοποιούν τα κέρδη τους, επιλέγοντας τις μεταβλητές L_Y και x_j, έτσι ώστε η πρώτη παράγωγος των κερδών ως προς κάθε μία προς αυτές τις μεταβλητές να είναι μηδενική.

Τα κέρδη είναι ίσα με την αξία του προϊόντος, Υ, εφόσον η τιμή του προϊόντος είναι ίση με τη μονάδα $pY = 1 \cdot Y = Y$, μείον την αμοιβή της εργασίας wL_Y, μείον την αμοιβή των κεφαλαιουχικών αγαθών. Συμβολίζοντας με p_j την αμοιβή του κεφαλαιουχικού αγαθού j, η συνολική αμοιβή των κεφαλαιουχικών αγαθών είναι $\int_0^A p_j x_j dj$. Άρα τα κέρδη είναι ίσα με

$$\pi_Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj$$

Και οι συνθήκες πρώτης τάξεως είναι οι εξής:

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

Και

$$p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} \quad \forall j \in (0, A)$$

Σημείωση: Οι συνθήκες προκύπτουν ως εξής:

$$\max_{L_Y, x_j} \pi_Y \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \pi_Y}{\partial L_Y} = \frac{\partial \left[L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj \right]}{\partial L_Y} =$$

$$= (1-\alpha) L_Y^{-1} \left[L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj \right] - w = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} - w = 0 \Rightarrow$$

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

$$\frac{\partial \pi_Y}{\partial x_j} = \frac{\partial \left[L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj \right]}{\partial x_j} =$$

$$= \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} - p_j = 0 \Rightarrow$$

$$p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}$$

Η πρώτη συνθήκη μας λέει ότι οι επιχειρήσεις προσλαμβάνουν εργασία έως ότου ο μισθός είναι ίσος με την αξία του οριακού προϊόντος της εργασίας. Η δεύτερη συνθήκη μας λέει ότι οι επιχειρήσεις ενοικιάζουν κάθε κεφαλαιουχικό αγαθό έως ότου το οριακό του προϊόν είναι ίσο με την τιμή ενοικίασής του. Παρατηρείστε επίσης ότι οι συνθήκες αυτές αποτελούν και τις συναρτήσεις της (παράγωγης) ζήτησης των παραγωγικών συντελεστών L_Y και x_j.

2. Τομέας ενδιάμεσων αγαθών

Στον τομέα των ενδιάμεσων αγαθών έχουμε μονοπωλιακό ανταγωνισμό. Έχουμε πολλούς μονοπωλητές όπου ο καθένας βασίζει το μονοπώλιο του στο ότι κατέχει τη πατέντα του κεφαλαιουχικού αγαθού *j* που έχει αγοράσει από τον τομέα της έρευνας. Από τη στιγμή που αγοραστεί η πατέντα με δεδομένο κόστος, ο κάθε μονοπωλητής παράγει κεφαλαιουχικά αγαθά με μια πολύ απλή συνάρτηση παραγωγής: μία μονάδα καθαρού κεφαλαίου μετασχηματίζεται άμεσα σε μια μονάδα κεφαλαιουχικού αγαθού. Το κέρδος του μονοπωλητή του αγαθού *j* είναι απλά: $\pi_j = p_j(x_j)x_j - rx_j$, αφού είναι η διαφορά των εσόδων από το κόστος, όπου *r* είναι η τιμή του καθαρού κεφαλαίου. Ας σημειωθεί ότι εφόσον είναι μονοπωλητής, αντιμετωπίζει την συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος του η οποία μας δίνεται από την εξίσωση $p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}$. Η μεγιστοποίηση του κέρδους ως προς x_j μας δίνει τη συνθήκη πρώτης τάξεως:

$\max\limits_{x_j} \pi_j = p_j(x_j)x_j - rx_j \Rightarrow p'(x)x + p(x) - r = 0$, απλοποιώντας τον δείκτη j. Διαιρώντας με το p, και λύνοντας ως προς p έχουμε:

$$p'(x)x + p(x) - r = 0 \Rightarrow \frac{p'(x)}{p(x)}x + 1 = \frac{r}{p(x)} \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{r}{1 + \frac{p'(x)}{p(x)}x}$$

