Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Θεωρίες Οικονομικής Μεγέθυνσης

Νίκος Θεοχαράκης

Υπόδειγμα Romer

Οι παρούσες σημειώσεις βασίζονται εξ ολοκλήρου στο κεφάλαιο 5 του εγχειριδίου του Charles Jones, *Introduction to Economic Growth*, (2η έκδοση), 2002, Norton, New York. Αποτελούν ουσιαστικά *παράφραση* του κεφαλαίου με κάποιες επεξηγήσεις όταν ο συγγραφέας είναι συνοπτικός. Το υπόδειγμα Romer το οποίο αναλύεται είναι κυρίως αυτό που υπάρχει στο άρθρο του Paul Romer, "Endogenous Technological Change", *Journal of Political Economy*, τόμος 98 (Οκτώβριος 1990), σσ. S71-S102, όπως επεκτάθηκε από τον συγγραφέα στο άρθρο του Charles I. Jones, "R&D-Based Models of Economic Growth", Journal *of Political Economy*, τόμος 103 (Αύγουστος 1995), σσ.759-84.

Μέρος Α. Τα βασικά στοιχεία του υποδείγματος

Το υπόδειγμα Romer επιχειρεί να καταστήσει ενδογενή την τεχνική πρόοδο εισάγοντας την έννοια της αναζήτησης νέων ιδεών από ερευνητές-εφευρέτες οι οποίοι ενδιαφέρονται να κερδίσουν από τις εφευρέσεις τους. Η τεχνική πρόοδος οδηγείται από την έρευνα και την ανάπτυξη (Ε&Α). Όπως και στο υπόδειγμα Solow έχουμε μία εξίσωση που περιγράφει την συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής και ένα σύνολο εξισώσεων που δείχνουν πως μεταβάλλονται οι παραγωγικές εισροές στη διάρκεια του χρόνου.

Η συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής περιγράφει πως το κεφάλαιο K και η παραγωγική εργασία L_Y συνδυάζονται για να παράγουν προϊόν Y, χρησιμοποιώντας το απόθεμα ιδεών A.

$$Y = K^{\alpha}\left(AL_Y\right)^{1-\alpha}$$

Όπου το α είναι μια παράμετρος μεταξύ του 0 και του 1.

Για δεδομένο απόθεμα ιδεών Α, η συνάρτηση παραγωγής έχει σταθερές αποδόσεις κλίμακας ως προς τα Κ και L_Y. Όταν όμως θεωρήσουμε ότι το Α αποτελεί και αυτό εισροή στην παραγωγική διαδικασία τότε έχουμε αύξουσες αποδόσεις κλίμακας. Αυτό συμβαίνει διότι από τη στιγμή που παραχθεί μία ιδέα δεν χρειάζεται να εφευρεθεί εκ νέου. Για να διπλασιάσουμε τη παραγωγή αρκεί να διπλασιάσουμε το κεφάλαιο και την εργασία, όχι την ιδέα. Αν διπλασιάσεις κεφάλαιο, εργασία και το Α τότε θα έχεις υπερδιπλάσιο προϊόν.
Οι εξισώσεις συσσώρευσης του κεφαλαίου και της εργασίας είναι ίδιες με αυτές του υποδείγματος Solow. Το κεφάλαιο συσσωρεύεται καθώς τα άτομα αποταμιεύουν με ένα σταθερό ποσοστό s_K και αποσβέννυται με ένα σταθερό εξωγενές ποσοστό *d*.

$$\dot{K} = s_K - dK$$

Η εργασία – που εδώ είναι ισοδύναμη με τον πληθυσμό – L μεγεθύνεται εκθετικά με σταθερό ρυθμό μεγέθυνσης *n*,

