ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΙΙΙ

Θεωρία 08

Δήμητρα Κυριακοπούλου

Τμήμα Οικονομικών Επιστημών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

- Στα προηγούμενα είδαμε ότι χρησιμοποιώντας ένα τυχαίο δείγμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια διαδικασία ελέγχου μιας υπόθεσης:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$
$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

- Συγκεκριμένα, αυτό που κάνουμε είναι να χωρίζουμε το δειγματοληπτικό χώρο Ω (το σύνολο όλων των δυνατών τιμών του δείγματος) σε δύο ξένα υποσύνολα, για παράδειγμα C και D.

- Η κρίσιμη περιοχή ή περιοχή απόρριψης της H_0 καθορίζεται από την τιμή κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης $T = T(X)$ και συνήθως είναι της μορφής:

$$\{C : T > \kappa\},$$

όπου κ μια σταθερά που συμβολίζει την κρίσιμη τιμή (ή κρίσιμο σημείο).

- Το μέγεθος του ελέγχου είναι η πιθανότητα να κάνουμε Σφάλμα Τύπου I, δηλαδή να απορρίψουμε λανθασμένα την H_0. Και επειδή αυτό μας ενδιαφέρει περισσότερο, το να μην απορρίψουμε λανθασμένα την H_0, ζητάμε η κρίσιμη περιοχή να είναι τέτοια ώστε:

$$P\left(T > \kappa \mid H_0\right) \leq \alpha.$$

- Η περίπτωση του ελέγχου απλών υποθέσεων που εξετάσαμε στα προηγούμενα είναι ενδιαφέρουσα από θεωρητική, κυρίως, άποψη.

- Συνήθως, τέτοιες καταστάσεις δεν είναι συχνές, αφού οι συνήθεις οικογένειες κατανομών, τις περισσότερες φορές, εξαρτώνται από μία ή περισσότερες συνεχείς παραμέτρους.

- Όταν δεν υπάρχει Ισχυρότατος Έλεγχος, αλλά αν ικανοποιείται μια επιπλέον συνθήκη ώστε να υπάρχει Ομοιόμορφος Ισχυρότατος Έλεγχος, λέμε ότι αυτή η επιπλέον συνθήκη είναι η ιδιότητα του <u>μονότονου λόγου πιθανοφανειών</u> (monotone likelihood ratio) - έννοιες τις οποίες πραγματευόμαστε σε αυτήν τη Θεωρία.

Έλεγχος Σύνθετων Υποθέσεων

- Έστω ο έλεγχος υπόθεσης:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$
$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

και έστω ότι η υπόθεση H_1 είναι σύνθετη.

- Ο έλεγχος $\mathcal{H}$ καλείται **ομοιόμορφος ισχυρότατος έλεγχος (ΟΙΕ)** μεγέθους α αν:

1. Η πιθανότητα $P_{\mathcal{H}}(\text{Απορρίπτουμε την } H_0 |\, \theta) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0$
2. Για κάθε εναλλακτικό έλεγχο $\mathcal{H}'$, που επίσης ικανοποιεί την (1), ισχύει ότι:
$$P_{\mathcal{H}}(\text{Αποδεχόμαστε την } H_0 |\, \theta) \leq P_{\mathcal{H}'}(\text{Αποδεχόμαστε την } H_0 |\, \theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1$$
$$P_{\mathcal{H}}(\text{Απορρίπτουμε την } H_0 |\, \theta) \geq P_{\mathcal{H}'}(\text{Απορρίπτουμε την } H_0 |\, \theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1.$$

- Στη διεθνή βιβλιογραφία ο ΟΙΕ λέγεται uniformly most powerful test.
- Όταν η υπόθεση H_1 είναι απλή, ο αντίστοιχος έλεγχος που κατασκευάζουμε είναι ο ισχυρότατος ελέγχος (ΙΕ) (όπου εφαρμόζεται το λήμμα Neyman-Pearson).

