ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Μακροοικονομικά της Ανάπτυξης [Θεωρία Οικονομικής Μεγέθυνσης]

Νίκος Θεοχαράκης

Σημειώσεις στην έννοια της τεχνική προόδου

Οι σημειώσεις αυτές βασίστηκαν στα εξής εγχειρίδια Daron Acemoglu, *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton and Oxford, MIT Press, 2009 και Hywell G. Jones, *Εισαγωγή στις σύγχρονες θεωρίες οικονομικής μεγέθυνσης*, Αθήνα, Κριτική, 1993 [αγγλική έκδοση: *An Introduction to Modern Theories of Economic Growth*, London, Thomas Nelson and Sons, 1975].

Στο σημείωμα αυτό θα αναφερθούμε ακροθιγώς στην σημαντικότητα έννοια της τεχνικής προόδου. Ειδικότερα θα αναφερθούμε μόνο στον τρόπο με τον οποίο η τεχνική πρόοδος ενσωματώνεται μαθηματικά στα υποδείγματα εξωγενούς μεγέθυνσης [exogenous growth models] όπου η τεχνική πρόοδος [technical (or technological) progress] θεωρείται δεδομένη, αυξάνεται μάλιστα με σταθερό ρυθμό. Γενικά η τεχνική πρόοδος μπορεί να αφορά (α) στην παραγωγή μεγαλύτερης ποσότητας προϊόντος με τις ίδιες ποσότητες εισροών, (β) στην ποιοτική βελτίωση του προϊόντος ή (γ) στη δημιουργία νέων προϊόντων. Εδώ θα ασχοληθούμε μόνο με την πρώτη περίπτωση.

Στα υποδείγματα Solow-Swan και Ramsay-Cass-Koopmans παραστήσαμε την τεχνική πρόοδο ως *αποτελεσματικότητα της εργασίας* και την συμβολίσαμε με μια χρονική μεταβλητή $A(t)$ η οποία λειτουργεί πολλαπλασιαστικά με την εργασία $L(t)$, ώστε να καταλήξουμε στην έννοια της αποτελεσματικής εργασίας [effective labour] την οποία συμβολίσαμε με το γινόμενο $A(t)L(t)$. Έτσι είχαμε μια συνάρτηση παραγωγής – η οποία ικανοποιούσε και ορισμένες συνθήκες – που είχε την μορφή $Y(t)=F\left(K(t),A(t)L(t)\right)$. Θεωρήσαμε μάλιστα ότι η αποτελεσματικότητα της εργασίας μεγεθύνεται με σταθερό ρυθμό g, δηλ., ότι:

$$\hat{A} \equiv \frac{\dot{A}}{A} \equiv \frac{\frac{dA}{dt}}{A} = g$$

Που σημαίνει ότι $A(t) = A_0 e^{gt}$.

Όπως θα δούμε αργότερα η επιλογή αυτή δεν ήταν τυχαία. Στην πραγματικότητα, το είδος αυτό της τεχνικής προόδου είναι απαραίτητο για να έχουμε ισορροπία σε σταθερή κατάσταση.

Γενικότερα όμως η τεχνική πρόοδος μπορεί να αφορά και την αποτελεσματικότητα του κεφαλαίου, ή μπορεί ακόμα να είναι έξω από τη συνάρτηση παραγωγής και δρα πολλαπλασιαστικά με αυτή. Άρα έχουμε την εξής ταξινόμηση της τεχνική προόδου:

(1) **Τεχνική πρόοδος αυξάνουσα το κεφάλαιο** [capital-augmenting technical progress]

$$Y(t) = F\left(A_K(t)K(t), L(t)\right)$$

Στην περίπτωση αυτή η τεχνική πρόοδος δρα πολλαπλασιαστικά με το κεφάλαιο και αφορά την αποτελεσματικότητα του κεφαλαίου. Στη βιβλιογραφία αυτή αναφέρεται ως **τεχνική πρόοδος ουδέτερη κατά Solow** [Solow-neutral technical progress][1]

(2) **Τεχνική πρόοδος αυξάνουσα την εργασία** [labour-augmenting technical progress]

$$Y(t) = F\left(K(t), A_L(t)L(t)\right)$$

Στην περίπτωση αυτή η τεχνική πρόοδος δρα πολλαπλασιαστικά με την εργασία και αφορά την αποτελεσματικότητα της εργασίας. Στη βιβλιογραφία αυτή αναφέρεται ως **τεχνική πρόοδος ουδέτερη κατά Harrod** [Harrod-neutral technical progress][2]