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

Στο υπόδειγμα Solow το *A* μεγεθύνεται εξωγενώς με ένα σταθερό ρυθμό *g*. Αντίθετα στο υπόδειγμα Romer η μεγέθυνση του *A* είναι ενδογενής. Αυτό γίνεται μέσα από μια συνάρτηση παραγωγής του *A*. Το $A(t)$ είναι το συνολικό απόθεμα των ιδεών που έχει παραχθεί από την αρχή του χρόνου μέχρι την στιγμή *t*. Άρα το $\dot{A}$ είναι ο αριθμός των νέων ιδεών που παράγεται κάθε στιγμή του χρόνου. Ο απλούστερος τρόπος να περιγραφεί κάτι τέτοιο είναι να θεωρήσουμε ότι το $\dot{A}$ είναι ίσο με τον αριθμό των ατόμων που επιχειρούν να εφεύρουν ιδέες, L_A, όπου $L = L_Y + L_A$, πολλαπλασιασμένο επί το ρυθμό με τον οποίον ανακαλύπτουν νέες ιδέες, $\overline{\delta}$:

$$\dot{A} = \overline{\delta} L_A$$

Ο ρυθμός με τον οποίο ανακαλύπτονται νέες ιδέες μπορεί βεβαίως να είναι σταθερός. Μπορεί όμως κανείς να θεωρήσει ότι εξαρτάται από το ήδη υπάρχον απόθεμα ιδεών. Μπορεί η ανακάλυψη ιδεών του παρελθόντος μπορεί να επηρεάζει θετικά την ανακάλυψη νέων ιδεών, άρα το $\overline{\delta}$ μπορεί να είναι μια αύξουσα συνάρτηση του Α. Μπορεί αντίθετα οι καλύτερες, ή οι πιο προφανείς, ιδέες να έχουν ήδη ανακαλυφθεί και οι επόμενες ιδέες να είναι πιο δύσκολο να ανακαλυφθεί, οπότε να συμβαίνει το αντίθετο. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το $\overline{\delta}$ είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$\overline{\delta} = \delta A^{\phi}$$

Όπου τα δ και φ είναι σταθερές. Αν $\phi > 0$ η παραγωγικότητα της έρευνας αυξάνει με το απόθεμα των ιδεών, ενώ αν $\phi < 0$ οι καλύτερες ιδέες έχουν ήδη αλιευθεί. Αν $\phi = 0$ τότε η παραγωγικότητα της έρευνας είναι ανεξάρτητη από το απόθεμα των ιδεών.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι η παραγωγικότητα της έρευνας εξαρτάται από τον αριθμό των ερευνητών. Μπορεί, φερειπείν, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των ερευνητών κάποιες ιδέες να ανακαλύπτονται περισσότερες φορές και να επηρεάζεται αρνητικά η παραγωγικότητα της έρευνας. Ένας τρόπος να το δείξουμε αυτό σε ένα υπόδειγμα είναι να θεωρήσουμε ότι αντί για L_A, έχουμε $L_A{}^{\lambda}$, όπου λ είναι μια παράμετρος μεταξύ 0 και 1. Άρα λοιπόν σε μια πιο γενική μορφή μπορεί να ξαναγράψουμε την εξίσωση παραγωγής νέων ιδεών ως

$$\dot{A} = \delta L_A{}^{\lambda} A^{\phi}$$

Θεωρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το φ δεν είναι πολύ μεγάλο και ειδικότερα ότι $\phi < 1$.

Η μεγέθυνση το υπόδειγμα Romer – υπό την προϋπόθεση ότι το ποσοστό των ερευνητών είναι σταθερό, κάτι που θα το αποδείξουμε αργότερα – το υπόδειγμα ακολουθεί το θεώρημα του υποδείγματος Solow ότι όλη η μεγέθυνση του κατά κεφαλή προϊόντος οφείλεται στην τεχνική πρόοδο. Συμβολίζοντας με μικρά γράμματα τα κατά κεφαλή μεγέθη και με g_x το ρυθμό μεγέθυνσης μιας μεταβλητής x , δηλ., $g_x = \hat{x} = \dot{x}/x$, μπορεί να δειχθεί, με τρόπο ανάλογο του υποδείγματος Solow, ότι στην τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης ισχύει ότι

$$g_y = g_k = g_A$$

Δηλ., ότι ο ρυθμός μεγέθυνσης του κατά κεφαλήν προϊόντος, του κατά κεφαλήν κεφαλαίου και του αποθέματος των ιδεών είναι ο ίδιος.