- Συνοψίζοντας τα προηγούμενα: ένας σύνθετος έλεγχος $\mathcal{H}$ καλείται σύνθετος έλεγχος μεγέθους α αν ισχύει:

$$P_{\mathcal{H}}\left(\text{Σφάλμα Τύπου I}\right) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

- Ένας σύνθετος έλεγχος $\mathcal{H}$ μεγέθους α καλείται βέλτιστης ισχύος αν έχει τη μεγαλύτερη ισχύ έναντι κάθε άλλου ελέγχου μεγέθους α, με άλλα λόγια αν για οποιονδήποτε άλλο (τυχαίο) έλεγχο $\mathcal{H}'$ μεγέθους α ισχύει:

$$P_{\mathcal{H}}\left(\text{Σφάλμα Τύπου II}\right) \leq P_{\mathcal{H}'}\left(\text{Σφάλμα Τύπου II}\right), \quad \forall \theta \in \Theta_1.$$

• Παράδειγμα:

Έστω ότι $(X_1, X_2, ..., X_n) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, όπου σ^2 είναι γνωστή και έστω ότι ορίζουμε ως μηδενική υπόθεση ελέγχου:

$$H_0 : \mu = \mu_0.$$

Δείξαμε στην προηγούμενη διάλεξη (Θεωρία 07) ότι η κρίσιμη περιοχή μεγίστης ισχύος στο Παράδειγμα της Κανονικής κατανομής όταν η εναλλακτική υπόθεση είναι απλή, δηλαδή:

$$H_1 : \mu = \mu_1,$$

είναι:

$$\left\{C : z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha\right\} = \left\{C : \bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τον παρακάτω έλεγχο με σύνθετη εναλλακτική υπόθεση:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

για κάποια τιμή $\mu_0 < \mu_1$.

Όμοίως με την προηγούμενη διάλεξη (Θεωρία 07), μπορεί να υπολογιστεί η κρίσιμη περιοχή:

$$\left\{C : z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -z_\alpha\right\},$$

η οποία είναι **κρίσιμη περιοχή ΟΙΕ** για τον παραπάνω έλεγχο με H_1 σύνθετη.

<u>Ο λόγος είναι επειδή</u> 1) η C είναι ανεξάρτητη από το μ_1, και 2) είναι η ίδια για κάθε τιμή $\mu_0 < \mu_1$.

Το μέγεθος του ελέγχου, α, δηλαδή η πιθανότητα Σφάλματος Τύπου Ι, δίνεται από:

$$\begin{aligned} P\left(\bar{x} < \kappa \mid \mu = \mu_0\right) &= P\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\kappa - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(z < \frac{\kappa - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

όπου

$$\frac{\kappa - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -z_\alpha.$$

Σε συνέχεια του Παραδείγματος, έστω τώρα ότι:

$$H_0 : \mu = \mu'$$
$$H_1 : \mu > \mu'$$

για κάποια τιμή $\mu' < \mu_0$.

Τότε ισχύει ότι η πιθανότητα Σφάλματος I, να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση ενώ ισχύει, δίνεται από:

$$\begin{aligned} P\left(\bar{x} > \kappa \mid \mu = \mu'\right) &= P\left(\bar{x} > \mu_0 + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu'\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{x} - \mu'}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu' + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(z > z_\alpha + \frac{\sqrt{n}\left(\mu_0 - \mu'\right)}{\sigma}\right) \\ &\le P\left(z > z_\alpha\right) = \alpha, \end{aligned}$$

επειδή

$$\mu_0 - \mu' > 0.$$

Έτσι, για κάθε $\mu' < \mu_0$ ισχύει ότι:

$$P\left(\alpha\pi o\rho\rho.H_0 \mid \mu = \mu'\right) \leq \alpha.$$

Ένας τέτοιος έλεγχος καλείται Ομοιόμορφος Ισχυρότατος Έλεγχος (ΟΙΕ) μεγέθους α.