(3) **Τεχνική πρόοδος εξίσου αυξάνουσα το κεφάλαιο και την εργασία**

$$Y(t) = F\left(A_H K(t), A_H(t)L(t)\right)$$

Στην περίπτωση αυτή η τεχνική πρόοδος δρα πολλαπλασιαστικά με την εργασία και το κεφάλαιο. Αν η συνάρτηση παραγωγής διέπεται από σταθερές αποδόσεις κλίμακας τότε η συνάρτηση αυτή μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής:

$$Y(t) = A_H(t) \cdot F\left(K(t), L(t)\right)$$

[1] Είναι κάπως παράδοξο ότι το υπόδειγμα του Solow δεν χρησιμοποιεί τεχνική πρόοδο ουδέτερη κατά Solow, αλλά κατά Harrod. Η ονομασία οφείλεται σε ένα μεταγενέστερο άρθρο του Solow, στο οποίο η τεχνική πρόοδος ενσωματώνεται στο κεφάλαιο μέσα από διαφορετικές γενιές (vintages) μηχανημάτων. Βλ. R.M. Solow, “Investment and technical change”, στο K.J. Arrow, S. Karlin & P. Suppes (επιμ.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Palo Alto, CA, Stanford University Press, 1959, σσ. 89-104.

[2] R. F. Harrod, Review: *Essays in the Theory of Employment* by Joan Robinson, *Economic Journal,* τόμος 47, τεύχος 186 (Ιούνιος, 1937), σσ. 326-330 και του ιδίου, *Towards a Dynamic Economics*, London, Macmillan, 1948.

Στη βιβλιογραφία αυτή αναφέρεται ως **τεχνική πρόοδος ουδέτερη κατά Hicks** [Hicks-neutral technical progress][3]

Όπως παρατηρεί ο Daron Acemoglu[4]:

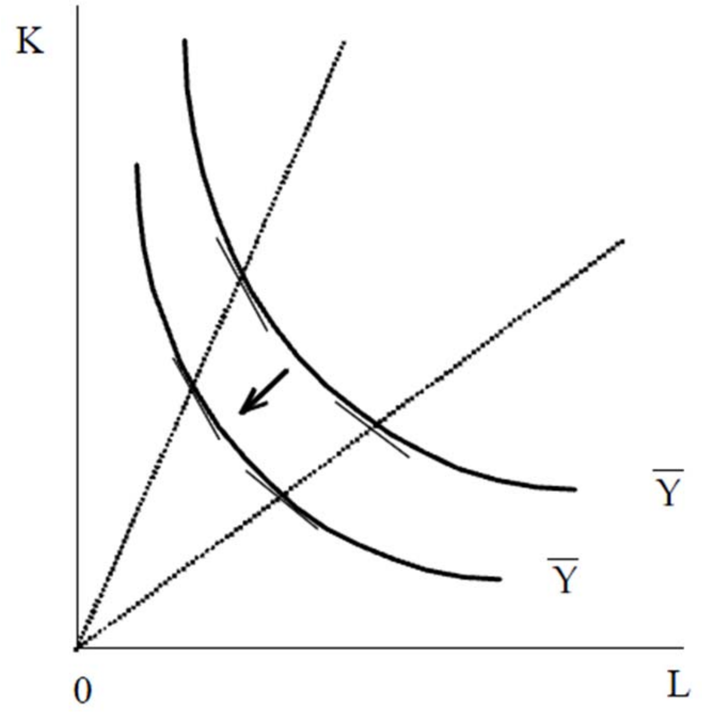
«Φυσικά, στην πράξη η τεχνολογική αλλαγή μπορεί να είναι ένα μίγμα των παραπάνω, έτσι ώστε μπορούμε να έχουμε ένα διανυσματικό δείκτη της τεχνολογίας $A(t)=\left(A_H(t), A_K(t), A_L(t)\right)$ και μία συνάρτηση παραγωγής της μορφής $\tilde{F}\left(K(t), L(t),\right) A(t)=A_H(t) F\left[A_K(t) K(t), A_L(t) L(t)\right]$»

Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά τις μορφές αυτές:

Κατά Hicks ουδέτερη τεχνική πρόοδος

Στην κατά Hicks ουδέτερη τεχνική πρόοδο ολόκληρη η [οιονεί] συνάρτηση παραγωγής $F\left(K(t), L(t)\right)$ πολλαπλασιάζεται με τη μεταβλητή της τεχνικής προόδου για να μας δώσει τη συνάρτηση παραγωγής. Αν παραστήσουμε μια καμπύλη ίσης ποσότητας παραγωγής [isoquant] με την εργασία στον οριζόντια άξονα και το κεφάλαιο στον κάθετο, τότε μια τεχνολογική αλλαγή ουδέτερη κατά Hicks θα έχει ως αποτέλεσμα να μπορεί να παραχθεί το ίδιο προϊόν με λιγότερες ποσότητες συντελεστών και άρα να πάμε σε μία νέα isoquant *με ίδιο επίπεδο παραγωγής* αλλά πιο κοντά στην αρχή των αξόνων. Η μετατόπιση αυτή θα είναι παράλληλη και ο *λόγος των οριακών προϊόντων κεφαλαίου και εργασίας θα είναι ο αυτός για κάθε σταθερό λόγο κεφαλαίου εργασίας.*

[3] J. R. Hicks, *The Theory of Wages*. London, Macmillan, 1932 [2η έκδ. 1963].
[4] D. Acemoglu, *Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton, NJ and Oxford, MIT Press, 2009, σ. 59.