Άρα ποιος είναι αυτός ο ρυθμός μεγέθυνσης; Από την εξίσωση $\dot{A} = \delta L_A{}^{\lambda} A^{\phi}$ διαιρώντας με A προκύπτει ότι

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\delta L_A{}^{\lambda}}{A^{1-\phi}}$$

Στην τροχιά ισόρροπης μεγέθυνσης ο ρυθμός αυτός είναι σταθερός δηλ., ο δικός του ρυθμός μεγέθυνσης είναι μηδενικός. Παίρνοντας, κατά τα γνωστά λογαρίθμους και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$0 = \lambda \frac{\dot{L}_A}{L_A} - (1-\phi)\frac{\dot{A}}{A}$$

Δεδομένου την τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης έχουμε ότι το ποσοστό των ερευνητών στον πληθυσμό είναι σταθερό, αυτό σημαίνει ότι αυτό μεγεθύνεται με τον ρυθμό μεγέθυνσης του πληθυσμού, δηλ., το *n*, άρα η εξίσωσή μας γίνεται

$$0 = \lambda n - (1-\phi) g_A \Rightarrow$$

$$g_A = \frac{\lambda n}{1-\phi}$$

Άρα μακροχρόνια ο ρυθμός μεγέθυνσης εξαρτάται από τις παραμέτρους του υποδείγματος.

Μέρος Β. Η οικονομική δομή του υποδείγματος

Ας προχωρήσουμε τώρα στην οικονομική δομή του υποδείγματος Romer. Αποτελείται από τρεις τομείς: (1) τον τομέα των τελικών καταναλωτικών αγαθών (final goods sector), (2) των τομέα των ενδιάμεσων αγαθών (intermediate goods sector) και (3) τον τομέα της έρευνας (research sector).

1. Ο τομέας των τελικών αγαθών.

Ο τομέας των τελικών αγαθών αποτελείται από τελείως ανταγωνιστικές επιχειρήσεις οι οποίες συνδυάζουν κεφάλαιο, *K*, και εργασία, L_Y, και παράγουν ένα ομοιογενές τελικό προϊόν, *Y*.
Σημ. Την εργασία την συμβολίζουμε με υπο-δείκτη Y, επειδή υπάρχει και εργασία η οποία απασχολείται στον τομέα της έρευνας την οποία συμβολίζουμε με υπο-δείκτη A, δηλ., ως L_A. Το σύνολο της εργασίας στην οικονομία είναι $L = L_Y + L_A$
Η συνάρτηση παραγωγής του τελικού προϊόντος, διαφέρει από εκείνη του υποδείγματος Solow και έχει την εξής μορφή:

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A} x_j^{\alpha}$$

Το προϊόν παράγεται χρησιμοποιώντας εργασία L_Y και μια σειρά από διαφορετικά κεφαλαιουχικά αγαθά x_j, όπου $j = 1, \ldots, A$. Το *A* μετράει τον αριθμό των κεφαλαιουχικών αγαθών που είναι διαθέσιμα να χρησιμοποιηθούν στον τομέα των τελικών αγαθών για την παραγωγή του τελικού αγαθού. Οι εφευρέσεις στον τομέα της έρευνας δημιουργούν νέα κεφαλαιουχικά αγαθά, αυξάνοντας το *A*. Οι επιχειρήσεις στον τομέα των τελικών αγαθών παίρνουν το *A* ως δεδομένο. [Παρατηρείστε ότι ο Romer εκφράζει την τεχνική πρόοδο *A* με την διαθέσιμη γκάμα των κεφαλαιουχικών αγαθών. Για το λόγο αυτό το συγκεκριμένο υπόδειγμα ενδογενούς μεγέθυνσης αποκαλείται υπόδειγμα εύρους διαφορετικών προϊόντων (*product variety model*).]
Παρατηρείστε επίσης το εξής: *για δεδομένο* A, η συνάρτηση παραγωγής έχει σταθερές αποδόσεις κλίμακας, εφόσον αν πολλαπλασιάσουμε το L_Y και κάθε x_j με ένα σταθερό αριθμό, έστω *λ*, το προϊόν Y πολλαπλασιάζεται και αυτό με *λ*.

$$\left(\lambda L_Y\right)^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A} \left(\lambda x_j\right)^{\alpha} = \lambda^{1-\alpha}\lambda^{\alpha}\left[L_Y^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{A} x_j^{\alpha}\right] = \lambda Y$$

Για τεχνικούς καθαρά λόγους, ώστε δηλ., να μπορούμε να κάνουμε χρήση του διαφορικού λογισμού, είναι χρήσιμο να εκφράσουμε την συνάρτηση παραγωγής με την εξής μορφή:

$$Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj$$

Το A δηλ., μετράει το εύρος των διαθέσιμων κεφαλαιουχικών αγαθών και το εύρος αυτό είναι το διάστημα από μηδέν έως A.