- Ένας ΟΙΕ έχει τη μεγαλύτερη ισχύ μεταξύ όλων των δυνατών ελέγχων δεδομένου μεγέθους α.
- Για παράδειγμα, σύμφωνα με το λήμμα Neyman-Pearson, ο έλεγχος με το λόγο πιθανοφάνειας (likelihood ratio test) είναι ΟΙΕ για τον έλεγχο απλών υποθέσεων.
- Να σημειωθεί ότι ενας ΟΙΕ μπορεί και να μην υπάρχει.

Ισχύς Ελέγχου

- Έστω τυχαίο δείγμα $(X_1, X_2, ..., X_n) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, με σ^2 γνωστό.
- Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε τον έλεγχο:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

- Η κρίσιμη περιοχή ΟΙΕ μεγέθους α δίνεται από:

$$C : \bar{x} > \kappa,$$

όπου

$$\kappa = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha + \mu_0.$$

- Η ισχύς δίνεται από $\pi = 1 - \beta$,όπου:

$$\beta = P\left(\delta\epsilon\chi\acute{o}\mu\alpha\sigma\tau\epsilon H_0 \mid \mu > \mu_0\right).$$

- Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση:

$$1 - \beta(\mu) = P(\text{απορρ.} H_0 \mid \mu > \mu_0).$$

- Θέτουμε:

$$\begin{aligned}
\pi(\mu) &= P(\text{απορρ.} H_0 \mid \mu) \\
&= P(\bar{x} > \kappa \mid \mu) \\
&= P\left(\bar{x} > \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha + \mu_0 \mid \mu\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha + \mu_0 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(z > z_\alpha + \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma}\right) \\
&=: \pi_n(\mu).
\end{aligned}$$

- Και στη συνέχεια:

$$\begin{aligned}\pi(\mu) &= P\left(z < -z_\alpha - \frac{\sqrt{n}\,(\mu_0-\mu)}{\sigma}\right)\\ &= P\left(z < \frac{\sqrt{n}\,(\mu-\mu_0)}{\sigma} - z_\alpha\right)\\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,(\mu-\mu_0)}{\sigma} - z_\alpha\right).\end{aligned}$$

- Ας θυμηθούμε ότι ισχύει:

$$P\left(\text{απορρ.}H_0 \mid \mu=\mu_0\right) = \alpha.$$

- Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}\pi(\mu) &= P\left(\alpha\pi\text{ορρ}.H_0 \mid H_1\right)\\ &> \alpha\\ &= P\left(\alpha\pi\text{ορρ}.H_0 \mid \mu = \mu_0\right)\\ &= P\left(\alpha\pi\text{ορρ}.H_0 \mid \mu\right), \quad \mu > \mu_0.\end{aligned}$$

- Ένας τέτοιος έλεγχος καλείται **αμερόληπτος**. Για παράμετρο θ:

$$\pi(\mu) > \alpha, \quad \forall \theta \in H_1.$$

• Επίσης, έχουμε:

$$\pi(\mu) = \pi_n(\mu) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu - \mu_0)}{\sigma} - z_\alpha\right).$$

• Για κάθε $\mu > \mu_0$, δηλαδή για κάθε $\mu \in H_1$, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \pi_n(\mu) = \lim_{n\to\infty} P_n(\alpha\pi o\rho\rho.H_0 \mid \mu) = 1,$$

που σημαίνει ότι είναι **συνεπής**.

- Στο Παράδειγμα με την Κανονική κατανομή, έχουμε δείξει ότι για την υπόθεση:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu = \mu_1$$

το κριτήριο για τον ΙΕ είναι:

- αν $\mu_1 > \mu_0$:

$$\lambda > \kappa \Rightarrow \bar{x} > \kappa = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$$

- αν $\mu_1 < \mu_0$:

$$\lambda > \kappa \Rightarrow \bar{x} < \kappa = \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha.$$

- Άρα <u>δεν υπάρχει ΟΙΕ</u> για την υπόθεση (αμφίπλευρη ή δίπλευρη):

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

διότι:

  - αν $\mu = \mu' > \mu_0$, τότε η κρίσιμη περιοχή ΟΙΕ είναι $\bar{x} > \kappa$, ενώ
  - αν $\mu = \mu' < \mu_0$, τότε η κρίσιμη περιοχή ΟΙΕ είναι $\bar{x} < \kappa$.