Σημείωση: Πάνω σε μία isoquant η μεταβολή του προϊόντος είναι μηδενική. Άρα ισχύει ότι $Y = F(K,L) \Rightarrow dY = F_K dK + F_L dL = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dL} = -\frac{F_L}{F_K}$. Άρα η κλίση της isoquant μας δίνει τον λόγο των οριακών προϊόντων.

Ο Hicks (1932, σ. 121) μάλιστα ταξινόμησε τις εφευρέσεις ανάλογα με το αποτέλεσμα που έχουν πάνω στη μεταβολή του λόγου του οριακού προϊόντος του κεφαλαίου ως προς το οριακό προϊόν της εργασίας ως «εξοικονομούσες εργασία» (labour saving), «ουδέτερες» (neutral) και «εξοικονομούσες κεφάλαιο» (capital saving).

Αν συμβολίσουμε με $F_K(0)$ και $F_L(0)$ τα οριακά προϊόντα του κεφαλαίου και της εργασίας αντίστοιχα *πριν* την τεχνολογική αλλαγή και με $F_K(t)$ και $F_L(t)$ τα οριακά προϊόντα του κεφαλαίου και της εργασίας αντίστοιχα *μετά* την τεχνολογική αλλαγή, τότε ο ορισμός του Hicks μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

Αν $\frac{F_K(t)}{F_L(t)} > \frac{F_K(0)}{F_L(0)}$ τότε η τεχνική πρόοδος στην ταξινόμηση του Hicks είναι *εξοικονομούσα εργασία* [labour saving]

Αν $\frac{F_K(t)}{F_L(t)} = \frac{F_K(0)}{F_L(0)}$ τότε η τεχνική πρόοδος είναι *ουδέτερη κατά Hicks* [Hicks neutral]

Αν $\frac{F_K(t)}{F_L(t)} < \frac{F_K(0)}{F_L(0)}$ τότε η τεχνική πρόοδος στην ταξινόμηση του Hicks είναι *εξοικονομούσα κεφάλαιο* [capital saving]

Τα παραπάνω ισχύουν για **δεδομένο λόγο κεφαλαίου εργασίας.**

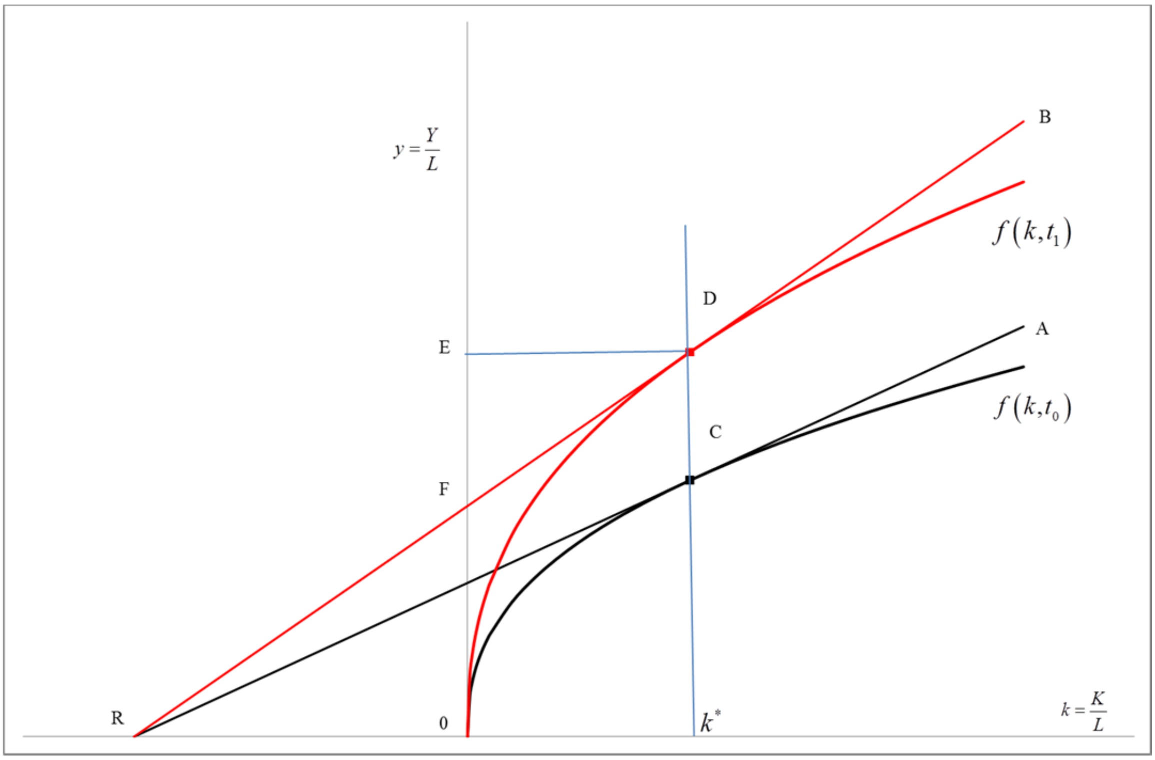
Παρατηρείστε μάλιστα ότι εφόσον αναφερόμαστε σε σταθερό λόγο κεφαλαίου εργασίας μια ουδέτερη κατά Hicks τεχνική πρόοδος σημαίνει ότι ο λόγος των μεριδίων κεφαλαίου εργασίας παραμένει σταθερός κατά μία τεχνική μεταβολή.