Λαμβάνουμε την τιμή του τελικού αγαθού ίση με τη μονάδα.

Οι επιχειρήσεις στον τομέα των τελικών αγαθών μεγιστοποιούν τα κέρδη τους, επιλέγοντας τις μεταβλητές L_Y και x_j, έτσι ώστε η πρώτη παράγωγος των κερδών ως προς κάθε μία προς αυτές τις μεταβλητές να είναι μηδενική.

Τα κέρδη είναι ίσα με την αξία του προϊόντος, Y, εφόσον η τιμή του προϊόντος είναι ίση με τη μονάδα $pY = 1 \cdot Y = Y$, μείον την αμοιβή της εργασίας wL_Y, μείον την αμοιβή των κεφαλαιουχικών αγαθών. Συμβολίζοντας με p_j την αμοιβή του κεφαλαιουχικού αγαθού j, η συνολική αμοιβή των κεφαλαιουχικών αγαθών είναι $\int_0^A p_j x_j dj$. Άρα τα κέρδη είναι ίσα με

$$\pi_Y = L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj$$

Και οι συνθήκες πρώτης τάξεως είναι οι εξής:

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

Και

$$p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} \quad \forall j \in (0, A)$$

Σημείωση: Οι συνθήκες προκύπτουν ως εξής:

$$\max_{L_Y, x_j} \pi_Y \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \pi_Y}{\partial L_Y} = \frac{\partial \left[L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj \right]}{\partial L_Y} =$$

$$= (1-\alpha) L_Y^{-1} \left[L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj \right] - w = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} - w = 0 \Rightarrow$$

$$w = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

$$\frac{\partial \pi_Y}{\partial x_j} = \frac{\partial \left[L_Y^{1-\alpha} \int_0^A x_j^{\alpha} dj - wL_Y - \int_0^A p_j x_j dj \right]}{\partial x_j} =$$

$$= \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1} - p_j = 0 \Rightarrow$$

$$p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}$$

Η πρώτη συνθήκη μας λέει ότι οι επιχειρήσεις προσλαμβάνουν εργασία έως ότου ο μισθός είναι ίσος με την αξία του οριακού προϊόντος της εργασίας. Η δεύτερη συνθήκη μας λέει ότι οι επιχειρήσεις ενοικιάζουν κάθε κεφαλαιουχικό αγαθό έως ότου το οριακό του προϊόν είναι ίσο με την τιμή ενοικίασής του. Παρατηρείστε επίσης ότι οι συνθήκες αυτές αποτελούν και τις συναρτήσεις της (παράγωγης) ζήτησης των παραγωγικών συντελεστών L_Y και x_j.

2. Τομέας ενδιάμεσων αγαθών

Στον τομέα των ενδιάμεσων αγαθών έχουμε μονοπωλιακό ανταγωνισμό. Έχουμε πολλούς μονοπωλητές όπου ο καθένας βασίζει το μονοπώλιο του στο ότι κατέχει τη πατέντα του κεφαλαιουχικού αγαθού *j* που έχει αγοράσει από τον τομέα της έρευνας. Από τη στιγμή που αγοραστεί η πατέντα με δεδομένο κόστος, ο κάθε μονοπωλητής παράγει κεφαλαιουχικά αγαθά με μια πολύ απλή συνάρτηση παραγωγής: μία μονάδα καθαρού κεφαλαίου μετασχηματίζεται άμεσα σε μια μονάδα κεφαλαιουχικού αγαθού. Το κέρδος του μονοπωλητή του αγαθού *j* είναι απλά: $\pi_j = p_j(x_j)x_j - rx_j$, αφού είναι η διαφορά των εσόδων από το κόστος, όπου *r* είναι η τιμή του καθαρού κεφαλαίου. Ας σημειωθεί ότι εφόσον είναι μονοπωλητής, αντιμετωπίζει την συνάρτηση ζήτησης του προϊόντος του η οποία μας δίνεται από την εξίσωση $p_j = \alpha L_Y^{1-\alpha} x_j^{\alpha-1}$. Η μεγιστοποίηση του κέρδους ως προς x_j μας δίνει τη συνθήκη πρώτης τάξεως:

$\max\limits_{x_j} \pi_j = p_j(x_j)x_j - rx_j \Rightarrow p'(x)x + p(x) - r = 0$, απλοποιώντας τον δείκτη j. Διαιρώντας με το p, και λύνοντας ως προς p έχουμε:

$$p'(x)x + p(x) - r = 0 \Rightarrow \frac{p'(x)}{p(x)}x + 1 = \frac{r}{p(x)} \Rightarrow$$

$$p(x) = \frac{r}{1 + \frac{p'(x)}{p(x)}x}$$

Παρατηρείστε ότι η έκφραση $\frac{p'(x)}{p(x)}x$, που είναι η αντίστροφη ελαστικότητα της καμπύλης ζήτησης του κάθε κεφαλαιουχικού αγαθού, μπορεί να υπολογιστεί από τη συνθήκη πρώτης τάξεως της μεγιστοποίησης του κέρδους της ανταγωνιστικής επιχείρησης του τομέα των τελικών αγαθών, δηλ., την εξίσωση

$$p = \alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-1} \Rightarrow p'(x) = \frac{\partial p}{\partial x} = (\alpha - 1)\alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-2} \Rightarrow$$

$$\frac{p'(x)}{p(x)}x = \frac{(\alpha-1)\alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-2}}{\alpha L_Y^{1-\alpha} x^{\alpha-1}}x = (\alpha - 1)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση έχουμε $p = \frac{r}{1 + \frac{p'(x)}{p}x} = \frac{r}{1 + (1-\alpha)} = \frac{r}{\alpha}$, ή

$$p = \frac{r}{\alpha}$$

Δηλ., κάθε επιχείρηση που παράγει κεφαλαιουχικά αγαθά επιβάλλει ένα σταθερό ποσοστό (markup) επί του οριακού κόστους του κεφαλαίου.

Αυτή η λύση είναι κοινή για όλους τους μονοπωλητές, άρα $x_j = x$. Το ίδιο ισχύει για τις τιμές. Άρα κάθε μονοπωλιακή επιχείρηση έχει το ίδιο κέρδος. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το κέρδος αυτό είναι:

$$\pi = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A}$$

Σημείωση: Ένας τρόπος να αποδειχθεί αυτό είναι ο εξής:
Από τη συνάρτηση ζήτησης των κεφαλαιουχικών αγαθών έχουμε: $p = \alpha {L_Y}^{1-\alpha} x^{\alpha-1}$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με x προκύπτει $px = \alpha {L_Y}^{1-\alpha} x^{\alpha}$. Δεδομένου ότι υπάρχουν A $x_j = x$ συνεπάγεται ότι $Y = {L_Y}^{1-\alpha} A x^{\alpha}$. Αν πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε το δεύτερο μέρος της προηγούμενης εξίσωσης με το A έχουμε: $px = \frac{\alpha}{A} {L_Y}^{1-\alpha} A x^{\alpha} = \alpha \frac{Y}{A}$.
Η εξίσωση $p = \frac{r}{\alpha}$ μας δίνει $p = \frac{r}{\alpha} \Rightarrow r = \alpha p \Rightarrow rx = \alpha px$. Το κέρδος τώρα γίνεται $\pi = px - rx = px - \alpha px = (1-\alpha)px = (1-\alpha)\left(\alpha \frac{Y}{A}\right) = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A}$. ο.ε.δ.

Τέλος η συνολική ζήτηση για κεφάλαιο από τον τομέα των ενδιάμεσων αγαθών πρέπει να ισούται με το συνολικό απόθεμα κεφαλαίου της οικονομίας, δηλ.,:

$$\int_0^A x_j dj = K .$$

Εφόσον $x_j = x$ η προηγούμενη εξίσωση μπορεί να καθορίσει το x. Δηλ.,

$$x = \frac{K}{A}$$

Η συνάρτηση παραγωγής του τελικού αγαθού μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$Y = A {L_Y}^{1-\alpha} x^{\alpha}$$