Παρατηρείστε ότι η έκφραση $\frac{p'(x)}{p(x)}x$, που είναι η αντίστροφη ελαστικότητα της καμπύλης ζήτησης του κάθε κεφαλαιουχικού αγαθού, μπορεί να υπολογιστεί από τη συνθήκη πρώτης τάξεως της μεγιστοποίησης του κέρδους της ανταγωνιστικής επιχείρησης του τομέα των τελικών αγαθών, δηλ., την εξίσωση

$$p = \alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-1} \Rightarrow p'(x) = \frac{\partial p}{\partial x} = (\alpha-1)\alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-2} \Rightarrow$$

$$\frac{p'(x)}{p(x)}x = \frac{(\alpha-1)\alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-2}}{\alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-1}}x = (\alpha-1)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε $p = \frac{r}{1 + \frac{p'(x)}{p}x} = \frac{r}{1 + (1-\alpha)} = \frac{r}{\alpha}$, ή

$$p = \frac{r}{\alpha}$$

Δηλ., κάθε επιχείρηση που παράγει κεφαλαιουχικά αγαθά επιβάλλει ένα σταθερό ποσοστό (markup) επί του οριακού κόστους του κεφαλαίου.

Αυτή η λύση είναι κοινή για όλους τους μονοπωλητές, άρα $x_j = x$. Το ίδιο ισχύει για τις τιμές. Άρα κάθε μονοπωλιακή επιχείρηση έχει το ίδιο κέρδος. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το κέρδος αυτό είναι:

$$\pi = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A}$$

Σημείωση: Ένας τρόπος να αποδειχθεί αυτό είναι ο εξής:
Από τη συνάρτηση ζήτησης των κεφαλαιουχικών αγαθών έχουμε: $p = \alpha {L_Y}^{1-\alpha} x^{\alpha-1}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με x προκύπτει $px = \alpha {L_Y}^{1-\alpha} x^{\alpha}$. Δεδομένου ότι υπάρχουν A $x_j = x$ συνεπάγεται ότι $Y = {L_Y}^{1-\alpha} A x^{\alpha}$. Αν πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε το δεύτερο μέρος της προηγούμενης εξίσωσης με το A έχουμε: $px = \frac{\alpha}{A} {L_Y}^{1-\alpha} A x^{\alpha} = \alpha \frac{Y}{A}$.
Η εξίσωση $p = \frac{r}{\alpha}$ μας δίνει $p = \frac{r}{\alpha} \Rightarrow r = \alpha p \Rightarrow rx = \alpha px$. Το κέρδος τώρα γίνεται $\pi = px - rx = px - \alpha px = (1-\alpha)px = (1-\alpha)\left(\alpha \frac{Y}{A}\right) = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A}$. ο.ε.δ.

Τέλος η συνολική ζήτηση για κεφάλαιο από τον τομέα των ενδιάμεσων αγαθών πρέπει να ισούται με το συνολικό απόθεμα κεφαλαίου της οικονομίας, δηλ.,:

$$\int_0^A x_j dj = K.$$

Εφόσον $x_j = x$ η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να καθορίσει το x. Δηλ.,

$$x = \frac{K}{A}$$

Η συνάρτηση παραγωγής του τελικού αγαθού μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$Y = A {L_Y}^{1-\alpha} x^{\alpha}$$

Και αντικαθιστώντας από την προηγούμενη εξίσωση έχουμε

$$Y = AL_Y{}^{1-\alpha}x^{\alpha} = AL_Y{}^{1-\alpha}\left(\frac{K}{A}\right)^{\alpha} = A\cdot A^{-\alpha}L_Y{}^{1-\alpha}K^{\alpha} = A^{1-\alpha}L_Y{}^{1-\alpha}K^{\alpha} \Rightarrow$$

$$Y = K^{\alpha}\left(AL_Y\right)^{1-\alpha}$$

Δηλ., τη συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής που είχαμε στο υπόδειγμα Solow τη συναντάμε και εδώ στην συνάρτηση παραγωγής του τελικού αγαθού. Παρατηρείστε ότι είναι σταθερών αποδόσεων κλίμακας ως προς K και L, αλλά αυξουσών αποδόσεων κλίμακας αν υπολογίσουμε την τεχνολογία.