Απόδειξη: $\frac{F_K(t)}{F_L(t)}=\frac{F_K(0)}{F_L(0)}$ πολλαπλασιάζουμε και τα δύο σκέλη με *K/L* και έχουμε

$$\frac{F_K(t)}{F_L(t)}\frac{K}{L}=\frac{F_K(0)}{F_L(0)}\frac{K}{L}\Rightarrow\frac{F_K(t)K}{F_L(t)L}=\frac{F_K(0)K}{F_L(0)L}=\frac{rK}{wL}\equiv\Pi$$

Ας διερευνήσουμε την περίπτωση της ουδέτερης κατά Hicks τεχνικής προόδου με το παρακάτω σχήμα:

Οι άξονες είναι εκφρασμένοι σε εντατική μορφή. Στον οριζόντιο άξονα είναι το κεφάλαιο ανά εργασία *k=K/L*, ενώ στον κάθετο άξονα το προϊόν ανά εργασία *y=Y/L*. Πριν από την τεχνολογική αλλαγή η συνάρτηση παραγωγής είναι η $y=f(k,t_0)$, ενώ μετά την τεχνολογική αλλαγή η συνάρτηση παραγωγής είναι η $y=f(k,t_1)$[με κόκκινο]. Παρατηρείστε ότι η τεχνική πρόοδος μετατοπίζει την συνάρτηση παραγωγής προς τα επάνω. Θα δούμε πως στην κατά Hicks ουδέτερη τεχνική πρόοδο γίνεται αυτή η μετατόπιση.



Έστω τώρα ένα δεδομένο *k** [δηλ., δεδομένος λόγος κεφαλαίου εργασίας]. Τα αντίστοιχα κατά κεφαλήν προϊόντα είναι στα σημεία C και D πριν και μετά την τεχνική αλλαγή αντίστοιχα. Οι ευθείες RA και RB μας δίνουν τις εφαπτόμενες στα σημεία C και D αντίστοιχα. Οι εφαπτόμενες είναι φυσικά οι πρώτες παράγωγοι των $f\left(k,t_0\right)$και $f\left(k,t_1\right)$στο σημείο *k** δίνουν δηλ., το οριακό προϊόν του κεφαλαίου. [Για την ακρίβεια η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας $\measuredangle ARk^*$ μας δίνει το οριακό προϊόν του κεφαλαίου της $f\left(k,t_0\right)$ στο σημείο *k**, ενώ η τριγωνομετρική εφαπτομένη της γωνίας $\measuredangle BRk^*$ μας δίνει το οριακό προϊόν του κεφαλαίου της $f\left(k,t_1\right)$ στο ίδιο σημείο]. Πρέπει να δείξουμε γιατί στην κατά Hicks ουδέτερη τεχνική πρόοδο οι δυο εφαπτόμενες συγκλίνουν στο ίδιο σημείο.