Και αντικαθιστώντας από την προηγούμενη εξίσωση έχουμε

$$Y = AL_Y^{1-\alpha}x^{\alpha} = AL_Y^{1-\alpha}\left(\frac{K}{A}\right)^{\alpha} = A \cdot A^{-\alpha}L_Y^{1-\alpha}K^{\alpha} = A^{1-\alpha}L_Y^{1-\alpha}K^{\alpha} \Rightarrow$$

$$Y = K^{\alpha}\left(AL_Y\right)^{1-\alpha}$$

Δηλ., τη συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής που είχαμε στο υπόδειγμα Solow τη συναντάμε και εδώ στην συνάρτηση παραγωγής του τελικού αγαθού. Παρατηρείστε ότι είναι σταθερών αποδόσεων κλίμακας ως προς K και L, αλλά αυξουσών αποδόσεων κλίμακας αν υπολογίσουμε την τεχνολογία.

3. Ο τομέας της έρευνας

Ο τρόπος που εμφανίζεται η έρευνα στο υπόδειγμά μας είναι σαν να ψάχνουμε για ψήγματα χρυσού στα ποτάμια της «Άγριας Δύσης» της Αμερικής τα τέλη του 19ου αιώνα. Όλοι μπορούν να ψάξουν για χρυσό και η ανταμοιβή τους είναι το ψήγμα που θα βρουν. Εν προκειμένω φυσικά τα «ψήγματα» είναι ιδέες οι οποίες δημιουργούν νέα κεφαλαιουχικά (ενδιάμεσα) αγαθά. Όταν γίνει μια εφεύρεση ο εφευρέτης αποκτά τα δικαιώματα σε αυτή για πάντα. Πουλάει τα δικαιώματα σε ένα παραγωγό ενδιάμεσων αγαθών και με τα χρήματα αυτά καταναλώνει και αποταμιεύει όπως κάθε άλλος οικονομικός δρών στο υπόδειγμα.
Το ερώτημα είναι ποια θα είναι η τιμή της πατέντας της εφεύρεσης. Υποθέτουμε ότι ο καθένας μπορεί να συμμετάσχει σε ένα πλειοδοτικό διαγωνισμό για την απόκτησή της. Η τιμή της πατέντας θα είναι ίση με την παρούσα αξία των κερδών μιας εταιρείας παραγωγής ενδιάμεσων αγαθών. Αυτό συμβαίνει διότι οι ανταγωνιστικές επιχειρήσεις δεν έχουν κέρδη. Κέρδη έχουν μόνον οι επιχειρήσεις που έχουν μονοπωλιακό πλεονέκτημα με την κατοχή μιας πατέντας. Επειδή είναι η πατέντα που δημιουργεί τα μονοπωλιακά κέρδη, η τιμή της πατέντας θα είναι ίση με την (παρούσα) αξία αυτών των κερδών. Αν η τιμή της πατέντας ήταν μικρότερη από την παρούσα αξία των κερδών, κάποιοι θα επωφελούνταν την διαφορά, άρα κάποιοι άλλοι θα ήταν διατεθειμένοι να πληρώσουν περισσότερο για την απόκτηση της πατέντας. Αν η τιμή της πατέντας ήταν μεγαλύτερη από την παρούσα αξία των κερδών, όποιος την αγόραζε θα έκανε ζημιές, άρα δεν θα το έκανε. Έστω λοιπόν ότι η τιμή αυτή είναι ίση με P_A. Πως μεταβάλλεται η τιμή αυτή στον χρόνο; Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα που προκύπτει από την λογική του αρμπιτράζ. Έστω ότι έχω ένα κεφάλαιο ίσο με P_A. Έχω δύο επιλογές: ή (1) να το καταθέσω στην «τράπεζα»[1] με πάρω επιτόκιο *r*, άρα να έχω έσοδα από τόκους ίσα με rP_A, ή (2) να αγοράσω με αυτά τα χρήματα την πατέντα και να κερδίσω τα κέρδη της μονοπωλιακής επιχείρησης του ενδιάμεσου αγαθού που παράγεται με τη συγκεκριμένη τεχνογνωσία, *π*, συν την μεταβολή που θα επέλθει στην αξία της πατέντας που είναι ίση με $\dot{P}_A$. Αυτές οι δύο επιλογές, σύμφωνα με την λογική του αρμπιτράζ, πρέπει να εξισωθούν διότι διαφορετικά κάποιος θα μπορούσε να βγάλει χρήματα ανέξοδα. Άρα η εξίσωση του αρμπιτράζ λέει ότι

$$rP_A = \pi + \dot{P}_A$$

[1] Εδώ φυσικά δεν έχουμε τράπεζες, αλλά κάποιος μπορεί να αγοράσει κεφάλαιο με απόδοση *r*.