- <u>Παράδειγμα:</u>

  Έστω $(X_1, X_2, ..., X_n)$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ με μ γνωστό. Και έστω ότι έχουμε να εξετάσουμε την υπόθεση:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$$

με $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$.

Να σημειωθεί ότι όταν $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow \sum \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \mathcal{X}_n^2$.

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{L_0} &= \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right) \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\right\} \\ &= \left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\right) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0}\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

Τότε:

$$\frac{L_1}{L_0} > \kappa \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 > \kappa.$$

Η πιθανότητα να κάνουμε σφάλμα τύπου I είναι ίση με α, όπου:

$$\begin{aligned}
P\left(\text{σφάλμα τύπου I}\right) &= P\left(\text{Απορρ.} H_0 \mid H_0\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 > \kappa \mid \sigma^2 = \sigma_0^2 \right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma_0} \right)^2 > \kappa \right) \\
&= P\left(\mathcal{X}^2 > \kappa \right).
\end{aligned}$$

Άρα:

$$P\left(\mathcal{X}^2 > \kappa \right) = \alpha \Rightarrow \kappa = \mathcal{X}^2_{\alpha,n}.$$

Έστω, τώρα, ότι $H_0 : \sigma^2 = \tilde{\sigma}^2, \quad \tilde{\sigma}^2 < \sigma_0^2$.

Τότε:

$$\begin{aligned}
P\left(\mathcal{X}^2 > \kappa \mid \sigma^2 = \tilde{\sigma}^2\right) &= P\left(\mathcal{X}^2 > \kappa \mid \sigma^2 = \tilde{\sigma}^2\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 > \kappa\sigma_0^2\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\tilde{\sigma}}\right)^2 > \kappa\frac{\sigma_0^2}{\tilde{\sigma}^2}\right) \\
&= P\left(\mathcal{X}^2 > \kappa\frac{\sigma_0^2}{\tilde{\sigma}^2}\right) \\
&\leq P\left(\mathcal{X}^2 > \kappa\right) = \alpha,
\end{aligned}$$

διότι $\frac{\sigma_0^2}{\tilde{\sigma}^2} > 1$.

Η Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΕΟΚ)

- Υποθέτουμε ότι έχουμε τυχαίο δείγμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ από μια μονοπαραμετρική ΕΟΚ (η οποία παραγοντοποιείται ως εξής):

$$f(x;\theta) = a(\theta)\, b(x) \exp\{c(\theta)\, d(x)\}.$$

- Επίσης, έστω ότι $c(\theta)$ είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς την παράμετρο θ και $d(x)$ ένα επαρκές στατιστικό για την κατανομή.

- Τότε ένας ΟΙΕ μεγέθους α για την υπόθεση $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1 : \theta > \theta_0$ είναι αυτός που απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση όταν $d(x) \geq \kappa$, όπου το κ καθορίζεται έτσι ώστε να ισχύει ότι:

$$P(d(x) \geq \kappa \mid \theta = \theta_0) = \alpha.$$

- Αντίστοιχα, ένας ΟΙΕ μεγέθους α για την υπόθεση $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1 : \theta < \theta_0$ είναι αυτός που απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση όταν $d(x) \leq \kappa$, όπου το κ καθορίζεται έτσι ώστε να ισχύει ότι:

$$P\left(d\left(x\right) \leq \kappa \mid \theta = \theta_0\right) = \alpha.$$

Έλεγχος για τη Διακύμανση με Γνωστό Μέσο του Πληθυσμού

- Παράδειγμα της εκθετικής οικογένειας:

  Έστω ότι $(X_1, X_2, ..., X_n) \sim N\left(0, \sigma^2\right)$ και έστω ότι θέλουμε να εξετάσουμε την υπόθεση:

$$H_0 : \sigma = \sigma_0$$

$$H_1 : \sigma > \sigma_0$$

Μπορούμε να γράψουμε την κατανομή στη μορφή μονοπαραμετρικής εκθετικής οικογένειας - καθώς ο μέσος είναι γνωστός και είναι ίσος με το μηδέν - ως εξής:

$$f(x; \sigma) = (2\pi\sigma)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right\},$$

όπου $-\frac{1}{2\sigma^2} = c(\sigma)$, $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = d(x)$ και μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η συνάρτηση $c(\sigma)$ είναι αύξουσα ως προς την παράμετρο σ.