Ας εστιάσουμε στην συνάρτηση $f\left(k,t_1\right)$. Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο D [δηλ., η εφ$\measuredangle DRk^*$], μας δίνει το οριακό προϊόν του κεφαλαίου στο σημείο *k**

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\left.\frac{\partial f\left(k,t_1\right)}{\partial k}\right|_{k=k^*}$$

Το οριακό προϊόν του κεφαλαίου σύμφωνα με τη θεωρία της οριακής παραγωγικότητας είναι ίσο με την αμοιβή μιας μονάδας κεφαλαίου, δηλ., ίσο με *r*. Στο σχήμα μας το *r* δίνεται από την κλίση τη εφαπτομένης στο D, η οποία είναι ίση με Dk^*/k^*R, η οποία είναι ίση με EF/ED, αλλά το ED είναι ίσο με το *k**. Άρα *r*=EF/ED= EF/*k**, δηλ., EF=*rk**.
Το E0 μας δίνει το προϊόν ανά εργάτη, *y**. Λόγω του θεωρήματος του Euler για την εξάντληση του προϊόντος ισχύει ότι:

$F\left(K,L\right)=\frac{\partial F}{\partial K}K+\frac{\partial F}{\partial L}L=rK+wL$. Διαιρώντας με *L* έχουμε:

$$\frac{F\left(K,L\right)}{L}=\frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{L}+\frac{\partial F}{\partial L}\frac{L}{L}=r\frac{K}{L}+w\frac{L}{L}\Rightarrow f\left(k\right)=f'\left(k\right)k+\frac{\partial F}{\partial L}=rk+w\Rightarrow$$

$$w=f\left(k\right)-f'\left(k\right)k=f\left(k\right)-rk$$

[Θυμηθείτε ότι $\frac{\partial F}{\partial K}=\frac{df\left(k\right)}{dk}\equiv f'\left(k\right)$].

Το προϊόν ανά εργάτη διανέμεται στην αμοιβή του κεφαλαίου ανά εργάτη, $f'\left(k\right)k=rk$, και στην αμοιβή της εργασίας ανά εργάτη, δηλ., το μισθό *w*. Με άλλα λόγια στο σχήμα μας το E0 κατανέμεται στο EF που είναι το $f'\left(k\right)k=rk$ και στο 0F που είναι ο μισθός, *w*.

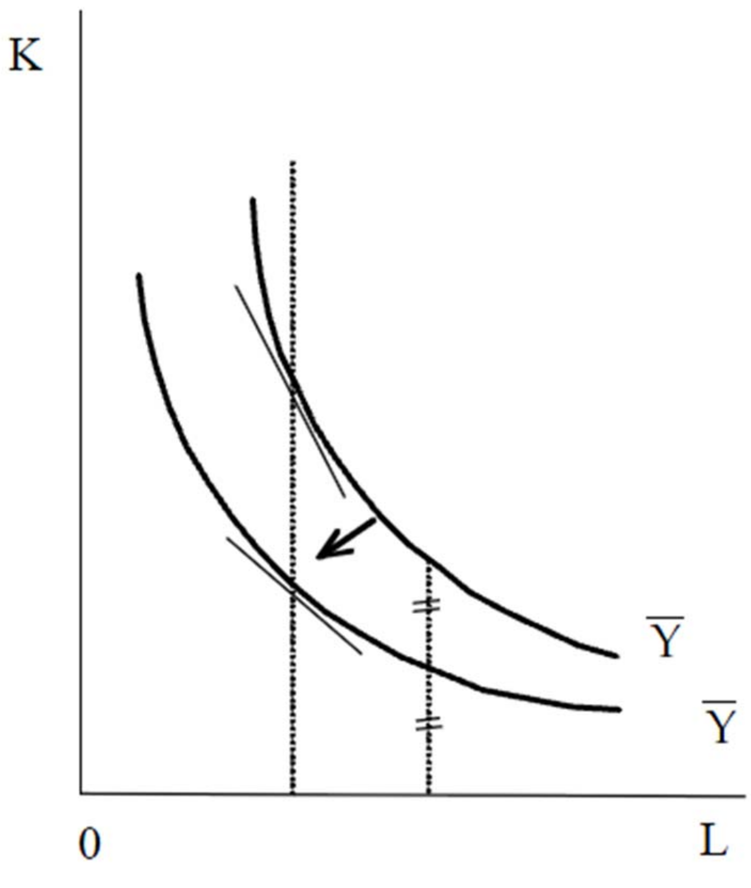
Τώρα, η κλίση της εφαπτομένης στο D, δηλ., το *r*, είναι ίση με $Dk^*/k^*R=0F/0R$. Άρα εφόσον *0F=w*, ισχύει ότι *r=w/0R*, δηλ., *0R=w/r*. Το *0R* μετρά τον λόγο του μισθού προς την ανά μονάδα αμοιβή του κεφαλαίου, δηλ., το λόγο του οριακού προϊόντος της εργασίας προς το οριακό προϊόν του κεφαλαίου.

