

Άσκηση 1^η: Επιλύσατε τις εξισώσεις διαφορών:

$$(a) \quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

$$(b) \quad y_{n+1} - y_n = 3^n \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$(c) \quad y_{n+3} - y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = n$$

Άσκηση 2^η: Επιλύσατε την εξίσωση:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = y_{n+2}$$

Άσκηση 3^η: Επιλύσατε την εξίσωση:

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = n4^n \quad y_1 = \frac{2}{9}, \quad y_2 = \frac{1}{9}$$

Άσκηση 4^η: Υποθέτουμε ότι το εισόδημα Y_n , το κεφάλαιο K_n , οι επενδύσεις I_n , η εργασία L_n και οι αποταμιεύσεις S_n είναι συναρτήσεις του διακριτού χρόνου n . Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$I_n = (K_{n+1} - K_n) + \delta K_n$$

$$S_n = sY_n$$

$$L_{n+1} = aL_n$$

$$S_n = I_n$$

$$\frac{Y_n}{L_n} = f\left(\frac{K_n}{L_n}\right)$$

Όπου $\delta, s, a > 0$ θετικές σταθερές και $f(\cdot)$ συνάρτηση.

- 1) Διερμηνεύσατε οικονομικά τα παραπάνω.
- 2) Θεωρώντας ως άγνωστη ακολουθία την ποσότητα $k_n = \frac{K_n}{L_n}$, μορφώσατε τα ανωτέρω σε εξίσωση διαφορών.
- 3) Επιλύσατε την όταν $f(\cdot) = h$ και όταν $f(\cdot) = cn^\lambda$, c, h, λ σταθερές.

Άσκηση 5^η:

Επιλύσατε τις κάτωθι εξισώσεις διαφορών:

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 4^n + n^2 + 3$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = n$$

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 2n - 3$$

Άσκηση 6^η:

Σε μία αγορά αραβόσιτου ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$d_t^c = -5p_t^c$$

$$s_t^c = 2p_{t-1}^c$$

$$d_t^c = s_t^c$$

Όπου d_t^c, s_t^c η ζήτηση και η προσφορά την χρονική στιγμή t και p_t^c η τιμή του αραβόσιτου. Σε μία αγορά χοιρινού ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$d_t^h = -5p_t^h$$

$$s_t^h = 2.5p_{t-1}^h - 2p_{t-1}^h$$

$$d_t^h = s_t^h$$

Όπου d_t^h, s_t^h η ζήτηση και η προσφορά την χρονική στιγμή t και p_t^h η τιμή του αραβόσιτου. Μορφώσατε τα παραπάνω σε σύστημα εξισώσεων διαφορών, με αγνώστους τις τιμές των προϊόντων, επιλύσατε το και βρείτε την οριακή του έκβαση.

Άσκηση 7^η: Τριγωνικοί αριθμοί λέγονται οι αριθμοί :

1,3,6,10,15,...Αντιπροσωπεύουν το πλήθος των τελειών στα παρακάτω τρίγωνα:



Βρείτε πόσες τελείες θα υπάρχουν στο 2015οστό τρίγωνο.

Άσκηση 8η: Επιλύσατε τις κάτωθι μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών:

$$(a) \quad y_k + y_{k+1} = y_k y_{k+1}$$

$$(b) \quad y_{k+1}^3 = 3y_k \quad y_0 = 1$$

$$(c) \quad y_{k+1} = \sqrt{1 - y_k^2}$$

Άσκηση 9η: Χρησιμοποιώντας το MATHEMATICA για να κάνετε τις περίπλοκες πράξεις, επιλύσατε το σύστημα:

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 10η: Ο πληθυσμός ενός βιολογικού είδους χωρίζεται σε δυο ομάδες: την ομάδα Α (ανήλικα είδη) και την ομάδα Β (ενήλικα είδη). Η ομάδα Β μπορεί να αναπαραχθεί ενώ η ομάδα Α όχι. Ο ετήσιος ρυθμός γεννήσεων είναι $\rho\%$ ενώ ο ρυθμός θανάτων είναι $a\%$ και $b\%$ για τις ομάδες Α και Β αντίστοιχα. Επίσης κάθε χρόνο ποσοστό $\sigma\%$ «μεταφέρεται» από την ομάδα Α στην Β (ενηλικιώνεται). Δώσατε σύστημα εξισώσεων διαφορών που να περιγράφει την παραπάνω δημογραφική διαδικασία. Επιλύσατε το όταν: $\rho=4\%$, $a=1,6\%$, $b=3\%$, $\sigma=8\%$ και ο αρχικός πληθυσμός της ομάδας Α είναι 5 και της Β, 15. Βρείτε επίσης, σε αυτή την περίπτωση, την οριακή έκβαση των πληθυσμών.