3. Ο τομέας της έρευνας

Ο τρόπος που εμφανίζεται η έρευνα στο υπόδειγμά μας είναι σαν να ψάχνουμε για ψήγματα χρυσού στα ποτάμια της «Άγριας Δύσης» της Αμερικής τα τέλη του 19ου αιώνα. Όλοι μπορούν να ψάξουν για χρυσό και η ανταμοιβή τους είναι το ψήγμα που θα βρουν. Εν προκειμένω φυσικά τα «ψήγματα» είναι ιδέες οι οποίες δημιουργούν νέα κεφαλαιουχικά (ενδιάμεσα) αγαθά. Όταν γίνει μια εφεύρεση ο εφευρέτης αποκτά τα δικαιώματα σε αυτή για πάντα. Πουλάει τα δικαιώματα σε ένα παραγωγό ενδιάμεσων αγαθών και με τα χρήματα αυτά καταναλώνει και αποταμιεύει όπως κάθε άλλος οικονομικός δρών στο υπόδειγμα.

Το ερώτημα είναι ποια θα είναι η τιμή της πατέντας της εφεύρεσης. Υποθέτουμε ότι ο καθένας μπορεί να συμμετάσχει σε ένα πλειοδοτικό διαγωνισμό για την απόκτησή της. Η τιμή της πατέντας θα είναι ίση με την παρούσα αξία των κερδών μιας εταιρείας παραγωγής ενδιάμεσων αγαθών. Αυτό συμβαίνει διότι οι ανταγωνιστικές επιχειρήσεις δεν έχουν κέρδη. Κέρδη έχουν μόνον οι επιχειρήσεις που έχουν μονοπωλιακό πλεονέκτημα με την κατοχή μιας πατέντας. Επειδή είναι η πατέντα που δημιουργεί τα μονοπωλιακά κέρδη, η τιμή της πατέντας θα είναι ίση με την (παρούσα) αξία αυτών των κερδών. Αν η τιμή της πατέντας ήταν μικρότερη από την παρούσα αξία των κερδών, κάποιοι θα επωφελούνταν την διαφορά, άρα κάποιοι άλλοι θα ήταν διατεθειμένοι να πληρώσουν περισσότερο για την απόκτηση της πατέντας. Αν η τιμή της πατέντας ήταν μεγαλύτερη από την παρούσα αξία των κερδών, όποιος την αγόραζε θα έκανε ζημιές, άρα δεν θα το έκανε. Έστω λοιπόν ότι η τιμή αυτή είναι ίση με P_A. Πως μεταβάλλεται η τιμή αυτή στον χρόνο; Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα που προκύπτει από την λογική του αρμπιτράζ. Έστω ότι έχω ένα κεφάλαιο ίσο με P_A. Έχω δύο επιλογές: ή (1) να το καταθέσω στην «τράπεζα»[1] με πάρω επιτόκιο *r*, άρα να έχω έσοδα από τόκους ίσα με rP_A, ή (2) να αγοράσω με αυτά τα χρήματα την πατέντα και να κερδίσω τα κέρδη της μονοπωλιακής επιχείρησης του ενδιάμεσου αγαθού που παράγεται με τη συγκεκριμένη τεχνογνωσία, *π*, συν την μεταβολή που θα επέλθει στην αξία της πατέντας που είναι ίση με $\dot{P}_A$. Αυτές οι δύο επιλογές, σύμφωνα με την λογική του αρμπιτράζ, πρέπει να εξισωθούν διότι διαφορετικά κάποιος θα μπορούσε να βγάλει χρήματα ανέξοδα. Άρα η εξίσωση του αρμπιτράζ λέει ότι

$$rP_A = \pi + \dot{P}_A$$

[1] Εδώ φυσικά δεν έχουμε τράπεζες, αλλά κάποιος μπορεί να αγοράσει κεφάλαιο με απόδοση *r*.