Δηλ., $0R=\frac{w}{r}=\frac{F_L}{F_K}$

Αποδείξαμε δηλ., ότι για να παραμείνει ο λόγος των οριακών προϊόντων σταθερός, όπως απαιτεί η ουδέτερη κατά Hicks τεχνική πρόοδος, πρέπει οι εφαπτόμενες στις δύο συναρτήσεις παραγωγής [πριν και μετά την τεχνολογική μεταβολή] για το ίδιο *k (=*K/L*) να συγκλίνουν στο ίδιο σημείο [το R εν προκειμένω].**

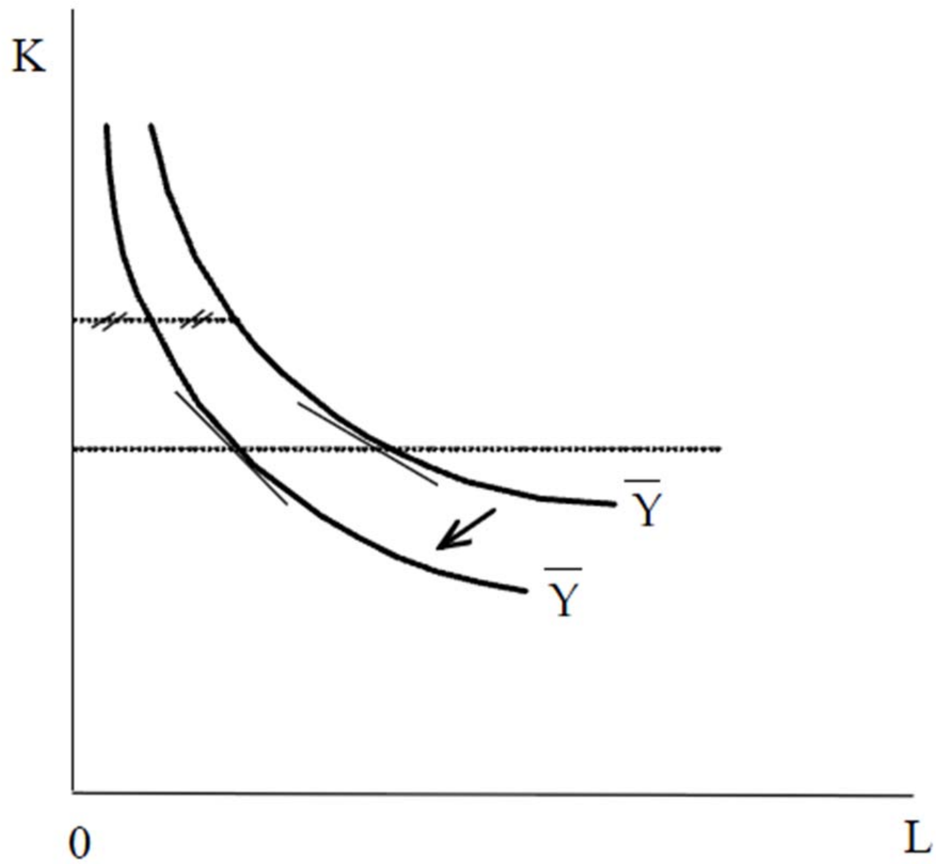
Κατά Solow ουδέτερη τεχνική πρόοδος [capital augmenting]

Στην περίπτωση της κατά Solow ουδέτερης τεχνικής προόδου οι isoquants μετατοπίζονται προς τα μέσα ως εάν ο άξονας του κεφαλαίου να συρρικνώνεται, αφού ένα υψηλότερο *A* αντιστοιχεί σε ένα μεγαλύτερο επίπεδο αποτελεσματικού κεφαλαίου. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η κατά Solow ουδέτερη τεχνική πρόοδος για διπλασιασμό του *A*(*t*). Παρατηρείστε ότι για μισό κεφάλαιο έχουμε το ίδιο *Y*.