Και αυτό μας επιτρέπει να πούμε ότι απορρίπτουμε την H_0 αν $d(x) \geq \kappa$ όπου το κ προσδιορίζεται έτσι ώστε να ισχύει ότι:

$$P\left(d(x) \geq \kappa \mid \sigma = \sigma_0\right) = \alpha \Rightarrow$$
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \geq \kappa \mid \sigma = \sigma_0\right) = \alpha \Rightarrow$$
$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sigma^2} \geq \frac{\kappa}{\sigma^2} \mid \sigma = \sigma_0\right) = \alpha$$

και ο λόγος για το τελευταίο βήμα είναι επειδή $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}_n^2$ και επίσης μπορούμε να ορίσουμε τη σταθερά $\frac{\kappa}{\sigma^2} = \kappa^*$.

Μονότονος Λόγος Πιθανοφανειών (monotone likelihood ratio)

- Έστω X τυχαίο δείγμα από μια οικογένεια κατανομών $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ανεξάρτητο από άγνωστες παραμέτρους.

- Θα λέμε ότι η οικογένεια κατανομών $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα του <u>μονότονου λόγου πιθανοφανειών</u> (ΜΛΠ) ως προς μια στατιστική T αν για κάθε $\theta_1 < \theta_2 \in \Theta$, ο λόγος:

$$\lambda(x) = \frac{L_2(\theta_2;x)}{L_1(\theta_1;x)}$$

εξαρτάται από το τυχαίο δείγμα αποκλειστικά μέσω της στατιστικής συνάρτησης T, δηλαδή $\lambda(x) = \lambda(T(x))$, και αν το λ ως συνάρτητη του T είναι αύξουσα συνάρτηση.

- <u>Παράδειγμα:</u>

  Δίνεται η οικογένεια κατανομών $f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\},\ \theta>0$.Θα δείξουμε ότι η $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών.

  Έστω $\theta_1<\theta_2$, τότε:

$$L_2(\theta_2;x)=\left(\frac{1}{\theta_2}\right)^n\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta_2}\right\}$$
$$L_1(\theta_1;x)=\left(\frac{1}{\theta_1}\right)^n\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta_1}\right\}$$

  Επίσης, ο λόγος:

$$\lambda(x)=\frac{L_2(\theta_2;x)}{L_1(\theta_1;x)}=\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^n\exp\left\{\left(\frac{1}{\theta_1}-\frac{1}{\theta_2}\right)\sum_{i=1}^n x_i\right\}$$

  είναι αύξουσα συνάρτηση της στατιστικής $T(X)=\sum_{i=1}^n x_i$ και επομένως η οικογένεια κατανομών $f(x;\theta)$ έχει την ιδιότητα του μονότονου λόγου πιθανοφανειών ως προς τη συνάρτηση $T(X)=\sum_{i=1}^n x_i$.

- Έστω X τυχαία μεταβλητή και ότι η οικογένεια $f(x;\theta)$ έχει μονότονο λόγο πιθανοφανειών ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T = T(X)$. Τότε:

  1. υπάρχει ομοιόμορφο ισχυρότατο κριτήριο ομοιόμορφου βέλτιστου ελέγχου μεγέθους α για τον έλεγχο υποθέσεων:

  $$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
  $$H_1 : \theta > \theta_0$$

  2. η συνάρτηση

  $$\alpha(\theta) = P(\text{απορρ. } H_0 \mid \theta)$$

  είναι αύξουσα συνάρτηση της παραμέτρου θ και συνεπώς η σταθερά κ, που είναι η κρίσιμη τιμή, προσδιορίζεται έτσι ώστε να ισχύει:

  $$P(\text{απορρ. } H_0 \mid \theta = \theta_0) = \alpha$$

  όπου α το επιθυμητό επίπεδο σημαντικότητας.