Το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι η αμοιβή από την επιλογή (1) και το δεξιό η αμοιβή από την επιλογή (2). Διαιρώντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με P_A έχουμε:

$$r = \frac{\pi}{P_A} + \frac{\dot{P}_A}{P_A}$$

Στη σταθερή κατάσταση το r πρέπει να είναι σταθερό και ανάλογο με το Y/K. Αυτό σημαίνει ότι το π και το P_A πρέπει να μεταβάλλονται με τον ίδιο ρυθμό μεγέθυνσης. Από προηγούμενη εξίσωση γνωρίζουμε ότι $\pi = \alpha(1-\alpha)Y/A$ δηλ., ότι το π είναι ανάλογο του Y/A, άρα έχουν τον ίδιο ρυθμό μεγέθυνσης. Εφόσον το κατά κεφαλή προϊόν y και το A μεγεθύνονται με τον ίδιο ρυθμό θα πρέπει να ισχύει ότι $\hat{y} = \hat{A} \Rightarrow \hat{Y} - \hat{L} = \hat{A} \Rightarrow \hat{Y} - n = \hat{A} \Rightarrow \hat{Y} - \hat{A} = n$, δηλ., ο ρυθμός μεγέθυνσης του Y/A να είναι ίσος με το n, τον ρυθμό μεγέθυνσης του πληθυσμού, ο οποίος είναι ίσος με τον ρυθμό μεγέθυνσης του π και ίσος με το ρυθμό μεγέθυνσης του P_A. Άρα έχουμε

$$\hat{P}_A = \frac{\dot{P}_A}{P_A} = n \Rightarrow r = \frac{\pi}{P_A} + \frac{\dot{P}_A}{P_A} = \frac{\pi}{P_A} + n \Rightarrow$$

$$P_A = \frac{\pi}{r-n}$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει την τιμή της πατέντας στην τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης.

Επιλύοντας το υπόδειγμα

Έχουμε τώρα τη βασική περιγραφή του υποδείγματός μας και κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις.

1. Η συναθροιστική συνάρτηση παραγωγής έχει αύξουσες αποδόσεις κλίμακας. Είναι μεν σταθερών αποδόσεων κλίμακας ως προς τα K και L, αλλά εφόσον το A αποτελεί εισροή έχουμε αύξουσες αποδόσεις.
2. Οι αύξουσες αποδόσεις απαιτούν ατελή ανταγωνισμό. Στο υπόδειγμά μας ο ατελής ανταγωνισμός υπάρχει στον τομέα των ενδιάμεσων αγαθών. Η τιμή του παραγόμενου αγαθού είναι μεγαλύτερη από το οριακό του κόστος. Τα κέρδη όμως αυτά τα απολαμβάνουν οι κάτοχοι της πατέντας, άρα τα πραγματικά κέρδη είναι μηδενικά. Έχουμε, δηλ., *μονοπωλιακό ανταγωνισμό* (monopolistic competition) (Θυμηθείτε το υπόδειγμα Chamberlin από την μικροοικονομική θεωρία ή την εισαγωγή στην οικονομική ανάλυση).
3. Εφόσον δεν έχουμε τέλειο ανταγωνισμό δεν είναι απαραίτητο να ισχύει και το θεώρημα του αόρατου χεριού, δηλ., δεν έχουμε απαραίτητα κατά Pareto άριστο.