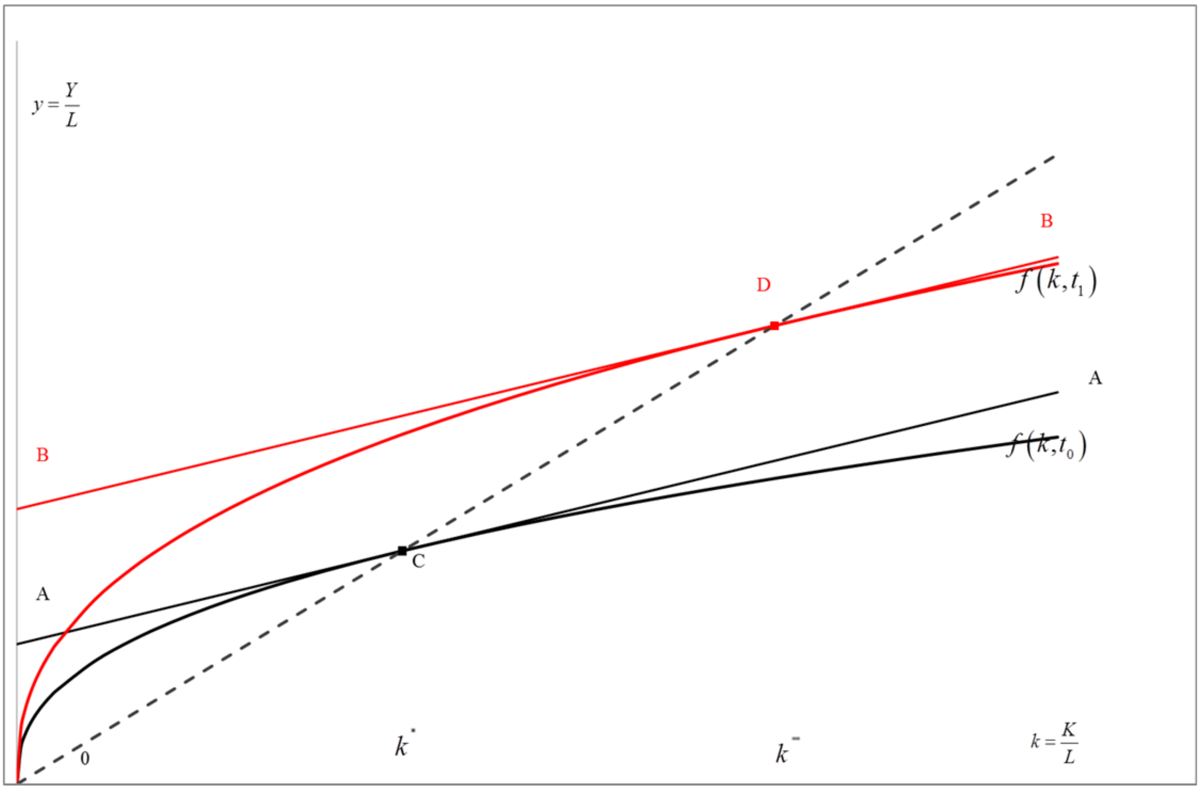
Κατά Harrod ουδέτερη τεχνική πρόοδος [labour augmenting].

Στην περίπτωση αυτή συμβαίνει το αντίθετο με την προηγούμενη περίπτωση. Μια αύξηση της αποτελεσματικότητας της εργασίας μετατοπίζει πάλι την isoquant προς τα μέσα, αλλά τώρα «συρρικνώνεται» ο άξονας της εργασίας. Με μισή εργασία παράγεται το ίδιο προϊόν. Οι isoquants έχουν το εξής σχήμα [για διπλάσιο *A*]



Στην περίπτωση της τεχνική προόδου κατά Harrod, η τεχνική πρόοδος ορίζεται ως «εξοικονομούσα εργασία», «ουδέτερη» ή «εξοικονομούσα κεφάλαιο» αν ο λόγος των σχετικών μεριδίων κεφαλαίου και εργασίας $\Pi = rK/wL$ αυξάνεται, παραμένει σταθερός, ή μειώνεται για κάθε **σταθερή τιμή του λόγου κεφαλαίου προϊόντος (*K/Y*)**.

Όπως και στην περίπτωση της κατά Hicks τεχνικής προόδου μπορούμε να δείξουμε την κατά Harrod τεχνική πρόοδο με το εξής διάγραμμα. Στον οριζόντιο άξονα είναι το κεφάλαιο ανά εργάτη ενώ στον κάθετο άξονα το προϊόν ανά εργάτη. Υπάρχουν πάλι δυο συναρτήσεις παραγωγής σε εντατική μορφή: η πρώτη, $y = f\left(k, t_0\right)$, πριν από την τεχνική πρόοδο και η δεύτερη, $y = f\left(k, t_1\right)$, μετά την τεχνική πρόοδο.



Επιλέγομε το σημείο k* στην πρώτη συνάρτηση παραγωγής. Επειδή όμως διατηρείται σταθερός ο λόγος κεφαλαίου προϊόντος, θα το συγκρίνουμε με ένα σημείο στη δεύτερη συνάρτηση παραγωγής που έχει τον ίδιο λόγο κεφαλαίου προϊόντος. Αυτό το επιτυγχάνουμε με μία ακτίνα που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο C πάνω στην συνάρτηση $f(k,t_0)$ που αντιστοιχεί στο σημείο $\left(k^*, f\left(k^*,t_0\right)\right)$. Η ακτίνα αυτή τέμνει την $f(k,t_1)$ στο σημείο D που αντιστοιχεί στο σημείο $\left(k^{**}, f\left(k^{**},t_1\right)\right)$. Παρατηρείστε ότι η κλίση της ακτίνας είναι $Ck^*/0k^* = Dk^{**}/0k^{**} = y^*/k^* = y^{**}/k^{**}$ που είναι το αντίστροφο του σταθερού λόγου κεφαλαίου προϊόντος. Στα σημεία C και D οι εφαπτόμενες AA και BB που μας δίνουν το οριακό προϊόν του κεφαλαίου πρέπει να έχουν την ίδια κλίση για να έχουμε τεχνική πρόοδο ουδέτερη κατά Harrod.

