ΤΜΗΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - (Γραμμικά Μαθηματικά)

1η Εργασία - 2013

Διδάσκων: Δρ. Σ. Κώτσιος

0.1 *Να βρεθεί η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

0.2 *Να βρεθούν όλοι οι πίνακες που αντιμετατίθενται με τον πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0.3 *Να βρεθεί η ν-οστή δύναμη του πίνακα:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

0.4 *Να βρεθεί η κ - τάξεως δύναμη του πίνακα:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

0.5 *Χρησιμοποιώντας σύνθετους πίνακες βρείτε την ορίζουσα και τον αντίστροφο του πίνακα:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

0.6 *Δίδεται ο πίνακας*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας τον από δεξιά και αριστερά με κατάλληλους πίνακες μετατρέψτε τον σε διαγώνιο. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα υπολογίσατε τον αντίστροφο του A.

0.7 *Δίδονται οι πίνακες*

$$A = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Δείξατε ότι ισχύει η σχέση:

$$A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$$

0.8 *Αν για τον τετραγωνικό πίνακα A ισχύει* $(A + 2I)^k = 0$, *για κάποιο* k, *δείξτε ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον αντίστροφο του.*

0.9 *Υπολογίσατε την ορίζουσα:*

$$\left| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right]$$

0.10 *Να υπολογισθεί η ορίζουσα:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

0.11 *Να δειχθούν οι ισότητες:*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \beta & \mu \\ x & \alpha & \lambda \\ z & \gamma & \nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

0.12 *Έστω* $M_{2\times 2}(B)$, *το σύνολο των* 2×2 *πινάκων, με στοιχεία τους δυαδικούς αριθμούς 0 ή 1. Διαλέγουμε έναν πίνακα στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα να είναι αντιστρέψιμος;*

0.13 *Να αποδειχθεί η σχέση:*

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A + B)^{-1}A$$

0.14 *Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

α) Με Γραμμοπράξεις (Ανηγμένος Κλιμακωτός)
β) Με προσαρτημένο πίνακα.

0.15 *Να βρεθεί ο αντίστροφος πίνακας του παρακάτω γινομένου, χωρίς να υπολογισθεί το γινόμενο:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

0.16 *Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0.17 *Ένας πίνακας A λέγεται* **ορθογώνιος** *αν* $AA^T = I$. *Δείξατε ότι*
α) Η ορίσουσα ενός ορθογωνίου πίνακα είναι ίση με ± 1.
β) Το γινόμενο ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος.
γ) Κάθε ορθογώνιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ορθογώνιος.

0.18 *Να αποδειχθεί η σχέση:*

$$det(adj(adj(A))) = [det(A)]^{(n-1)^2}$$

0.19 *Να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές του* s *η τάξη του πίνακα:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & s & 6 & 6 \\ -1 & 3 & s-3 & 0 \end{pmatrix}$$

0.20 *Ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & n-1 & \cdots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

είναι τετραγωνικός, με n *γραμμές και* n *στήλες. Να βρεδεί η τάξη του για τις διάφορες τιμές του* n.

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Η ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ
2. Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΘΑ ΠΑΡΑΔΟΘΕΙ ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΑΠΡΙΛΙΟΥ, ΣΤΗΝ ΑΙΘΟΥΣΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ
3. ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΘΑ ΛΑΒΕΙ ΧΩΡΑ ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΡΟΦΟΡΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ.
4. Η ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΘΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΘΕΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΥΠΟ :

$$B = \begin{cases} \Gamma\rho & \Gamma\rho < 4 \\ \max\{\Gamma\rho, \frac{\Gamma\rho + E\rho}{2}\} & \Gamma\rho \geq 4 \end{cases}$$

ΟΠΟΥ Γρ Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΩΝ ΓΡΑΠΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ Ερ Ο ΜΕΣΟΣ ΟΡΟΣ ΤΩΝ ΕΡΓΑΣΙΩΝ