Γνωρίζουμε τον ρυθμό μεγέθυνσης στη σταθερή κατάσταση. Τώρα πρέπει να δούμε πως κατανέμεται η εργασία μεταξύ του τομέα της έρευνας και του τομέα του τελικού αγαθού. Και εδώ πάλι χρησιμοποιούμε την έννοια του αρμπιτράζ. Η εργασία στον τομέα του τελικού αγαθού αμείβεται με το οριακό της προϊόν όπως δίνεται από την εξίσωση

$$w_Y = (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y}$$

Οι ερευνητές αμείβονται ανάλογα με την αξία των εφευρέσεών τους. Υποθέτουμε ότι οι ερευνητές θεωρούν την παραγωγικότητα στον τομέα της έρευνας ως δεδομένη και ίση με $\overline{\delta}$. Δεν αναγνωρίζουν ότι η παραγωγικότητα μειώνεται όσοι περισσότεροι ερευνητές μπαίνουν στον χώρο και δεν εσωτερικεύουν την διάχυση της γνώσης που σχετίζεται με το φ. Άρα ο μισθός στον τομέα της έρευνας είναι ίσο με το οριακό προϊόν $\overline{\delta}$ επί την αξία της εφεύρεσης P_A, δηλ., ισχύει ότι

$$w_R = \overline{\delta} P_A$$

Δεδομένου ότι ισχύει και εδώ το αρμπιτράζ και εφόσον δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των εργατών στους δυο τομείς, οι δυο μισθοί πρέπει να είναι ίσοι: $w_Y = w_H$. Άρα

$$w_Y = w_R \Rightarrow (1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} = \overline{\delta} P_A .$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $P_A = \dfrac{\pi}{r-n}$ και ότι $\pi = \alpha(1-\alpha)Y/A$ άρα $P_A = \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{r-n}\dfrac{Y}{A}$

Η εξίσωση των μισθών γίνεται:

$$(1-\alpha)\frac{Y}{L_Y} = \frac{\overline{\delta}}{r-n}\alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{r-n}\frac{\overline{\delta}}{A} = \frac{1}{L_Y}$$

Σημειώσατε ότι $\dot{A}/A = \overline{\delta} L_A/A$, άρα στην τροχιά της ισόρροπης μεγέθυνσης έχουμε $\overline{\delta}/A = g_A/L_A$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$\frac{\alpha g_A}{r-n} = \frac{L_A}{L_Y}.$$

Αν s_R είναι το ποσοστό των εργαζομένων στον τομέα της έρευνας, δηλ., $s_R = \dfrac{L_A}{L_A + L_Y}$ τότε έχουμε, $s_R = \dfrac{L_A/L_Y}{L_A/L_Y + L_Y/L_Y} = \dfrac{L_A/L_Y}{L_A/L_Y + 1} \Rightarrow L_A/L_Y = s_R/(1-s_R)$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας ως προς s_R έχουμε

$$s_R = \frac{1}{1 + \dfrac{r-n}{\alpha g_A}}$$

Δηλ., όσο πιο γρήγορα μεγεθύνεται η οικονομία τόσο μεγαλύτερο το ποσοστό αυτών που εργάζονται στην έρευνα.

Μπορούμε να δείξουμε ότι $r = \alpha^2\, Y/K$

Απόδειξη: Από προηγούμενες εξισώσεις γνωρίζουμε

$$r = p\alpha,\ \pi = (1-\alpha)px = \alpha(1-\alpha)\frac{Y}{A} \Rightarrow p = \alpha\frac{Y}{A}\frac{1}{x},\ x = \frac{K}{A} \Rightarrow r = \alpha^2\, Y/K$$

Το συγκεκριμένο r είναι μικρότερο από το οριακό προϊόν του κεφαλαίου, δηλ., το γνωστό μας $r = \alpha\, Y/K$. Στο υπόδειγμα Solow με σταθερές αποδόσεις κλίμακας και τέλειο ανταγωνισμό οι συντελεστές πληρώνονται το οριακό τους προϊόν. Στο υπόδειγμα Romer έχουμε αύξουσες αποδόσεις και οι συντελεστές δεν μπορούν να αμειφθούν με το οριακό τους προϊόν. Αν το προϊόν εξαντλείται στην αμοιβή των παραγωγικών συντελεστών δεν υπάρχει περιθώριο για να ανταμειφθεί η δραστηριότητα των ατόμων που δημιουργούν το A. Ως εκ τούτου ο ατελής ανταγωνισμός είναι απαραίτητος. Το κεφάλαιο πληρώνεται λιγότερο από το οριακό του προϊόν και το υπόλοιπο ανταμείβει τους εφευρέτες νέων ιδεών.