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι η αμοιβή από την επιλογή (1) και το δεξιό η αμοιβή από την επιλογή (2). Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με P_A έχουμε:

$$r = \frac{\pi}{P_A} + \frac{\dot{P}_A}{P_A}$$

Στη σταθερή κατάσταση το r πρέπει να είναι σταθερό και ανάλογο με το Y/K. Αυτό σημαίνει ότι το π και το P_A πρέπει να μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό μεγέθυνσης. Από προηγούμενη εξίσωση γνωρίζουμε ότι $\pi = \alpha(1-\alpha)Y/A$ δηλ., ότι το π είναι ανάλογο του Y/A, άρα έχουν τον ίδιο ρυθμό μεγέθυνσης. Εφόσον το κατά κεφαλή προϊόν y και το A μεγεθύνονται με τον ίδιο ρυθμό θα πρέπει να ισχύει ότι $\hat{y} = \hat{A} \Rightarrow \hat{Y} - \hat{L} = \hat{A} \Rightarrow \hat{Y} - n = \hat{A} \Rightarrow \hat{Y} - \hat{A} = n$, δηλ., ο ρυθμός μεγέθυνσης του Y/A να είναι ίσος με το n, τον ρυθμό μεγέθυνσης του πληθυσμού, ο οποίος είναι ίσος με τον ρυθμό μεγέθυνσης του π και ίσος με το ρυθμό μεγέθυνσης του P_A. Άρα έχουμε

$$\hat{P}_A = \frac{\dot{P}_A}{P_A} = n \Rightarrow r = \frac{\pi}{P_A} + \frac{\dot{P}_A}{P_A} = \frac{\pi}{P_A} + n \Rightarrow$$

$$P_A = \frac{\pi}{r-n}$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει την τιμή της πατέντας στην τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης.

Επιλύοντας το υπόδειγμα

Έχουμε τώρα τη βασική περιγραφή του υποδείγματός μας και κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις.

1. Η συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής έχει αύξουσες αποδόσεις κλίμακας. Είναι μεν σταθερών αποδόσεων κλίμακας ως προς τα K και L, αλλά εφόσον το A αποτελεί εισροή έχουμε αύξουσες αποδόσεις.
2. Οι αύξουσες αποδόσεις απαιτούν ατελή ανταγωνισμό. Στο υπόδειγμά μας ο ατελής ανταγωνισμός υπάρχει στον τομέα των ενδιάμεσων αγαθών. Η τιμή του παραγόμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη από το οριακό του κόστος. Τα κέρδη όμως αυτά τα απολαμβάνουν οι κάτοχοι της πατέντας, άρα τα πραγματικά κέρδη είναι μηδενικά. Έχουμε, δηλ., *μονοπωλιακό ανταγωνισμό* (monopolistic competition) (Θυμηθείτε το υπόδειγμα Chamberlin από την μικροοικονομική θεωρία ή την εισαγωγή στην οικονομική ανάλυση).
3. Εφόσον δεν έχουμε τέλειο ανταγωνισμό δεν είναι απαραίτητο να ισχύει και το θεώρημα του αόρατου χεριού, δηλ., δεν έχουμε απαραίτητα κατά Pareto άριστο.