- Σε συνέχεια των προηγουμένων, έστω:

$$\tilde{\theta}_0 \in H_0, \;\; \tilde{\theta}_1 \in H_1.$$

- Τότε:

$$\frac{L_1}{L_0} > \kappa \Longleftrightarrow$$

$T > \kappa$ είναι το ομοιόμορφο ισχυρότατο κριτήριο, $\forall \tilde{\theta}_0 \in H_0, \;\; \tilde{\theta}_1 \in H_1$, που επίσης ισχύει $\tilde{\theta}_1 > \tilde{\theta}_0$.

- Έστω X τυχαία μεταβλητή και ότι η οικογένεια $f(x;\theta)$ έχει μονότονο λόγο πιθανοφανειών ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T = T(X)$. Τότε:

  1. υπάρχει ομοιόμορφο ισχυρότατο κριτήριο ομοιόμορφου βέλτιστου ελέγχου μεγέθους α για τον έλεγχο υποθέσεων:

  $$H_0 : \theta \geq \theta_0$$
  $$H_1 : \theta < \theta_0$$

  2. η συνάρτηση

  $$\alpha(\theta) = P(\text{απορρ. } H_0 \mid \theta)$$

  είναι φθίνουσα συνάρτηση της παραμέτρου θ και συνεπώς η σταθερά κ, που είναι η κρίσιμη τιμή, προσδιορίζεται έτσι ώστε να ισχύει:

  $$P(\text{απορρ. } H_0 \mid \theta = \theta_0) = \alpha$$

  όπου α το επιθυμητό επίπεδο σημαντικότητας.

- Σε συνέχεια των προηγουμένων, έστω:

$$\tilde{\theta}_0 \in H_0,\ \ \tilde{\theta}_1 \in H_1.$$

- Τότε:

$$\frac{L_1}{L_0} > \kappa \Longleftrightarrow \frac{L_0}{L_1} > \frac{1}{\kappa} = \kappa^* \Longleftrightarrow$$

  $T < \kappa$ είναι το ομοιόμορφο ισχυρότατο κριτήριο, $\forall \tilde{\theta}_0 \in H_0,\ \ \tilde{\theta}_1 \in H_1$, που επίσης ισχύει $\tilde{\theta}_0 > \tilde{\theta}_1$.

- Ας θεωρήσουμε τον έλεγχο:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$
$$H_1 : \mu > \mu_0$$

- Προφανώς, η κρίσιμη περιοχή $\{C : \bar{x} > \kappa\}$ όπου $\kappa = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha + \mu_0$, εξασφαλίζει μέγιστη ισχύ.

- Έστω τώρα ότι $\mu' \leq \mu_0$ και $\mu'' > \mu_0$.

- Τότε:

$$\frac{L\left(\mu''\right)}{L\left(\mu'\right)} > \kappa \Longleftrightarrow \bar{x} > \kappa,$$

λόγω μονότονου λόγου πιθανοφανειών.

- Το ερώτημα στο οποίο έχουμε να απαντήσουμε είναι τι μέγεθος (επίπεδο σημαντικότητας) θα έχει αυτός ο έλεγχος.

- Παράδειγμα:

Έστω τυχαίο δείγμα $(X_1, X_2, ..., X_n) \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, με σ^2 γνωστό και έστω ότι εξετάζουμε την υπόθεση:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

Έστω ότι $\mu_1 < \mu_2$. Τότε έχουμε:

$$\frac{L_2(x)}{L_1(x)} = \exp\left\{\frac{n(\mu_2 - \mu_1)}{\sigma^2}\left[\bar{x} - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\right]\right\}.$$

Άρα υπάρχει ΜΛΠ ως προς τη στατιστική συνάρτηση $T(X) = \bar{X}$.