Όπως παρατήρησε πρώτη η Joan Robinson[5] η κατά Harrod ουδέτερη τεχνική πρόοδος αντιστοιχεί με την γνησίως αύξουσα την εργασία.

[5] Joan Robinson, “The Classification of Inventions”, *Review of Economic Studies*, τόμος 5, τεύχος 2 (Φεβρουάριος 1938), σσ. 139-142.

Ισοδυναμία μορφών τεχνικής προόδου στη συνάρτηση Cobb-Douglas

Μπορούμε μάλιστα να αποδείξουμε ότι η κατά Hicks και κατά Harrod ουδέτερες τεχνικές πρόοδοι είναι ισοδύναμες σε μια συγκεκριμένη μορφή τεχνολογίας, δηλ., όταν η ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας ισούται με την μονάδα.
Γράφουμε τον λόγο τν σχετικών μεριδίων ως $\Pi = \overline{p} \cdot k$, όπου $\overline{p} \equiv r/w$ και $k \equiv K/L$. Στην περίπτωση της ουδέτερης τεχνικής προόδου η μεταβολή του Π πρέπει να είναι μηδενική, δηλ., ο ρυθμός μεγέθυνσης πρέπει να είναι μηδέν. Κατά τα γνωστά

$$\hat{\Pi} = \hat{\overline{p}} + \hat{k} = 0 \Rightarrow \hat{\overline{p}} = -\hat{k} \Rightarrow \frac{\frac{d\overline{p}}{dt}}{\overline{p}} = -\frac{\frac{dk}{dt}}{k}$$

Αυτό ισοδυναμεί με $\frac{d\overline{p}}{\overline{p}} = -\frac{dk}{k} \Rightarrow -\frac{\overline{p}}{k}\frac{dk}{d\overline{p}} = -\frac{\frac{r}{w}}{\frac{K}{L}}\frac{d\frac{K}{L}}{d\frac{r}{w}} = 1$, η οποία είναι η ελαστικότητα υποκατάστασης μεταξύ κεφαλαίου και εργασίας. Αλλά η μόνη συνάρτηση παραγωγής με μοναδιαία ελαστικότητα υποκατάστασης είναι η συνάρτηση Cobb-Douglas με σταθερές αποδόσεις κλίμακας.

Αυτό δεν είναι παράξενο. Παρατηρείστε το εξής: σε μια συνάρτηση Cobb-Douglas μπορούμε να εκφράσουμε την τεχνική πρόοδο ισοδύναμα και με τις τρεις μορφές

$$\begin{aligned}
\tilde{F}\left(K(t), L(t), A(t)\right) &= A_H(t) F\left(K(t), L(t)\right) = A_H(t) K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} = \\
&= F\left(A_K(t) K(t), L(t)\right) = \left[A_K(t) K(t)\right]^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} = \\
&= F\left(K(t), A_L(t) L(t)\right) = K(t)^{\alpha} \left[A_L(t) L(t)\right]^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Άρα οι τεχνικές πρόοδοι κατά Hicks, Solow και Harrod είναι ισοδύναμοι σε μια κλασική συνάρτηση Cobb-Douglas.

Θεώρημα Uzawa

Ενώ *ex ante* και οι τρεις μορφές τεχνικής προόδου θεωρούνται εύλογες, η μακροχρόνια ισόρροπή μεγέθυνση στο υπόδειγμα Solow-Swan είναι δυνατή μόνο στη περίπτωση όπου έχουμε ουδέτερη κατά Harrod τεχνική πρόοδο. Το εκπληκτικό και ανησυχητικό αυτό συμπέρασμα το απέδειξε ο Ιάπωνας θεωρητικός της μεγέθυνσης Hirofumi Uzawa[6]

[6] H. Uzawa, “Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium”, *Review of Economic Studies*, τόμος 28, τεύχος 2 (Φεβρουάριος 1961), σσ. 117-124. Βλ. και Ekkehart Schlicht, “A Variant of Uzawa's Theorem”, *Economics Bulletin*, τόμος 5 (2006), τεύχος 6, σσ. 1-5. Βλ. επίσης Acemoglu (2009), ο.π., σσ. 59-64 και τις σημειώσεις του ιδίου στο MIT στην ηλεκτρονική διεύθυνση: http://economics.mit.edu/files/7181.