Γνωρίζουμε τον ρυθμό μεγέθυνσης στη σταθερή κατάσταση. Τώρα πρέπει να δούμε πως κατανέμεται η εργασία μεταξύ του τομέα της έρευνας και του τομέα του τελικού αγαθού. Και εδώ πάλι χρησιμοποιούμε την έννοια του αρμπιτράζ. Η εργασία στον τομέα του τελικού αγαθού αμείβεται με το οριακό της προϊόν όπως δίνεται από την εξίσωση

$$w_Y = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

Οι ερευνητές αμείβονται ανάλογα με την αξία των εφευρέσεών τους. Υποθέτουμε ότι οι ερευνητές θεωρούν την παραγωγικότητα στον τομέα της έρευνας ως δεδομένη και ίση με $\overline{\delta}$. Δεν αναγνωρίζουν ότι η παραγωγικότητα μειώνεται όσοι περισσότεροι ερευνητές μπαίνουν στον χώρο και δεν εσωτερικεύουν την διάχυση της γνώσης που σχετίζεται με το φ. Άρα ο μισθός στον τομέα της έρευνας είναι ίσο με το οριακό προϊόν $\overline{\delta}$ επί την αξία της εφεύρεσης P_A, δηλ., ισχύει ότι

$$w_R = \overline{\delta} P_A$$

Δεδομένου ότι ισχύει και εδώ το αρμπιτράζ και εφόσον δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των εργατών στους δυο τομείς, οι δυο μισθοί πρέπει να είναι ίσοι: $w_Y = w_H$. Άρα

$$w_Y = w_R \Rightarrow (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} = \overline{\delta} P_A.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $P_A = \dfrac{\pi}{r-n}$ και ότι $\pi = \alpha(1-\alpha)Y/A$ άρα $P_A = \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{r-n}\dfrac{Y}{A}$

Η εξίσωση των μισθών γίνεται:

$$(1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} = \frac{\overline{\delta}}{r-n}\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{r-n}\frac{\overline{\delta}}{A} = \frac{1}{L_Y}$$

Σημειώσατε ότι $\dot{A}/A = \overline{\delta} L_A/A$, άρα στην τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης έχουμε $\overline{\delta}/A = g_A/L_A$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\frac{\alpha g_A}{r-n} = \frac{L_A}{L_Y}.$$

Αν s_R είναι το ποσοστό των εργαζομένων στον τομέα της έρευνας, δηλ., $s_R = \dfrac{L_A}{L_A + L_Y}$ τότε έχουμε, $s_R = \dfrac{L_A/L_Y}{L_A/L_Y + L_Y/L_Y} = \dfrac{L_A/L_Y}{L_A/L_Y + 1} \Rightarrow L_A/L_Y = s_R/(1-s_R)$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας ως προς s_R έχουμε

$$s_R = \frac{1}{1+\dfrac{r-n}{\alpha g_A}}$$

Δηλ., όσο πιο γρήγορα μεγεθύνεται η οικονομία τόσο μεγαλύτερο το ποσοστό αυτών που εργάζονται στην έρευνα.

Μπορούμε να δείξουμε ότι $r = \alpha^2\, Y/K$

Απόδειξη: Από προηγούμενες εξισώσεις γνωρίζουμε

$$r = p\alpha, \pi = (1-\alpha)px = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A} \Rightarrow p = \alpha\frac{Y}{A}\frac{1}{x}, x = \frac{K}{A} \Rightarrow r = \alpha^2 Y/K$$

Το συγκεκριμένο r είναι μικρότερο από το οριακό προϊόν του κεφαλαίου, δηλ., το γνωστό μας $r = \alpha Y/K$. Στο υπόδειγμα Solow με σταθερές αποδόσεις κλίμακας και τέλειο ανταγωνισμό οι συντελεστές πληρώνονται το οριακό τους προϊόν. Στο υπόδειγμα Romer έχουμε αύξουσες αποδόσεις και οι συντελεστές δεν μπορούν να αμειφθούν με το οριακό τους προϊόν. Αν το προϊόν εξαντλείται στην αμοιβή των παραγωγικών συντελεστών δεν υπάρχει περιθώριο για να ανταμειφθεί η δραστηριότητα των ατόμων που δημιουργούν το Α. Ως εκ τούτου ο ατελής ανταγωνισμός είναι απαραίτητος. Το κεφάλαιο πληρώνεται λιγότερο από το οριακό του προϊόν και το υπόλοιπο ανταμείβει τους εφευρέτες νέων ιδεών.